

流体力学講話・つまみ食い(その9)

KENZOU

2008年9月7日

♣ 流体力学のお話も中盤を過ぎて第9回目に入りました。1回目は流体の種類, 流れのふる舞い, 相似則の話題, 2回目はラグランジュの立場とかオイラーの立場からの完全流体の基礎方程式の導出を中心と話題と渦に関する話題, 3回目は完全流体の運動方程式の活用, ベルヌイの定理からラグランジュの渦定理など, 4回目は非圧縮性流体の2次元渦なし運動の話で, 流れ関数とか複素速度ポテンシャルなど大変重要な概念がでてきました。また, 静止円柱を過ぎる一様流れ場での速度や圧力分布などを求めました。5回目は, 任意の形状の物体が流体から受ける圧力やモーメントを求めるブラジウスの公式から揚力に関するクッタ・ジュコーフスキー定理, それから等角写像とその活用などの話題。6回目はカルマン(Karman)の渦列など, 渦の周りの流れの話題に触れました。第7回目は非圧縮性粘性流体の運動方程式, これは外力としてせん断応力等が登場するのでオイラーの運動方程式は適用できず, いわゆるナビエ・ストークスの方程式となりますが, このN-S方程式を2次元流体で導出し, 3次元に拡張しました。そして, N-S方程式の厳密解が得られる例(ハーゲン・ポアゼイユ流れなど)をとりあげました。第8話では x 軸に平行な乱流の話題に触れ, せん断応力の表式を求め, レイノルズ応力やブジネスクの仮定を経てプラントルの運動量輸送理論, 境界層理論のお話をしました。第9話では第8話の続きとして境界層剥離の話題に少し触れ, それから粘性流の「遅い流れ」, 有名なストークスの抵抗法則に入っていこうと思います。それでは第9話をはじめます。

目次

14 境界層の剥離	2
14.1 境界層の定義(復習)	2
14.2 境界層剥離	2
14.2.1 圧力勾配と境界層剥離	3
14.3 拡大管の剥離点(層流の場合)	4
14.4 拡大管の剥離点(乱流の場合)	7
15 粘性流の遅い流れ	7
15.1 ストークス近似	7
15.2 ストークス近似の基本解	9
15.2.1 ストークス源	9
15.2.2 軸対称な流れ—ストークスの流れ関数—	11
15.3 一様な流れの中の球(ストークスの抵抗法則)	12

=====

14 境界層の剥離

14.1 境界層の定義（復習）

- 境界層の定義：平板上を流れる流体を平板に垂直方向の断面でみた場合、表面の流速ゼロのところから遠方の一様な流速を持つ流れ（主流：流速 U ）まで徐々に変化しています。この徐々に変化している領域を境界層とよび、その流れを特に粘性底層流と呼びました。境界層の厚みは \sqrt{x} に比例して大きくなります。境界層では壁面の影響による粘性の力が支配的であるのに対し、主流では粘性の影響が無視できて、そこでの流れは非粘性流あるいはポテンシャル流としての取り扱いが可能です。このように、流れを粘性の影響を強く受ける境界層と粘性の影響を無視できる主流に分離できるという考えが、プラントルの提唱した境界層理論です。
- 境界層の種類：境界層の流れを粘性底層流と呼びましたが、この流れが層流の場合は層流境界層とよび、乱流状態である場合は乱流境界層と呼びます。
- 境界層の厚み：流速が主流の流速と異なる領域の平板表面からの距離を境界層の厚さ δ と定義し、通常主流の速度を U とすると $\delta = 0.99U$ と定義されます。これは $\delta_{0.99}$ とも表記されます。これ以外に排除厚さ δ^* や運動量厚さ θ などの定義があり、それぞれ境界層によって排除された流体の体積、運動量を主流の流体にあてはめた厚さとして換算したものです。また、粘性底層の流速分布の形状を表すために $H = \delta^*/\theta$ で定義される形状係数があり、 H の値が大きくなると境界層剥離が発生しやすくなります。
- 境界層のはじまり：境界層は $u = v = 0$ のよどみ点から始まり、一般に層流状態になって下流の方向へ発達していきます。
- 境界層の終わり：境界層は下流方向に成長・肥大化していくにつれて層流から乱流状態へと変化し、乱流状態になった境界層を乱流境界層と呼びます。層流から乱流の変化の過程を遷移（transition）とか境界層遷移（boundary layer transition）と呼んでいますが、遷移は主流の乱れや壁面の粗さ、壁面の曲率、圧力勾配等いろいろな因子の影響を強く受けます。境界層の終わりは平板の後縁で、これ以降の下流側では後流（wake）と呼ばれる流れが生じます。
- 境界層の剥離：境界層内では摩擦せん断力の作用により絶えず熱エネルギーとしてエネルギー消費が起こっていますので、非常に弱い流れとなっています。この流れに逆勾配の圧力（下流側が高圧）がかかると、エネルギー消費の大きい壁面付近の流体から徐々に減速し、ついに壁面で速度勾配がゼロに達し、流体が壁面から離れていきますが、この現象を境界層剥離（boundary layer separation）と呼び、剥離が起こった位置を剥離点（separation point）といいます。剥離した境界層は、流れの条件により再び壁面に付着することがありますが、この現象を剥離の再付着（reattachment）と呼び、再付着した位置を再付着点（reattachment point）といいます。

14.2 境界層剥離

いままで平板上に平行に流体が流れていて進行方向に圧力変化がない場合についてみてきました（ただし、第8話 §13.2.1 は流れの方向に圧力勾配がある場合に触れました）。ここでは進行方向に圧力の変化がある場合について考えます。

Fig.63

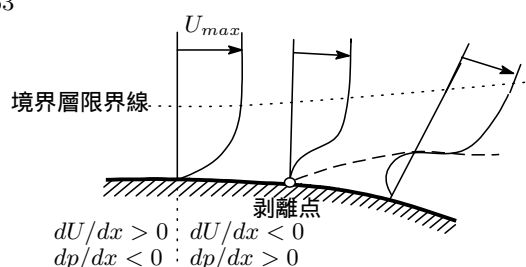


Fig.63のように曲がった曲面上を流体が流れている場合、ある位置で流速が最大、圧力が最小になり、この位置より上流では $dU/dx > 0, dp/dx < 0$ で下流では $dU/dx < 0, dp/dx > 0$ となります。また、拡大管の流れのように、下流に行くほど流域が広がるような勾配を持つ流れ場では、下流に行くほど圧力が高くなる圧力勾配が形成されます。このような流れ場の圧力勾配を逆圧力勾配と呼んでいます。

