

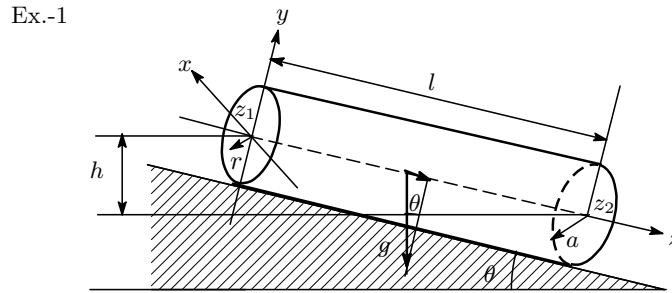
流体力学講話・つまみ食い (N-S 方程式のフォロー：例題)

KENZOU

2008 年 8 月 24 日

♣ 第 7 話で完全流体のオイラーの運動方程式にかわるものとしてナビエ・ストークスの方程式 (N-S 方程式) を話題にしました。そこでは N-S 方程式を使った例題をあまりやりませんでしたのであらためてここで少し例題を見てみることにします。これらの例題の大半は原田幸夫「基礎流体力学・水力学演習」から取り上げたものです。このテキストには演習問題が多く載っていますので、腕を磨きたい方は取っ組み合いをされるのもいいのではないかと (余計な老婆心) 思います。

問題 - 1 : 水平面から θ 傾いた半径 a の円管内を流体が層流状態で定常的に流れているとする。この場合の円管断面における速度分布と流量を求めよ。尚、外力は重力のみとする。



解答：円管の軸心を z 軸，これに垂直に x, y 軸をとる。 x, y 軸方向の流速はゼロであるから $u = 0, v = 0$ で、連続の式 ($\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$) より $\partial w / \partial z = 0$ となり、 w は x, y の関数 $w = w(x, y)$ となります。

N-S の運動方程式は

$$\begin{aligned} x\text{-方向} : 0 &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad \therefore \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ y\text{-方向} : 0 &= -g \cos \theta - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \quad \therefore \frac{\partial p}{\partial y} = -\rho g \cos \theta \\ z\text{-方向} : 0 &= g \sin \theta - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ \therefore \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= \frac{1}{\mu} \left(-\rho g \sin \theta + \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \frac{1}{\mu} \left(-\rho g h / l + \frac{\partial p}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (0.1)$$

(0.1) には $\partial p / \partial z$ の項を除いて変数 z が含まれていないので、 $\partial p / \partial z = \text{const}$ とおけます。 $\partial p / \partial z$ は圧力 p の z 軸方向の勾配ですから、 z_1 で p_1 、 z_2 で p_2 の圧力を示しているとする

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{p_2 - p_1}{z_2 - z_1} = \frac{p_2 - p_1}{l} \quad (0.2)$$

とおくことができます。ということで (0.1) は結局

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{1}{\mu l} (p_2 - p_1 - \rho g h) \quad (0.3)$$

となります。第 7 話 §11.3.3 のハーゲン・ポアゼユ流れのところでやったように (0.3) の左辺を $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ の極座標に変換してやります。また、流れは安定した層流で、渦を巻いて流れるような旋回成分はありませんから $v_\theta = 0$ であることに留意すると (0.3) は

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} = \frac{1}{\mu l} (p_2 - p_1 - \rho g h) \quad (0.4)$$

となります。両辺に r をかけて整理すると

$$r \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\partial w}{\partial r} = \frac{p_2 - p_1 - \rho g h}{\mu l} r \quad (0.5)$$

この式の左辺は

$$r \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w}{\partial r} \right)$$

と纏まるので

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w}{\partial r} \right) &= \frac{p_2 - p_1 - \rho g h}{\mu l} r \rightarrow r \frac{\partial w}{\partial r} = \frac{p_2 - p_1 - \rho g h}{\mu l} \frac{r^2}{2} + c_1 \\ \therefore \frac{\partial w}{\partial r} &= \frac{p_2 - p_1 - \rho g h}{\mu l} \frac{r}{2} + \frac{c_1}{r} \end{aligned}$$

もう1回積分して

$$w = \left(\frac{p_2 - p_1 - \rho g h}{\mu l} \right) \frac{r^2}{4} + c_1 \log r + c_2 \quad (0.6)$$