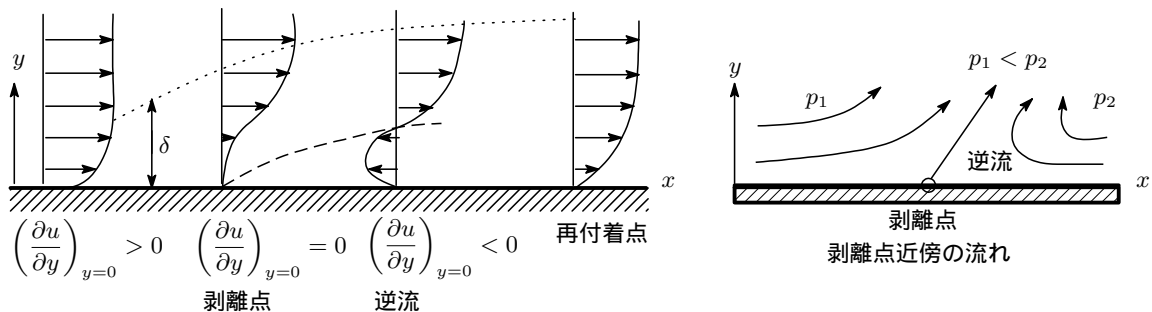
壁から遠いところの流体は流速が大きく慣性が大きいため逆圧力勾配に打ち勝って下流まで進むことができますが、壁近くの流体は壁面との表面摩擦でエネルギーを失い、流速が小さいので慣性は小さく、圧力に打ち勝って下流まで流れることがますます困難となり、ついにある位置で速度勾配がゼロとなります。この点を剥離点と呼んでいます。

$$\text{剥離点: } \left(\frac{du}{dy} \right)_{y=0} = 0 \quad (14.1)$$

そして流体は上昇圧力にたいしてエネルギーを与えなければならない関係上、より摩擦の少ない方向に進もうとして壁面を離れ剥離が生じることになります。この現象を境界層剥離と呼んでいます¹。境界層剥離が発生すると境界層厚さが急激に厚くなり、また、剥離点の下流では速度勾配が負となって上流側から下流側に流体が流れ込まなくなるため逆流が生じます。この逆流領域を再循環領域 (recirculation region) とか剥離泡 (separation bubble) と呼んでいます。逆流により渦のある後流 (Wake) が発生して流れは一層乱れ、エネルギーの損出を増やすこととなります。

尚、剥離した境界層は、流れの条件によって再び壁面に付着することがあり、この現象を剥離の再付着、再付着した位置を再付着点と呼びます。

Fig.63



14.2.1 圧力勾配と境界層剥離

圧力勾配と境界層剥離の関係を定量的にみていきます。定常状態での境界層方 $\partial u/\partial t = 0$ なので

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{aligned} \right\} \quad (14.2)$$

いま、壁面では $u = v = 0$ なので、 $x = x, y = 0$ で点では

$$\mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_{y=0} = \frac{\partial p}{\partial x} \quad (14.3)$$

これを y について微分すると

$$\nu \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)$$

が得られます。境界層内の圧力は壁面に垂直な方向に変化しない、つまり $\partial p/\partial y = 0$ であるので、 $x = x, y = 0$ の壁面上の点では

$$\frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = 0 \quad (14.4)$$

¹ 剥離にも層流剥離と乱流剥離の2つがあり、層流境界層に続いて剥離が起こるのが層流剥離で、乱流境界層に続いて剥離が起こるのが乱流剥離と呼ばれています。乱流境界層内では大小さまざまなスケールの渦が発生しているため、これらの渦により主流から壁面へエネルギーが活発に運ばれ流速の減速が起こりにくく、乱流境界層は境界層剥離に比べて剥離しにくとされています。このことから、層流境界層内に乱れを派発生させる物体を配置し、境界層を強制的に乱流境界層へ遷移させ剥離を遅らせることがおこなわれています。北京オリンピックで有名になったスピード社の水着なんかどうなっているのでしょうか？

となり、速度分布の曲率 $(\partial^2 u / \partial y^2)_{y=0}$ は、流れ方向の圧力勾配にのみ依存することが分かります。(14.3)(14.4) は 壁面上の条件 ということになります。

x 方向に圧力勾配がある場合の主流の運動方程式は、第 8 話の (13.12) より

$$U \frac{dU}{dx} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} \quad (14.5)$$

でした。そこで dp/dx が負と正の場合について考えます。尚、 $dp/dx = 0$ 場合は速度分布は直線的な分布でした(第 8 話例題 27 参照)。

(1) $dp/dx < 0$ の場合：流れに沿って圧力が低下する場合 … 剥離は起こらない。

この場合は、 $dU/dx > 0$ で主流は流れの方向に増速します。(14.3) より $(\partial^2 u / \partial y^2)_{y=0} < 0$ で、2 階微分が負ですから速度分布 $u(y)$ は常に上に凸となり、 $y = 0$ で $u = 0$ であるので $u(y)$ は負の値をとることはありません。

(2) $dp/dx > 0$ の場合：流れに沿って圧力が上昇する場合 … 剥離が発生する。

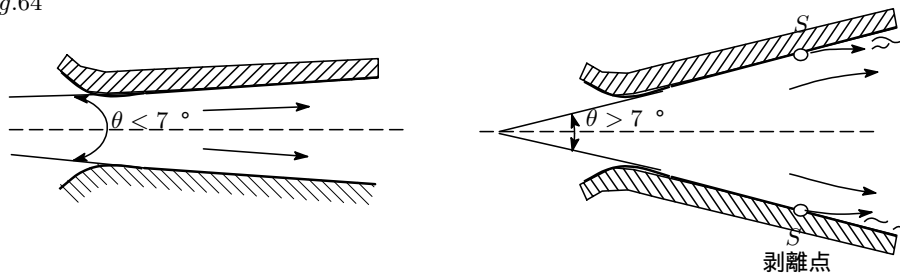
この場合は、 $dU/dx < 0$ で主流は流れの方向に減速します。また (14.3) より、 $(\partial^2 u / \partial y^2)_{y=0} > 0$ となるので速度分布 $u(y)$ は下に凸となるころがでてきます。(14.2) の慣性項は負から正の値の範囲をとるので 速度が負の値となる ことがあります。

以上のことから境界層剥離の発生は $dp/dx > 0$ の場合に限られることが分かります。もっとも、 $dp/dx > 0$ になっただけで剥離が発生するわけではなく、下流にいくにつれて徐々に $u(y)$ の形が変化していき、壁面上のある位置で $\partial u / \partial y = 0$ となる剥離点で発生します。そしてその位置から下流では逆流が発生します。

14.3 拡大管の剥離点 (層流の場合)

拡大管では速度が進行方向に減少し圧力は増大します(連続の式、ベルヌイの定理より)。拡がり角が 7° 以下の場合には剥離は発生しないが、 7° より大きい管では、壁面上のある点 S で剥離を起こすとされています。

Fig.64



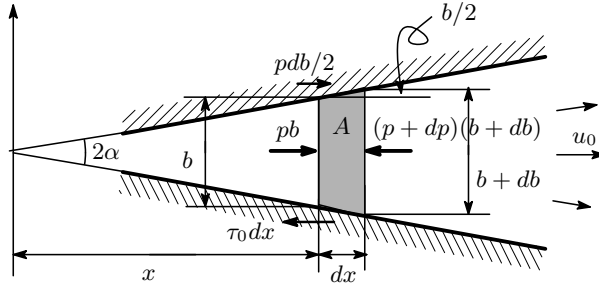
ただし、同じ圧力勾配がある場合でも、流れの下流に向かって流速 U が次第に増加するような場合、つまり下流に向かって圧力 p が次第に降下するような場合には剥離の発生は生じません。というのは、流れの粒子は壁面摩擦に一部エネルギーを消耗しますが、圧力に対してはエネルギーを与えなくてすむのでエネルギー消費量が少なくてすむからです。

さて、拡大管の剥離点について調べます。Fig.65 (は少し大きさに：笑い) に示すように、2 平面の間の角 2α が極めて小さく、平面間の距離 b が

$$\tan(2\alpha) \simeq 2\alpha = b/x \longrightarrow b = 2\alpha x \quad (14.6)$$

で表されるような壁面の間を通る 2 次元定常流を考えます。

Fig.65



A に作用する圧力

$$x \text{ 方向: } pb - (p + dp)(b + db) = -(pdb + bdp)$$

$$\text{斜面 } x \text{ 方向: } (pdb/2) \times 2 = pdb$$

$$\text{壁面の摩擦抗力: } -\tau_0 dx \times 2 = -2\tau_0 dx$$

流路の中心では

$$x = x, y = b/2 \text{ の点で } u = u_0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (14.7)$$

境界層方程式と壁面上の条件は § 14.2.1 でみてきたように

$$\left. \begin{aligned} x = x, y = 0 \text{ の点で } u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ x = x, y = 0 \text{ の点で } \left(\frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right)_{y=0} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (14.8)$$

となります。次に速度分布式ですが、これは $x = x$ 線上の速度分布として次の近似式を考えます。

$$u/u_0 = A_1(2y/b) + A_2(2y/b)^2 + A_3(2y/b)^3 + A_4(2y/b)^4 \quad (14.9)$$

各係数は (14.7)(14.8) に入れて求めます。まず (14.9) を y で微分していくと

$$\left. \begin{aligned} (u/u_0)' &= A_1(2/b) + A_2(8/b^2)y + A_3(24/b^3)y^2 + A_4(64/b^4)y^3 \\ (u/u_0)'' &= A_2(8/b^2) + A_3(48/b^3)y + A_4(192/b^4)y^2 \\ (u/u_0)''' &= A_3(48/b^3) + A_4(384/b^4)y \end{aligned} \right\} \quad (14.10)$$

となるので、先ほどの条件式より各係数は

$$A_1 = \frac{4 - 2A_2}{3}, \quad A_2 = \frac{b^2}{8\mu u_0} \frac{dp}{dx}, \quad A_3 = 0, \quad A_4 = -\frac{1 + A_2}{3} \quad (14.11)$$

と求まるので、速度分布の式は

$$\frac{u}{u_0} = \frac{8y}{3b} \left\{ 1 - 2 \left(\frac{y}{b} \right)^3 \right\} - \frac{4A_2 y}{3b} \left\{ 1 - 3 \frac{y}{b} + 4 \left(\frac{y}{b} \right)^3 \right\} \quad (14.12)$$

となります。

次に、外部から微小体 A に作用する x 方向の力 X を求めます。これは Fig.65 に書いてあるように

$$X = pb - (p + dp)(b + db) + pdb - 2\tau_0 dx = -bdp - 2\tau_0 dx \quad (14.13)$$

となり、この力は流体の単位時間あたりの運動量の変化を生じさせます。

幅 b の断面を通して単位時間に流れる流体の運動量を p_m とすると $p_m = \int_0^b (\rho u) u dy = 2 \int_0^{b/2} \rho u^2 dy$, また, $x + dx$ の断面を通る運動量は $p_m + dp_m$ で, 運動量の増分 dp_m は $dp_m = \left(\frac{dp_m}{dx} \right) dx$ で与えられるので $dp_m = \frac{d}{dx} \left(2 \int_0^{b/2} \rho u^2 dy \right) dx$ となります。この単位時間における運動量の増加分は先ほどの力により生じたので

$$\frac{d}{dx} \left(2 \int_0^{b/2} \rho u^2 dy \right) dx = -bdp - 2\tau_0 dx \quad (14.14)$$

両辺を dx で割ってやると

$$\frac{d}{dx} \left(2 \int_0^{b/2} \rho u^2 dy \right) = -b \frac{dp}{dx} - 2\tau_0 \quad (14.15)$$

となります。右辺にでてきた τ_0 (壁面に働く摩擦応力) は (14.10) (14.11) より

$$\tau_0 = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = \mu \frac{2u_0}{b} A_1 = \frac{4\mu u_0}{3b} (2 - A_2) \quad (14.16)$$

で、左辺は (14.12) より²

$$2 \int_0^{b/2} \rho u^2 dy = \rho u_0^2 b E \quad (14.17)$$

$$E = \frac{37}{81} - \frac{40}{567} A_2 + \frac{51}{8505} A_2^2 \quad (14.18)$$

となります。

(14.15) の左辺に (14.17) を、右辺に (14.11) の dp/dx 、(14.16) の τ_0 と (14.6) の b を入れて整理すると

$$\frac{2E}{u_0} \frac{du_0}{dx} + \frac{E}{x} = -\frac{8\nu(A_2 + 1)}{3\alpha x b u_0} \quad (14.19)$$

が得られます。この式の左辺に du_0/dx が入っていますのでこれを何とかしなくてはなりません。そこで流体の速度分布は x の位置にかかわらず、速度 u の y に対するプロファイルは相似であるとします³。そうすると (14.9) の係数 A_1, A_2, A_3, A_4 は x に無関係と見てよいことになり、このことと流路に沿っての質量流量は一定という連続の式より

$$u_0 b = \text{const} \quad (14.20)$$

とおくことができます。また、 $b = 2\alpha x$ であるので上式は

$$u_0 x = \text{const} \quad (14.21)$$

と書けます。この微分をとると

$$u_0 dx + x du_0 = 0 \rightarrow \frac{1}{u_0} \frac{du_0}{dx} = -\frac{1}{x}$$

となるので、これを (14.19) に入ると

$$E = \frac{8\nu(A_2 + 1)}{3\alpha b u_0} \quad (14.22)$$

が得られます。(14.18) より

$$\frac{37}{81} - \frac{40}{567} A_2 + \frac{51}{8505} A_2^2 = \frac{8\nu(A_2 + 1)}{3\alpha b u_0} = \frac{8(A_2 + 1)}{3\alpha R}, \quad R = \frac{b u_0}{\nu} \quad (14.23)$$

これから α, R が与えられると上式より A_2 が求まります。また圧力の変化を表す式は (14.11) の2つ目の式より

$$\frac{dp}{dx} = \frac{8\mu u_0 A_2}{b^2} \quad (14.24)$$

となります。

境界層剥離は $(\partial u / \partial y)_{y=0}$ のところで起こるので (14.10) (14.11) より

$$A_2 = 2 \quad (14.25)$$

(14.16) より $A_2 < 2$ のときは $(\partial u / \partial y)_{y=0} > 0$ となって剥離は発生せず、 $A_2 > 2$ のときは $(\partial u / \partial y)_{y=0} < 0$ で逆流が生じることとなります (Fig.63 参照)。尚、 $A_2 = 0$ のときは $\tau_0 = 0$ となりますね。

一方、狭まり流路では流れが逆に向きますから上式で $x < 0, \alpha < 0$ とおけばよいこととなります。(14.18) は常に正の値をとらなければならないので (14.22) より A_2 は常に $A_2 < -1$ となります。これを (14.16) に入

² こんな積分計算は手計算では大変ですので Mathematica にやらせました (汗;;)。

³ 本来違うものがあるパラメータを使うことによってその関数で表されることを相似であるといえます。

れると $(\partial u / \partial y)_{y=0} > 0$ となって、剥離は生じないということになります。

例題 35 : 拡がり流路で水を流し幅 3cm のところで剥離を起こさすための拡がり角 2α を求めよ。ただし、幅 3cm の軸心の流速は 1cm/sec とし、動粘性係数は $0.010\text{cm}^2/\text{sec}$ (20) とする。