ここで境界条件により積分定数を決めてやります。円管の中心 $r = 0$ で速度は有限ですが, $\log r$ は無限大となるので, 物理的考察より積分定数 c_1 はゼロでなければなりません。次に壁面 $r = a$ では non-slip 条件により $w = 0$ ですから

$$c_2 = \left(\frac{p_1 - p_2 - \rho g h}{\mu l} \right) \frac{a^2}{4}$$

となります。以上のことから, 鉛管断面における速度分布 $w(r)$ を与える式は

$$w(r) = \frac{(p_1 - p_2) - \rho g h}{4\mu l} (a^2 - r^2) \quad (0.7)$$

となります。また, 流量 Q は単位時間あたりの流速が w なので $Q = w \times \text{面積}$ より

$$Q = \int_0^a w \cdot 2\pi r dr = \frac{(p_1 - p_2) - \rho g h}{8\mu l} \pi a^4 \quad (0.8)$$

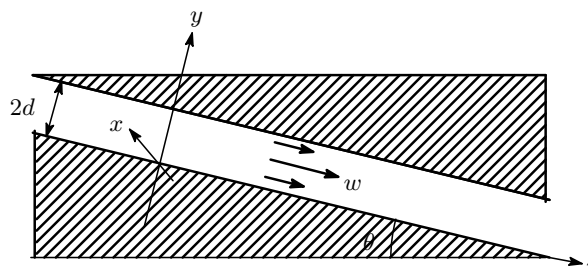
参考までに水平に円管が置かれた場合の速度の分布式と流量の関係式を載せておきます。

$$w(r)_H = \frac{(p_1 - p_2)}{4\mu l} (a^2 - r^2), \quad Q_H = \frac{(p_1 - p_2)}{8\mu l} \pi a^4 \quad (0.9)$$

問題 - 2 : 水平面から θ 傾いた 2 枚の平行平板の間 (間隔 $2d$) を流体が層流状態で定常的に流れているとする。この場合の流路断面での速度分布と圧力分布を求めよ。尚, 流体にかかる外圧 p は $x - z$ 平面上で一定とし, 外力は重力のみとする。

解答 : この問題は円管が平板に置き換わったものですね。座標軸を図.Ex.2 のようにとります。 x, y 軸方向の流速 u, v はゼロなので連続の式 ($\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$) より $\partial w / \partial z = 0$ 。また z 軸方向の流速は位置 x に関して一定だから $\partial w / \partial x = 0$ となります。

Ex.-2



ということで N-S の運動方程式は

$$\begin{aligned} x\text{-方向} : 0 &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad \therefore \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ y\text{-方向} : 0 &= -g \cos \theta - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \quad \therefore \frac{\partial p}{\partial y} = -\rho g \cos \theta \\ z\text{-方向} : 0 &= g \sin \theta - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \end{aligned} \quad (0.10)$$

となります。圧力 p はいまの場合 y のみの関数ですから $\partial p/\partial z = 0$ 。あとは、この微分方程式を non-slip の境界条件 (壁面 $y = 0 : y = 2d$ で $w = 0$) の下で解くことになります。

y -方向の運動方程式より

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -\rho g \cos \theta \longrightarrow p(y) = -\rho g y \cos \theta + c_1$$

$y = 2d$ の面にかかる圧力を p_0 とすると積分定数 c_1 は

$$p_0 = -\rho g 2d \cos \theta + c_1 \longrightarrow \therefore c_1 = p_0 - 2\rho g d \cos \theta$$

これから圧力分布 $p(y)$ は

$$p(y) = p_0 - \rho g (y - 2d) \cos \theta$$

となります。次に z -方向の運動方程式は $\partial p/\partial z = 0$ でしたから

$$\frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + g \sin \theta = 0 \longrightarrow w = -\frac{g}{2\nu} y^2 \sin \theta + c_1 y + c_2, \quad (\nu = \mu/\rho)$$

$y = 0, 2d : w = 0$ の境界条件より $c_1 = g d \sin \theta / \nu, c_2 = 0$ となるので

$$w(y) = \frac{g \sin \theta}{2\nu} y(2d - y) \quad (0.11)$$

となります。

問題 - 3 : 断面が楕円 (長半径 = a , 短半径 = b) の水平管内を粘性流体が安定な層流状態で流れている。このときの断面における速度分布式, 体積流量, 平均流速を求めよ。ただし, 水平管の軸心方向を z 軸とする。

解答 : N-S の運動方程式は

$$x\text{-方向} : 0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad \therefore \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (0.12\text{-a})$$

$$y\text{-方向} : 0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \quad \therefore \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (0.12\text{-b})$$

$$z\text{-方向} : 0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad \therefore \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (0.12\text{-c})$$