答 : (14.23) を使う。 $R = u_0 b / \nu = 2 \times 3 / 0.010 = 600$, 剥離を起こすときは $A_2 = 2$ であるので

$$\frac{37}{81} - \frac{40}{567} A_2 + \frac{51}{8505} A_2^2 = \frac{8(A_2 + 1)}{3\alpha R}, \quad R = \frac{bu_0}{\nu}$$

これから α を求めると

$$\alpha = 0.0785 = 0.0785 \frac{180}{\pi} = 4.5^\circ \rightarrow 2\alpha = 9.0^\circ$$

14.4 拡大管の剥離点 (乱流の場合)

乱流の場合は「乱流境界層内で大小さまざまなスケールの渦が発生しているため、これらの渦により主流から壁面へエネルギーが活発に運ばれ流速の減速が起こりにくく、乱流境界層は境界層剥離に比べて剥離しにくとされている」ということを脚注に書きました。乱流の場合の理論は不勉強のためここでは省略します (笑)。

15 粘性流の遅い流れ

以上で境界層関係の話題を終えましたので、再びナビエ・ストークス方程式に戻ります。N-S 方程式は慣性項 $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$ があるので簡単には解けないわけですが、遅い流れの近似 (ストークス近似) では慣性項を無視できます。

15.1 ストークス近似

遅い流れでは、慣性項 $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$ は流速の 2 乗程度で速度に比例する粘性項 $(\mu \nabla^2 \mathbf{v})$ と比較して無視できます。ナビエ・ストークスの方程式は

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{K} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v} \quad (15.1)$$

となり、この近似をストークス近似と呼んでいます。慣性項 $\partial \mathbf{v} / \partial t$ のスケールは U^2 / L , 粘性項 $\nu \nabla^2 \mathbf{v}$ のスケールは $\nu U / L^2$ なのでその比 (慣性項 ÷ 粘性項) は $UL / \nu = Re$ となり、ストークス近似はレイノルズ数の小さい流れについて成り立つといえます。

いま、外力が保存力とした場合には $\mathbf{K} = -\nabla \Omega$ というポテンシャル Ω が存在が、これを (15.1) の右辺に入れると

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla \Omega - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla (\rho \Omega + p) + \nu \nabla^2 \mathbf{v} \equiv -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v} \quad (15.2)$$

となるので、 $\rho \Omega + p$ を改めて p とおくと外力 \mathbf{K} を式の上から消すことができます。ということで、以下の議論は外力が存在しない場合について進めることにします。

定常流では $\partial \mathbf{v} / \partial t = 0$ であるので、ストークス近似 (15.2) は外力がない場合

$$\mu \nabla^2 \mathbf{v} = \nabla p \quad (15.3)$$

となります。これは粘性力が圧力と釣り合っていることを表しています。(15.2) の両辺に ∇ をかけ、連続の式 $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ を考慮すると

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla^2 p + \nu \nabla^2 (\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0 \rightarrow \nabla^2 p = 0 \quad (15.4)$$

となって、圧力は調和関数になることがわかります⁴。また、両辺の回転 rot をとると

$$\frac{\partial}{\partial t} \text{rot} \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \text{rot} (\nabla p) + \nu \nabla^2 (\text{rot} \mathbf{v}) \rightarrow \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} = \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega} \rightarrow \nabla^2 \boldsymbol{\omega} = 0 \quad (\text{定常流}) \quad (15.5)$$

⁴ ストークス近似の解を求める手法として、ブログ「TOSHI の宇宙」には圧力のラプラス方程式を真正面から解いていく方法が載っています。 <http://maldoror-ducasse.cocolog-nifty.com/blog/2007/07/index.html>

となって、定常流では渦度も調和関数となります⁵。

ストークス近似の方程式 (15.3) は、線形の微分方程式ですから解の重ねあわせが可能で、この方程式を満足する v, p として

$$\left. \begin{aligned} v &= v_p + v_c, \quad v_p = \nabla(\mathbf{r} \cdot \phi) - 2\phi, \quad v_c = \nabla\psi + \text{rot}\mathbf{A} \\ p &= 2\mu\nabla\phi, \quad \nabla^2\phi = 0, \quad \nabla^2\psi = 0, \quad \nabla^2\mathbf{A} = 0 \\ \phi, \psi, \mathbf{A} &: \text{任意の調和関数} \end{aligned} \right\} \quad (15.6)$$

という一般的な解が考えられます (今井功「流体力学 (前編)」)。ちなみに、これらの解が上式を満足することを確認しておきます。まず、 $\nabla^2\phi = 0$ とすると

$$\begin{aligned} \nabla^2(\mathbf{r} \cdot \phi) &= \nabla \cdot \nabla(\mathbf{r} \cdot \phi) = \nabla(\phi\nabla\mathbf{r} + \mathbf{r}\nabla\phi) = 2\nabla\phi\nabla\mathbf{r} + \phi\nabla^2\mathbf{r} + \mathbf{r}\nabla^2\phi = 2\nabla\phi + \mathbf{r}\nabla^2\phi = 2\nabla\phi \\ \therefore \nabla \cdot v_p &= \nabla^2(\mathbf{r} \cdot \phi) - 2\nabla\phi = 0 \end{aligned}$$

となって v_p は連続の式を満足します。さらに ∇ をかけると

$$\nabla^2 v_p = \nabla\{\nabla^2(\mathbf{r} \cdot \phi)\} - 2\nabla^2\phi = \nabla\{2\nabla\phi\} = 2\nabla^2\phi$$

が得られ、これをストークス近似の式 (15.3) と比較すると (15.3) 成立するためには $p = 2\mu\nabla\phi$ とおけばよいことがわかります。これで (v, p) の 1 組はストークス近似の一つの解を与えることが分かりました。一般解は v_p と v_c の重ね合わせとなりますから

$$v = v_p + v_c \quad (15.7)$$

とおきます。これを連続の式に入れると $\nabla \cdot v = 0$ より $\nabla \cdot v_c = 0$ 、また (15.3) に入れると

$$\mu\nabla^2(v_p + v_c) = \nabla p \longrightarrow \nabla^2 v_c = 0$$

が得られます。ところで任意のベクトルは、ヘルムホルツの定理により、ポテンシャル ψ とベクトルポテンシャル \mathbf{A} を使って

$$v_c = \nabla\psi + \text{rot}\mathbf{A} \quad (15.8)$$

と表せます⁶。いま、 $\nabla v_c = 0$ ですから $\nabla^2\psi = 0$ 、また、 $\nabla^2 v_c = \text{rot}(\nabla^2\mathbf{A}) = 0$ となるので、 $\nabla^2\mathbf{A} = \nabla\chi$ というスカラー関数 χ が存在しますが、ゲージ変換でベクトルポテンシャル \mathbf{A} は $\mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A} + \nabla\Psi$ としても $\text{rot}\mathbf{A}$ には変化はないので、 Ψ をあらかじめ $\nabla^2\Psi = \chi$ を満たすように選んでおくと $\nabla^2\mathbf{A} = \nabla^2\mathbf{A} + \nabla\chi \longrightarrow \nabla^2\mathbf{A} = 0$ となり (15.6) はストークス近似方程式の一般解を与えることがわかります。

ところで、基本解の一つである v_c は実は v_p からでてくる (前記書参照) ので、一般解は v_p だけで十分で、結局 v_p と p がストークス近似の一般解を表すこととなります。