連続の式より $\partial w/\partial z = 0$ で w は x, y の関数となり, また (0.12-a)(0.12-b) から圧力 p は z のみの関数となります。これらのことから $\partial p/\partial z = \text{const}$ とおけます (問題 - 1 参照)。

さて, これから (0.12-c) の偏微分方程式を解かなければならないのかと思うと気もへこみますが, 真正面からの攻略をやめて第 7 話の §11.3.3 「ハーゲン・ポアゼイユの流れ」のところで紹介したうまいやり方を使います。楕円管の壁面での点 (x, y) は $x^2/a^2 + y^2/b^2 - 1 = 0$ を満たすので, この境界条件を満足する w の解として

$$w = k(x^2/a^2 + y^2/b^2 - 1)$$

とおきます。これを運動方程式に入れて k を求めるわけで, やってみると

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{2k}{a^2} + \frac{2k}{b^2} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z}, \quad \therefore k = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \left(\frac{1}{2/a^2 + 2/b^2} \right)$$

これを先ほどの式に入れると

$$w = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) \quad (0.13)$$

となって速度分布の式が得られます。

次に体積流量 Q は

$$Q = \iint w \, dx dy = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \iint \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) dx dy$$

ここで 2 重積分を求めていくのに $y = (b/a)y'$ と変数変換し $dy = (b/a)dy'$ として

$$\begin{aligned} \iint \left(\frac{x^2 + y'^2}{a^2} - 1 \right) \frac{b}{a} dx dy' &= \frac{b}{a} \int_0^a \int_0^{2\pi} \left(\frac{r^2}{a^2} - 1 \right) r dr d\theta \\ &= \frac{b}{a} \int_0^a \left(\frac{r^2}{a^2} - 1 \right) 2\pi r dr = -\frac{\pi ab}{2} \end{aligned}$$

左辺から右辺への変形は変数変換 $x = r \cos \theta$, $y' = r \sin \theta$, $dx dy \rightarrow r dr d\theta$ ($0 \leq r \leq a$) をおこないました。したがって求める Q は

$$Q = -\frac{\pi ab}{4\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right) \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \quad (0.14)$$

平均流速 \bar{w} は体積流量を楕円管の面積で割ればよいから

$$\bar{w} = \frac{Q}{\pi ab} = -\frac{1}{4\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right) \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \quad (0.15)$$

となります。

問題 - 4 : 平板に沿って流れている粘性流体の平板近辺の速度分布が $u = u_0 \sin(\pi y/k)$ で示される場合, 平板近辺の垂直応力 σ とせん断応力 τ を求めよ。ただし, y 軸は平板に垂直にとり k は定数とする。

解答 : 垂直応力とせん断応力を与える式は第 7 話の § 11.2.2 にのせました。もう一度のせると

$$\left. \begin{aligned} p_x = \sigma_x = p + \frac{2}{3}\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) - 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \\ p_y = \sigma_y = p + \frac{2}{3}\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) - 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \\ p_x = \sigma_z = p + \frac{2}{3}\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) - 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \\ \tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ \tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ \tau_{zx} = \tau_{xz} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \end{aligned} \right\}$$

いま $u = u_0 \sin(\pi y/k)$ であたえられているので上の式に入れて¹

$$\begin{aligned} \sigma_x = p + \frac{2}{3}\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) - 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} &= p \\ \sigma_y = p + \frac{2}{3}\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) - 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} &= p \\ \sigma_z = p + \frac{2}{3}\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) - 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} &= p \\ \tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= \mu u_0 (\pi/k) \cos(\pi y/k) \\ \tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) &= 0 \\ \tau_{zx} = \tau_{xz} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) &= 0 \end{aligned}$$

問題 - 5 : 2次元非圧縮性粘性流体の流れにおいて慣性力と外力がそれぞれゼロとみなせる場合, 静圧 p は調和関数となることを示せ。

解答 : N-S 方程式は

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \end{aligned}$$

慣性項と外力をゼロとして, 連続の式 ($\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$) を使い上式を整理すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = \mu \nabla^2 u \longrightarrow \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \mu \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 u) = \mu \nabla^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) = \mu \nabla^2 v \longrightarrow \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = \mu \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 v) = \mu \nabla^2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ \therefore \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} &= \nabla^2 p = \mu \nabla^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \end{aligned} \quad (0.16)$$

¹ 第 7 話の脚注にも書きましたように通常 $\sigma_x = -p$ とマイナスをつけます。ここでは行きがかり上そうしていませんけど。。。

となり, 圧力は調和関数 ($\nabla^2 p = 0$) となります。このことは「遅い流れ」でのストークス近似 (Stokes Approximation) のところで活用されます。

問題 - 6 : 2次元非圧縮性粘性流体において次の「渦度輸送方程式」(Vorticity Transport Eq) を導出せよ。

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} = \frac{\mu}{\rho} (\nabla^2 \zeta) \quad (0.17)$$

解答 : 2次元流れでの渦度 ζ は

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

で定義されました。N-S 方程式は外力がないとして

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 u \quad (0.18-a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 v \quad (0.18-b)$$

(0.19) を y で微分し連続の式 ($\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$) を使って整理すると

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) + u \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) + u \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 u) \end{aligned} \quad (0.19)$$

同様に (0.20) を x で微分し連続の式を使って整理すると

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) + v \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + u \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 v) \quad (0.20)$$

(0.20) から (0.19) を差し引いて

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + v \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ \therefore & \frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} = \frac{\mu}{\rho} (\nabla^2 \zeta) \end{aligned} \quad (0.21)$$

が得られます。(0.21) の左辺の第2項, 第3項は対流項²ですね。ということで, 左辺は渦度の時間的, 空間的な変化を示し, 右辺は粘性による渦度の拡散 (渦は粘性の影響で拡散消滅していく) を示しています。この方程式は渦度輸送方程式 (vorticity transport eq.) と呼ばれます。ラグランジュ微分を使って書くと

$$\frac{D\zeta}{Dt} = \frac{\mu}{\rho} (\nabla^2 \zeta) = \frac{1}{Re} (\nabla^2 \zeta) \quad (0.22)$$

となります。流体運動による渦度の変化は粘性による渦度の拡散に等しいということが一目瞭然にわかりますね。また, 拡散係数はレイノルズ数 (Re) の逆数となるので, レイノルズ数が小さいほど (粘性力が大きいほど) 渦度の拡散が大きくなることがわかります。

定常的な流れでは $D\zeta/Dt = 0$ となりますから³,

$$\nabla^2 \zeta = 0 \quad (0.23)$$

となって, 渦度は調和関数となります。このことも「遅い流れ」でのストークス近似 (Stokes Approximation) のところで活用されますので頭に入れておいてください。

ところで, 渦度輸送方程式は ζ, u, v の3変数で構成されており, このままでは方程式が解けません。そこで流れ関数 ψ で速度 u, v を関係付け, 変数の数を減らす細工をします。流れ関数と速度 u, v の関係は

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

² 慣性項ともいいました。

³ 定常的な流れは, 渦なしか渦はあっても渦度の時間変化がない流れですね。

ですから，渦度 ζ は

$$\zeta = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\nabla^2 \psi \quad (0.24)$$

また (0.21) は

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial y} = \frac{\mu}{\rho} (\nabla^2 \zeta) \quad (0.25)$$

と表すことができるので (0.24) と (0.25) とで ζ と ψ の 2 元連立方程式となり，解を求めることが可能となります⁴。

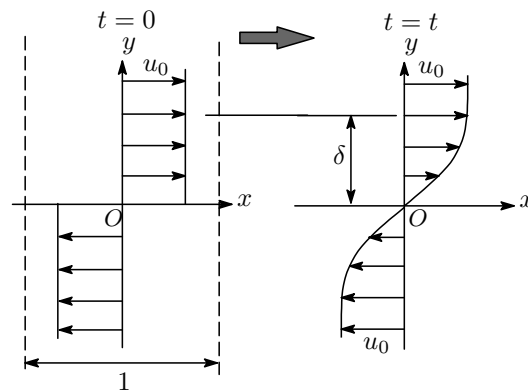
問題 - 7 : 時刻 $t = 0$ で x 軸を境として $y > 0$ では $u = u_0$ ， $y < 0$ では $u = -u_0$ なる渦の流れがある。渦の拡散により時間 t 経過後の速度を求めよ。

解答 : u_0 は x には無関係でまた静圧 p はいつて， $v = 0$ とすると N-S 方程式は

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (\nu = \frac{\mu}{\rho}) \quad (0.26)$$

と 1 次元拡散方程式となります。拡散方程式の解き方は偏微分方程式のテキストに載っていますが⁵，ついでですから手を抜かずに (笑い) フォローしていくこととします。変数分離法で解いていきます。