渦度 $\omega = \text{rot}v$ は、

$$\left. \begin{aligned} \omega_p &= \text{rot}v_p = \text{rot}\{\nabla(\mathbf{r} \cdot \phi)\} - 2\text{rot}\phi = -2\text{rot}\phi \\ \omega_c &= \text{rot}v_c = \text{rot}(\nabla\psi) + \text{rot}(\text{rot}\mathbf{A}) = \text{rot}(\nabla\psi) + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) \\ \omega &= \omega_p + \omega_c \\ \nabla^2\omega &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (15.9)$$

で与えられ、定常流れにおける ω は調和関数となります。

さて、 x 軸方向の単位ベクトルを $i(1, 0, 0)$ とし ϕ を特に $i\phi$ とすると⁷

$$\nabla(\mathbf{r} \cdot \phi) = \nabla(x\phi) = x\nabla\phi + \phi i$$

となるので

$$v_p = \nabla(\mathbf{r} \cdot \phi) - 2\phi i = x\nabla\phi - \phi i, \quad p = 2\mu\nabla\phi = 2\mu\frac{\partial\phi}{\partial x} \quad (15.10)$$

⁵ 「NS-方程式のフォロー：例題」問題-5 も参照ください。

⁶ ヘルムホルツの定理。 $\nabla \times (\nabla\psi) = 0$, $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$ で、任意のベクトル場は、スカラーポテンシャルの傾き ∇ で表わされる回転のない場と、ベクトルポテンシャルの回転 rot で表わされる発散のない場に分解できるというもの。

⁷ これは流れを i 方向とするよということですね。 i, j, k の方向は物理的に同等なので、 (x, i) の代わりに (y, j) , (z, k) としたのもストークス近似の解となります。

と表され、流れは x 軸と平行で圧力は x 軸方向の勾配のみをもちます。渦度は

$$\boldsymbol{\omega}_p = \text{rot} \boldsymbol{v}_p = \text{rot}(\nabla(\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{\phi}) - 2\phi \boldsymbol{i}) = -2\text{rot}(\phi \boldsymbol{i}) = -2\boldsymbol{i} \times \nabla \phi \quad (15.11)$$

で表されます。最後の項の \times は外積ですので留意してください。

15.2 ストークス近似の基本解

15.2.1 ストークス源

x 軸方向の一様な流れを考えます。調和関数 ϕ に具体的な関数式を当てはめ、解を具体的に求めていきます。 x 軸を極軸とし、 $\phi = 1/r$ とおいて⁸ (15.10) に入れると、公式

$$\nabla(x/r) = x\nabla(1/r) - (1/r)\boldsymbol{i}, \quad (\boldsymbol{i} \text{ は } x \text{ 軸方向の単位ベクトル})$$

を使って

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v} &= x\nabla\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r}\boldsymbol{i} \\ &= \nabla\left(\frac{x}{r}\right) - \frac{2}{r}\boldsymbol{i} = \nabla \cos \theta - \frac{2}{r}\boldsymbol{i} \end{aligned} \quad (15.12)$$

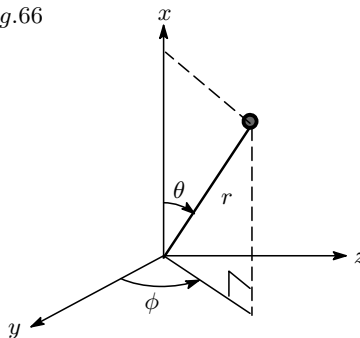
となります。 ∇ と単位ベクトル \boldsymbol{i} を球面座標に変換すると

$$\nabla = \boldsymbol{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \boldsymbol{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \boldsymbol{e}_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}, \quad \boldsymbol{i} = \frac{\boldsymbol{e}_r r \cos \theta}{r} = \boldsymbol{e}_r \cos \theta \quad (15.13)$$

となるので、速度を変換すると

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v} &= \left(\boldsymbol{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \boldsymbol{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \boldsymbol{e}_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \nabla \cos \theta - \boldsymbol{e}_r \frac{2}{r} \cos \theta \\ &= -\boldsymbol{e}_r \frac{2}{r} \cos \theta + \boldsymbol{e}_\theta \frac{1}{r} \sin \theta \end{aligned}$$

Fig.66



となり、速度成分 (v_r, v_θ, v_ϕ) は

$$v_r = -\frac{2}{r} \cos \theta, \quad v_\theta = \frac{\sin \theta}{r}, \quad v_\phi = 0 \quad (15.14)$$

が得られます。一方、圧力 p は

$$p = 2\mu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) = -2\mu \frac{1}{r^2} \frac{x}{r} = -2\mu \frac{\cos \theta}{r^2} \quad (15.15)$$

となります。

⁸ これは流体中に閉曲面として半径 r の球面を考えることになります。

次に応力の分布を調べます。応力のテンソル成分は次のように表されます（第7話の§11.2.2を参照ください。ただし、その脚注に書きましたように、対角成分の式の符号は反転していることに留意。）

$$\left. \begin{aligned} p_{xx} &= -p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}, & p_{yy} &= -p + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}, & p_{zz} &= -p + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \\ \tau_{xy} = \tau_{yx} &= \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right), & \tau_{yz} = \tau_{zy} &= \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right), & \tau_{zx} = \tau_{xz} &= \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \end{aligned} \right\} \quad (15.16)$$

見通しよくするために下添字を x, y, z から i, j, k に替えて $\tau_{xy} = p_{ij}$ と書くようにし、変形速度テンソル $\mathbf{E}(e_{ik})$

$$e_{ik} = \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \quad (i, k = 1, 2, 3) \quad (15.17)$$

を導入します。そうすると上の式は

$$\begin{aligned} p_{11} &= -p\delta_{11} + \mu \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \right) = -p\delta_{11} + \mu e_{11}, & p_{22} &= -p\delta_{22} + \mu \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) = -p\delta_{22} + \mu e_{22} \\ p_{33} &= -p\delta_{33} + \mu \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right) = -p\delta_{33} + \mu e_{33} \\ p_{12} &= \mu \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) = \mu e_{12}, & p_{23} &= \mu \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \right) = \mu e_{23}, & p_{31} &= \mu \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \right) = \mu e_{31} \end{aligned}$$

となり⁹、これらはまとめて次のように簡潔に表現することができます。

$$p_{ik} = -p\delta_{ik} + \mu e_{ik} \quad (15.18)$$

ここで、変形速度テンソル $\mathbf{E}(e_{ik})$ を公式を使って球面座標に変換します¹⁰。いま、 x 軸に沿った一様流を考慮するので、 $v_\phi = 0$ として

$$\left. \begin{aligned} e_{rr} &= 2 \frac{v_r}{r}, & e_{\theta\theta} &= 2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right), & e_{\phi\phi} &= 2 \left(\frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta \cot \theta}{r} \right) \\ e_{r\theta} &= r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta}, & e_{r\phi} &= 0, & e_{\theta\phi} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (15.19)$$

となります。これに (15.14) を入れると

$$\left. \begin{aligned} e_{rr} &= \frac{4}{r^2} \cos \theta & e_{\theta\theta} = e_{\phi\phi} &= -\frac{2}{r^2} \cos \theta \\ e_{r\theta} = e_{r\phi} = e_{\theta\phi} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (15.20)$$

これから (15.18) の応力は

$$\left. \begin{aligned} p_{rr} &= -p + \mu e_{rr} = 2\mu \frac{\cos \theta}{r^2} + \frac{4}{r^2} \cos \theta = 6\mu \frac{\cos \theta}{r^2}, & p_{\theta\theta} = p_{\phi\phi} &= 0 \\ p_{r\theta} = p_{r\phi} = p_{\theta\phi} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (15.21)$$

と求まります。ここで応力の非対角成分である接線応力が現れないという点に注目してください。

原点を中心とした半径 r の球面に働く応力の合計 F を求めてみます。対称性から F は x 成分だけを持つ¹¹ので、その大きさは n を球面上の単位法線ベクトルとすると

$$F_x = \int_0^\pi p_{rr} n dS = \int_0^\pi \frac{6\mu \cos \theta}{r^2} \cos \theta \cdot 2\pi r^2 \sin \theta d\theta = 12\pi\mu \left[-\frac{1}{3} \cos^3 \theta \right]_0^\pi = 8\pi\mu \quad (15.22)$$

となり、 F は半径 r に依存しない値となります。

合力 F は球面に x 軸の負の方向に作用しているわけですが、球面内部には運動量保存則からこの力 F に拮抗す

⁹ δ_{ik} はクロネッカーのデルタ。

¹⁰ 今井功「流体力学（前編）」P404 参照。

¹¹ $y-z$ 水平面と平行な面が球と交わる点での応力の水平成分と垂直成分は一般にはともにゼロではないが、流れが球の中心を通る x 軸に関して軸対称であるので、球面全体のおける水平成分の合力はゼロとなる。

る力が存在しなければなりません。いまの場合、この力は球の原点に集中していると考えることが妥当¹²で、原点に集中している力は流体に対して $-F$ の力を及ぼしていると考えられます。このように、原点に x 軸の負の方向に $8\pi\mu$ の力が作用するとき起こる流れをストークス源 (Stokeslet) による流れといい、ストークス源の強さは $8\pi\mu$ 、方向は x 軸の負の方向をもつということになります。

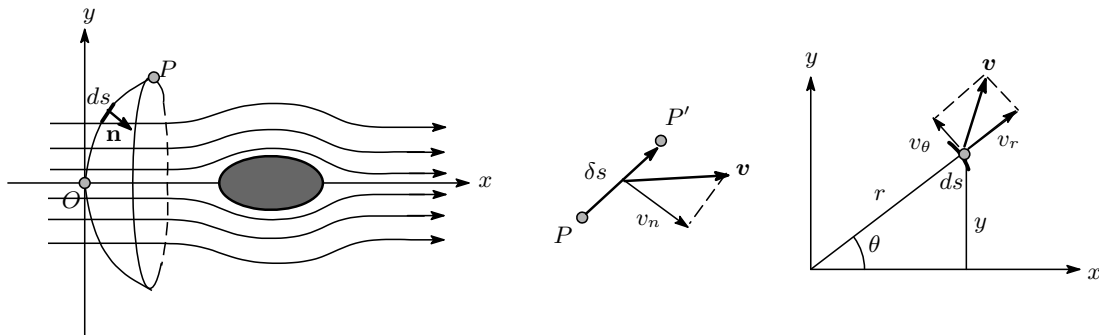
15.2.2 軸対称な流れ – ストークスの流れ関数 –

ストークス源によるストークスの流れ関数を定義していきます。Fig.67 の流れの中に原点 O と流れの中の任意の点 P を結ぶ曲線を考え、この曲線が x 軸周りに回転して得られる回転曲面を横切って左から右に通過する単位時間あたりの流量を $2\pi\Psi(P)$ とすると、第 4 話の §5.1 でやったように

$$2\pi\Psi(P) = \int_O^P v_n \cdot 2\pi y ds = 2\pi \int_O^P v_n y ds \quad (15.23)$$

となって、この値は積分路には無関係で点 P を指定すれば完全に決まります。この $\Psi(P)$ は 2 次元流れでの流れ関数に対応するもので、ストークスの流れ関数 (Stokes's stream function) と呼ばれます。

Fig.67



いま、 P 点のごく近傍に点 P' をとり、流れ関数の変化を考えると

$$\begin{aligned} \delta\Psi &= \Psi(P') - \Psi(P) = \left(\int_O^{P'} - \int_O^P \right) v_n y ds = \int_P^{P'} v_n y ds = v_n y ds \\ \therefore v_n &= \frac{1}{y} \frac{\partial\Psi}{\partial s} \end{aligned} \quad (15.24)$$

という関係が得られます。したがって、速度のある方向の成分を求めるには、それから反時計回りに直角の方向に流れの関数を微分すればいいわけで、速度の x, y 成分 (u, v) は δs を求めるには δs としてそれぞれ $\delta y, \delta x$ を使えばよいことになります。

$$u = \frac{1}{y} \frac{\partial\Psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{1}{y} \frac{\partial\Psi}{\partial x} \quad (15.25)$$

極座標表示では v_r, v_θ に対してそれぞれ δs として $r d\theta, -dr$ を選ぶと (Fig.67 の右図参照)

$$v_r = \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial\Psi}{\partial\theta}, \quad v_\theta = -\frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial\Psi}{\partial r} \quad (15.26)$$

が得られます。また $\Psi(x, y) = \text{const}$ が流線を表すことは 2 次元流れの場合と同じです。(15.26) と (15.14) より

$$\frac{\partial\Psi}{\partial\theta} = r^2 v_r \sin\theta = -2r \sin\theta \cos\theta, \quad \frac{\partial\Psi}{\partial r} = -r v_\theta \sin\theta = -\sin^2\theta$$

ストークス源による流れ関数は、上式を積分して $\theta = 0$ で $\Psi = 0$ (球面が流線) とおくと

$$\Psi = -r \sin^2\theta \quad (15.27)$$

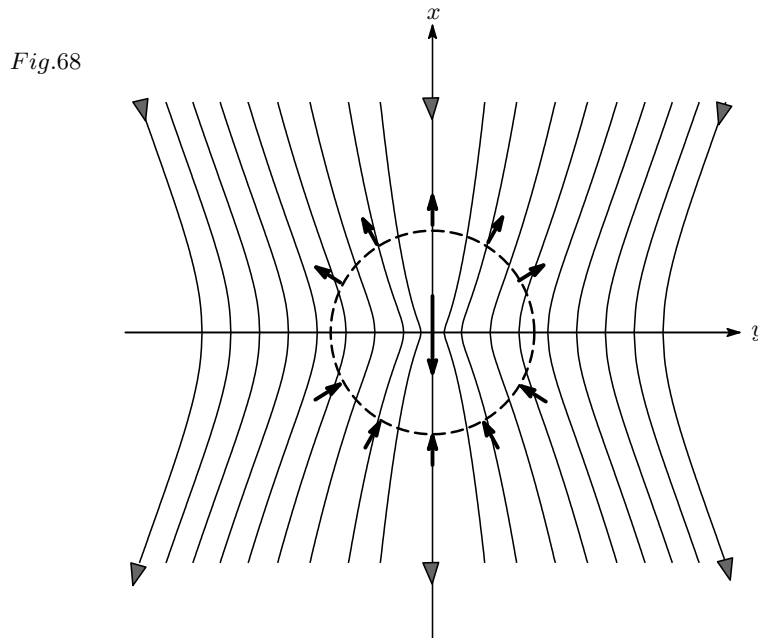
¹² 調和関数 $\phi = 1/r$ は調和関数で原点に特異点を持ちます。もし ϕ が特異点を持たない関数であれば調和関数 p も特異点を持たなくなり、結局物体には力が働かないことになります。