Ex - 7



$y = 0 \sim y = \delta$ までの速度分布

$$\frac{u}{u_0} = \frac{3}{2} \left(\frac{y}{\delta}\right) - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta}\right)^3$$

$u(t, y) = f(t)g(y)$ とおいて (0.26) に入れると

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{df}{dt} g(y) = \nu f(t) \frac{d^2 g}{dy^2} \longrightarrow \frac{1}{f(t)} \frac{df}{dt} = \nu \frac{1}{g(y)} \frac{d^2 g}{dy^2} \quad (0.27)$$

この式の左辺は t だけの関数で，右辺は y だけの関数です。 t と y は独立な変数ですから，この式が成り立つためには左右両辺が定数でなければなりません。そこでこの定数を $-\nu\mu^2$ とおいてやると

$$\frac{1}{f(t)} \frac{df}{dt} = -\nu\mu^2 \longrightarrow d(\ln f(t)) = -\nu\mu^2 dt \longrightarrow f(t) = f(0)e^{-\nu\mu^2 t}$$

$$\frac{d^2 g}{dy^2} + \mu^2 g(y) = 0 \longrightarrow g(y) = B(\lambda) \cos[\mu(y - \lambda)]$$

$$\therefore u(t, y) = f(0)B(\lambda)e^{-\nu\mu^2 t} \cos[\mu(y - \lambda)] \quad (0.28)$$

と常微分方程式の解が得られます。一般解は重ね合わせの原理より， $B(\lambda)$ ， μ ， λ のすべての可能な値について加え合わせた

$$u(t, y) = \int_0^\infty d\mu \int_{-\infty}^\infty f(0)B(\lambda)e^{-\nu\mu^2 t} \cos[\mu(y - \lambda)] d\lambda \quad (0.29)$$

で与えられます。 $t = 0$ とおくと

$$u(0, y) = \{u_0\} = \xi(y) = \int_0^\infty d\mu \int_{-\infty}^\infty f(0)B(\lambda) \cos[\mu(y - \lambda)] d\lambda \quad (0.30)$$

⁴ このやり方は「渦度 - 流れ関数法」と呼ばれています。

⁵ 例えば，古屋茂「新版微分方程式入門」サイエンス社，杉山昌平「偏微分方程式例題演習」森北出版，等。

ここで $\{u_0\}$ としたのは y の正負で u_0 の正負が決まることを意味するために入れました。フーリエの積分定理によれば

$$\xi(y) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\mu \int_{-\infty}^{\infty} \xi(\lambda) \cos[\mu(y - \lambda)] d\lambda \quad (0.31)$$

が成り立つので (0.30) と (0.31) を比較すると

$$f(0)B(\lambda) = \frac{\xi(\lambda)}{\pi} \quad (0.32)$$

これを (0.29) に入れ、公式

$$\int_0^{\infty} e^{-a^2 x^2} \cos(\alpha x) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} e^{-\alpha^2/4a^2}$$

を使うと

$$u(t, y) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\mu \int_{-\infty}^{\infty} \xi(\lambda) e^{-\nu\mu^2 t} \cos[\mu(y - \lambda)] d\lambda = \frac{1}{2\sqrt{\nu\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \xi(\lambda) \exp\left[-\frac{(y - \lambda)^2}{4\nu t}\right] d\lambda$$

が得られます。ここで (0.30) を考慮し、 $t = 0 : y > 0, u = u_0, y < 0, u = -u_0$ の条件を (0.33) に入れると

$$u(t, y) = \frac{1}{2\sqrt{\nu\pi t}} \left\{ -\int_{-\infty}^0 u_0 \exp\left[-\frac{(y - \lambda)^2}{4\nu t}\right] d\lambda + \int_0^{\infty} u_0 \exp\left[-\frac{(y - \lambda)^2}{4\nu t}\right] d\lambda \right\} \quad (0.33)$$

$(y - \lambda)/\sqrt{4\nu t} = \beta$ とおくと $d\lambda = -\sqrt{4\nu t} d\beta$, $\lambda = -\infty \rightarrow \beta = \infty$, $\lambda = 0 \rightarrow \beta = y/\sqrt{4\nu t}$, $\lambda = \infty \rightarrow \beta = -\infty$ となるので

$$\int_{-\infty}^0 \exp\left[-\frac{(y - \lambda)^2}{4\nu t}\right] d\lambda = \sqrt{4\nu t} \int_{y/\sqrt{4\nu t}}^{\infty} e^{-\beta^2} d\beta = \sqrt{4\nu t} \left\{ \int_0^{\infty} e^{-\beta^2} d\beta - \int_0^{y/\sqrt{4\nu t}} e^{-\beta^2} d\beta \right\} \quad (0.34)$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \exp\left[-\frac{(y - \lambda)^2}{4\nu t}\right] d\lambda &= -\sqrt{4\nu t} \int_{y/\sqrt{4\nu t}}^{-\infty} e^{-\beta^2} d\beta = \sqrt{4\nu t} \int_{-\infty}^{y/\sqrt{4\nu t}} e^{-\beta^2} d\beta \\ &= \sqrt{4\nu t} \left\{ \int_{-\infty}^0 e^{-\beta^2} d\beta + \int_0^{y/\sqrt{4\nu t}} e^{-\beta^2} d\beta \right\} \\ &= \sqrt{4\nu t} \left\{ \int_0^{-\infty} e^{-\beta^2} d\beta + \int_0^{y/\sqrt{4\nu t}} e^{-\beta^2} d\beta \right\} \end{aligned} \quad (0.35)$$

これを (0.33) に入れると

$$u(t, y) = \frac{2u_0}{\sqrt{\pi}} \int_0^{y/\sqrt{4\nu t}} e^{-\beta^2} d\beta = u_0 \operatorname{Erf}(y/\sqrt{4\nu t}) \quad (0.36)$$

と求まりました。ここで Erf は

$$\operatorname{Erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \quad (0.37)$$

で定義される誤差関数と呼ばれる関数です。下図は $u(t, y)$ をグラフに描いたもので、 $u_0 = 1$ として縦軸は $u(t, y)$ 、横軸は $y/\sqrt{4\nu t}$ を単位にとってあります。この図から一定の y では時間が経過すると急速に u がゼロに近づくことがわかります。

さて、図に描いたように $y = 0$ から $y = \delta$ までの速度分布を

$$\frac{u}{u_0} = \frac{3}{2} \left(\frac{y}{\delta}\right) - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta}\right)^3 \quad (0.38)$$

とおきます。時刻 $t = 0$ における x 方向に長さ 1、紙面に垂直に幅 1、 y 方向に δ の流体の運動量を M_0 と時刻 $t = t$ で滑の層の上半分の厚さが $y = \delta$ になったときの運動量を M_1 とおくと、運動量の単位時間あたりの変化は区間 1、幅 1 の $y = 0$ 面に作用するとせん断応力に等しいこととなります。つまり

$$-\tau_0 = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = \frac{d(M_1 - M_0)}{dt} \quad (0.39)$$

せん断応力の向きは運動量ベクトルと逆向きですのでマイナスをつけました。各運動量はそれぞれ

$$M_0 = \rho u_0 \delta, \quad M_1 = \rho \int_0^\delta u dy, \quad M_1 - M_0 = \rho \int_0^\delta u_0 \left\{ \frac{3y}{2\delta} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right)^3 \right\} - \rho u_0 \delta = -\frac{3}{8} \rho u_0 \delta$$

$$\therefore \frac{d(M_1 - M_0)}{dt} = -\frac{3}{8} \rho u_0 \frac{d\delta}{dt}$$

(0.38)(0.39)(0.40) より

$$\tau_0 = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = \frac{3}{2} \frac{\mu u_0}{\delta} = \frac{3}{8} \rho u_0 \frac{d\delta}{dt}, \quad \therefore \delta d\delta = \frac{4\mu}{\rho} dt = 4\nu dt \quad (0.40)$$

$t = 0 : \delta = 0$ として積分して渦層の厚み 2δ を求めると

$$2\delta = \sqrt{8\nu t} \longrightarrow \delta = \sqrt{2\nu t} \quad (0.41)$$

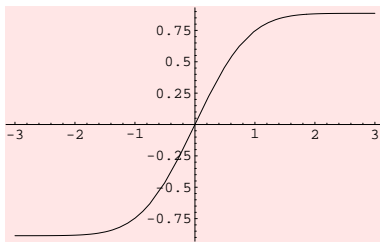


図 1: 渦の拡散

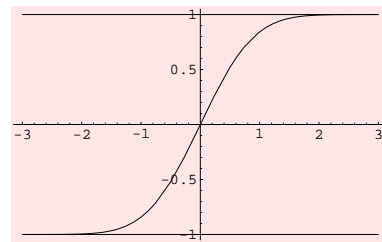


図 2: 渦層の厚み 2δ