が得られます。この流線の様子を Fig.68 に示します。図の破線の球面上の矢印は球面に働く応力 p_r を示しています。原点にストークス源があり、粘性流体はこの力によって引きずられて動かされる様子が図より伺うことができます。

渦度 $\omega(0, 0, \omega_p)$ は (15.11) より

$$\omega = 2\mathbf{i} \times \nabla\phi = 2\mathbf{i} \times \nabla\left(\frac{1}{r}\right) = -2\mathbf{i} \times \frac{1}{r^2}\mathbf{e}_r = -\frac{2}{r^2}\sin\theta\mathbf{e}_\phi \quad (15.28)$$

ただし、 $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\phi$ は、それぞれ半径方向の単位ベクトル、 ϕ の増す方向の単位ベクトルです¹³。



15.3 一様な流れの中の球（ストークスの抵抗法則）

x 軸方向に一様に流れる流れの中に球をおくと（球の原点は x 軸を通るとします）、球の周りの流れは x 軸に関して軸対称な流れとなります。流れ関数の満たすべき条件は、球の半径を a として

$$\left. \begin{aligned} r = a : \quad \Psi = 0, \frac{\partial\Psi}{\partial r} = 0 : \text{球面上で速度ゼロ} \\ r \rightarrow \infty : \quad \Psi \sim \frac{U}{2}r^2\sin^2\theta : \text{無限遠で一様流速 } U \end{aligned} \right\} \quad (15.29)$$

となります。この条件の意味は次の通りです。条件 の $\Psi = 0$ は球表面が流線を表し、またこれは $\partial\Psi/\partial\theta = 0$ となるので $v_r = 0$ で半径方向の速度はゼロを意味します。次に、 $\partial\Psi/\partial r = -\partial\phi/r\partial\theta = v_\theta$ と表されるので、 $v_\theta = 0$ となり¹⁴、条件 は $r = a$ で $v_r = v_\theta = 0$ という粘着の条件を表している こととなります。

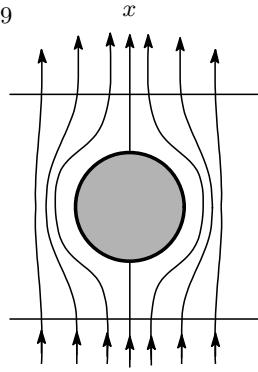
条件 は球のまわりの 3 次元一様流の流れ関数は $\psi = (1/2)U(r^2 - a^3/r)\sin^2\theta$ で表されたので¹⁵、 $r \rightarrow \infty$ では上の表式となります。もちろん、 Ψ はストークス近似の方程式を満たさなければなりません。

¹³ 公式： $\mathbf{i} \times \mathbf{e}_r = \sin\theta\mathbf{e}_\phi$ を使います。

¹⁴ 第 4 話 § 5.2.1 の註 を参照ください。

¹⁵ 第 4 話 § 5.3.1 の [註] 参照。

Fig.69



球のまわりの抵抗：流れが定常であるから，球の上流側と下流側を任意に選んだ水平面に挟まれた領域内の流体がこの領域の外部の流体および球から受ける正味の力はゼロである。

粘性流体の一樣な流れの中に球をおくと，当然球は粘性流体からの抵抗を受けますが，逆に球は流体に対して流れと反対方向に力を及ぼします。

「いま，球の上方と下方に任意の水平面をとり，この間にある流体を考える。流れが定常であるから，この領域内の流体の鉛直方向の運動量は時間的に一定で，この領域内の流体がその境界面の外から受ける正味の力はゼロである（運動量保存則）。言い換えれば，2つの水平面の外側の流体から受ける力と球から受ける力とは大きさが等しく向きが反対である。また，作用反作用の法則から，この領域の流体が球から受ける力と球がこの領域の流体から受ける力も，大きさが等しく向きが反対である。したがって，球が流体から受ける力は，この領域内の流体が2つの水平面の外側の流体から受ける力に等しい。」（木田重雄「なっとくする流体力学」P135より）

つまり，球面内部には作用反作用の法則から力 F に拮抗する力が存在し，この力は球内部の原点に集中していると考えることができます。したがって，球はストークス源と類似した影響をもつと考えることができます。

2次元完全流体の一樣な流れの中におかれた円柱周りの流れは，「一樣流」と「2重湧き出し」の重ね合わせて表されました。3次元完全流体の流れにおいても同様で，球のまわりの流れは3次元一樣流の流れ関数 $\Psi = (1/2)Ur^2 \sin^2 \theta$ と2重湧き出しの流れ関数 $\Psi = -(1/2)Ua^3 \sin^2 \theta / r$ の重ね合わせで表されます。粘性流体の場合も同様に考え，一樣流+2重湧き出しに加え，軸対称な流れに固有のストークス源に相当する流れ関数 $\Psi_e = -r \sin^2 \theta$ を重ね合わせたものと仮定します。

$$\Psi = \frac{U}{2} r^2 \sin^2 \theta + A \frac{\sin^2 \theta}{r} + B \Psi_e, \quad \Psi_e = -r \sin^2 \theta \quad (15.30)$$

係数 A, B は(15.29)の条件より求め，その結果は

$$A = \frac{U}{4} a^3, \quad B = \frac{3}{4} U a$$

となります。一方，条件では， $r \rightarrow \infty$ で $\Psi_e \rightarrow \infty$ の振る舞いが気になりますが，無限遠での速度成分は(15.26)より

$$v'_r = \frac{1}{r \sin^2 \theta} \frac{\partial \Psi_e}{\partial \theta} = -\frac{2}{r} \cos \theta \rightarrow 0 : r \rightarrow \infty, \quad v'_\theta = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Psi_e}{\partial r} = -\frac{1}{r} \sin \theta \rightarrow 0 : r \rightarrow \infty$$

となり，また，この系の流れ関数 Ψ から無限遠での流速(v_r, v_θ)を求めると $v_r = U \cos \theta, v_\theta = U \sin \theta$ が得られ，無限遠では一樣流速 $U (= \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2})$ となり，条件を満たすことがわかります。ということで(15.30)の仮定は妥当と判断できます¹⁶。

以上整理すると，流れ関数と速度成分を表す式は

$$\Psi = \frac{U}{2} \left(r^2 - \frac{3}{2} ar + \frac{a^3}{2r} \right) \sin^2 \theta = \frac{U}{2} (r-a)^2 \left(1 + \frac{a}{2r} \right) \sin^2 \theta \quad (15.31)$$

$$v_r = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = U \left(1 - \frac{3a}{2r} + \frac{a^3}{2r^3} \right) \cos \theta \quad (15.32)$$

$$v_\theta = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial r} = -U \left(1 - \frac{3a}{4r} - \frac{a^3}{4r^3} \right) \sin \theta \quad (15.33)$$

¹⁶ 流れ関数にストークス源に相当する Ψ_e を加えない場合は条件の $\partial \Psi / \partial t = 0$ を満たさないことに注意してください。

となります。

[註] 直角座標での成分速度は次式となります。

$$\left. \begin{aligned} u &= \left\{ \frac{3ax^2}{4r^3} \left(\frac{a^2}{r^2} - 1 \right) - \frac{a}{4r} \left(3 + \frac{a^2}{r^2} \right) + 1 \right\} U \\ v &= -\frac{3axy}{4r^3} \left(\frac{a^2}{r^2} - 1 \right) U \\ w &= -\frac{3axz}{4r^3} \left(\frac{a^2}{r^2} - 1 \right) U \end{aligned} \right\} \quad (15.34)$$

次に球面上の応力分布を調べます。(15.19) に (15.32)(15.33) を入れると

$$e_{r\theta} = -\frac{3U}{2a} \sin \theta, \quad e_{rr} = e_{\theta\theta} = e_{\phi\phi} = e_{r\phi} = e_{\theta\phi} = 0$$

となり、摩擦応力は

$$p_{r\theta} = \mu e_{r\theta} = -\frac{3\mu U}{2a} \sin \theta \quad (15.35)$$

だけとなります。完全流体の場合には円柱(球)が流体から受ける圧力の合計はゼロでした¹⁷。つまり一様流れや2重湧き出しは渦なし流れで球に圧力を及ぼさず、この系の場合はストークス源による圧力(15.15)だけを考えればよいこととなります。ということで、 $B\Psi_e$ に対するものとして

$$p = -2\mu B \frac{\cos \theta}{r^2} \quad (15.36)$$

を考えればよいこととなります。球の表面での法線応力は

$$p_{rr} = -p + \mu e_{rr} = \frac{3\mu U}{2a} \cos \theta \quad (15.37)$$

で、接線応力は

$$p_{r\theta} = \mu e_{r\theta} = -\frac{3\mu U}{2a} \sin \theta \quad (15.38)$$

となります。

球に作用するこれらの応力の合力を求めると、円環の微小面積を dS とし $dS = 2\pi a^2 \sin \theta d\theta$ なので、法線応力と接線応力の合力の大きさはそれぞれ

$$D_p = \int p_{rr} \cos \theta dS = \frac{3\mu U}{2a} \cdot 2\pi a^2 \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = 2\pi \mu a U \quad (15.39)$$

$$D_f = - \int p_{r\theta} \sin \theta dS = \frac{3\mu U}{2a} \cdot 2\pi a^2 \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = 4\pi \mu a U \quad (15.40)$$

となります。 D_p , D_f はそれぞれ圧力抵抗 (pressure drag), 摩擦抵抗 (frictional drag) と呼ばれます。全抵抗はこれらの和ですので

$$D = D_p + D_f = 6\pi \mu a U \quad (15.41)$$

が得られます。これが「遅い流れの中におかれた球が受ける抵抗は、流速、球の半径と粘性係数のそれぞれに比例する」というストークスの抵抗法則として知られているものです。

D を運動エネルギーで無次元化し、投影面積 S (球の断面積) あたりの抵抗係数 C_D を

$$C_D = \frac{D}{(1/2)\rho U^2 S}, \quad S = \pi a^2 \quad (15.42)$$

で定義すると、

$$C_D = \frac{24}{Re}, \quad Re = \frac{2aU}{\nu} \quad (15.43)$$

Re は球の直径を代表的な長さとしたときのレイノルズ数で、 Re と C_D の関係が示されればそれはスケールを問わない関係となります。ただし、ストークス近似は Re の小さい場合 ($Re < 1 \sim 2$) にしか適用できないことに

¹⁷ ダランベールのパラドックス。渦なし流れ。

留意が必要です。

《余録》円柱や一般に柱状体に一様流があたる場合の 2 次元な流れに Stokes 近似を適用しても有意義な解が得られないことが知られており (Stokes 自身も注意している), Stokes のパラドックスと呼ばれています。これは, Stokes 近似では R_e の小さい流れについて成立しますが, R_e 数が大きくなると慣性力の影響のために流れの様子が変わるため, 高い R_e 数には適用できません。このあたりの事情をもう少し詳しくみると, 球から十分離れた遠方での流れの慣性項と粘性項を比較すると

$$\left. \begin{array}{l} \text{慣性項: } (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \sim U \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \propto \frac{aU}{r^2} \\ \text{粘性項: } \nu \nabla^2 \mathbf{v} \propto \frac{a\nu U}{r^3} \end{array} \right\} \quad (15.44)$$

で, 慣性項 ÷ 粘性項は rU/ν となり, r が大きくなると慣性項の大きさが粘性項の大きさを超えることとなります。このことは十分遠方での流れに対してはストークス近似が成り立たないことを意味し, 先ほどのパラドックスを生み出すの要因となっています。

この難点を避けるべく, W.Oseen¹⁸ (オセーン) は「Oseen 近似」と呼ばれる, N-S 方程式に対する新しい近似方法を提案しました (1910)。それは流速 \mathbf{v} を一様流の速度 U と物体が存在するために引き起こされる流速 $\mathbf{v}' (r \rightarrow \infty : \mathbf{v}' = 0)$ の和として $\mathbf{v} = \mathbf{v}' + U\mathbf{i}$ とおき, 遅い流れでの N-S の方程式を

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} + U \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial x} = \mathbf{K} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v}' \longrightarrow \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + U \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} = \mathbf{K} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v}', \quad (\mathbf{v}' = \mathbf{v} - U\mathbf{i}) \\ \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \end{array} \right\} \quad (15.45)$$

として, 一様流による慣性項を残した近似式で, これを Oseen 近似と呼んでいます¹⁹。Oseen 近似によれば, 流れ関数は球の近くでは次式で表されます。

$$\Psi = \frac{U}{2} (r-a)^2 \sin^2 \theta \left\{ \left(1 + \frac{3}{16} R_e \right) \left(1 + \frac{a}{2r} \right) - \frac{3}{16} R_e \left(1 + \frac{a}{r} \right)^2 \cos \theta \right\} \quad (15.46)$$

右辺のカッコ内の $(3/16)R_e \sim 0$ とするとストークス近似の流れ関数 (15.31) と一致しますね。

球の受ける抵抗は

$$D = 6\pi\mu a \left(1 + \frac{3}{16} R_e \right) U, \quad C_D = \frac{24}{R_e} \left(1 + \frac{3}{16} R_e \right) \quad (15.47)$$

と得られています²⁰。尚, Oseen の近似式は線形方程式ですが, 解析的な厳密解を求めることは困難とされています²¹。

(余録終り)

(了)

これで第 9 回目を終わります。お疲れ様でした。毎度の注意ですが, 私の理解の浅さにもとづく誤った記述やミススペル等を見つけれられたらご自分で訂正いただくか, お手数でもお気軽にご一報いただくとありがたいです。

学生の頃, 電子の電気素量をはじめて測定したミリカンの油滴実験の話を知ったことがあります, そこでストークスの法則というのを知りました。面白い実験やなあっていう感想とともに妙にストークスの法則が印象に残ったことを憶えています。しかしま, 流体力学の厳密解というのはないものなんですね。だから数値計算が盛んになるのですか。ま。それだけ流れというものは複雑なものということですかね。

さて, 次回はいよいよ第 10 回目, そろそろボロがでないうちに (すでにでているか: 笑い) 切り上げるのが良策だと思いますので, 非圧縮性流体の 3 次元渦無し運動を簡単に触れてこの講話の最終回にしたいと思います。それではまた ~。

¹⁸ Carl Wilhelm Oseen 物理学者, ストックホルム (1879-1944)

¹⁹ Oseen の式はストークスの式よりもやや R_e の大きいところ ($R_e < 5$) まで成り立つことが実験で確かめられています。

²⁰ Goldstein(1929)。 C_D は R_e のべき展開で与えられるが最初の 2 項をとりました。

²¹ Oseen 近似の解の一般的な性質は今井功「流体力学 (前編)」P362~に詳しく載っています。