

# 駆け足で眺める複素積分

3話で構成しています。ゴールは第3話の「留数定理の定積分への応用」で、第1話、第2話はそこに到るまでの最小の準備を最小の時間で整えられるようにしています(そのつもり)<sup>1</sup>。証明などはほとんどスルーしているので、気になる方は各自調べてください。なお、おかしな議論をしているところがあれば、気軽にご指摘いただけるとありがたい。

2017.4.14 by KENZOU

## 第1話. 微分・積分からコーシーの定理まで

### 1.1 複素関数の微分

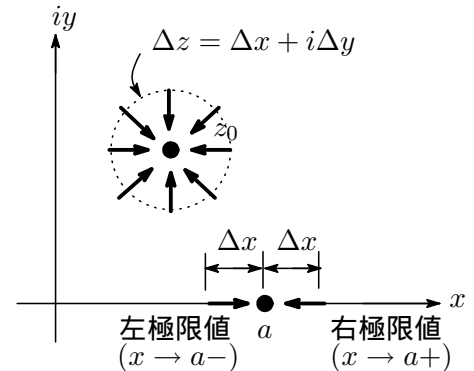
実関数  $f(x)$  の  $x = a$  での微分(微分係数)は

$$f'(a) = \frac{df(x)}{dx} \Big|_{x=a} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} \quad (1.1)$$

で定義され、複素関数  $f(z)$  の  $z = z_0$  での微分も形式的に同じような式で定義されます

$$f'(z_0) = \frac{df(z)}{dz} \Big|_{z=z_0} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \quad (1.2)$$

しかし、2つの定義は根本的に違うという点に注意が必要です。というのは、 $x = a$  の地点へのアプローチは  $x$  軸上(実軸上)の  $x > a$  の地点から  $x = a$  に向かうアプローチと  $x < a$  の地点から  $x = a$  に向かう2つのアプローチしかないのに対して、 $z = z_0$  の地点は複素平面上の点なので、その点に向かうには四方八方無数の方向からのアプローチがあるという点です。



複素関数  $f(z)$  が  $z = z_0$  で微分可能なとき、関数  $f(z)$  は  $z = z_0$  で正則といい、さらに任意の点  $z$  で微分可能な場合、その関数を正則関数といいます。また、1回微分可能であれば何回でも微分可能という、実関数にはない驚くような性質ももっています<sup>2</sup>。正則な複素関数は超滑らかなツルツルの関数ということですね。

関数  $f(z)$  が  $z = z_0$  で正則でないとき、つまり微分できないとき、点  $z_0$  をその関数の特異点といいます。例えば複素関数  $f(z) = 1/(z - 1)$  を微分すると(実関数の微分法と同じ)

$$\frac{df(z)}{dz} = \frac{1}{(z - 1)^2}$$

となります。 $z = 1$  の点では微分が発散し、微分できません。つまり、 $z = x + iy = 1$  より  $x = 1, y = 0$  の点は関数  $f(z)$  の特異点です。

### コーシー・リーマンの関係式

ある複素関数  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  があって、この関数が微分可能かどうか、正則であるか否かの判定は次のコーシー・リーマン<sup>3</sup>(C・Rのと略記)方程式が成立するかどうかで判定できます。

$$\text{C・Rの方程式} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

<sup>1</sup>ここで取り扱う関数は一価関数だけ。

<sup>2</sup>後ほどグルサの公式として登場します。

<sup>3</sup>Cauchy: 1789-1856, 仏の数学者。1813年, コーシーの積分定理は24歳の頃の仕事。Rieman: 1826-1866, 独の数学者。

$f(z) = e^z$  という複素関数は微分可能（正則）かどうかを  $C \cdot R$  の方程式を使って検証してみます。 $e^z$  はオイラーの公式<sup>4</sup>を使って

$$e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y) = u + iv \quad \begin{cases} u = e^x \cos y \\ v = e^x \sin y \end{cases}$$

と展開できるので

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= e^x \cos y, & \frac{\partial v}{\partial y} &= e^x \cos y, & \therefore \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -e^x \sin y, & -\frac{\partial v}{\partial x} &= -e^x \sin y, & \therefore \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned}$$

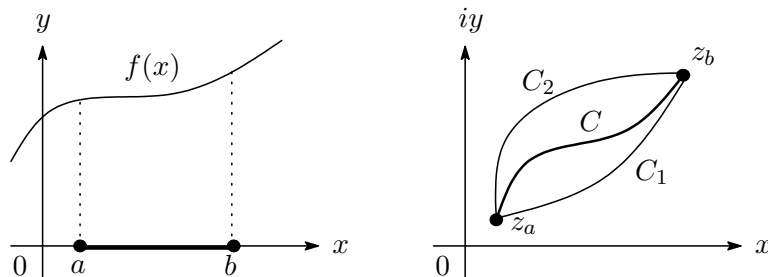
となり,  $C \cdot R$  の方程式を満たすので正則な関数であることが分かります。 $f(z) = x^2 + iy$  はどうでしょうか。この関数は  $C \cdot R$  の方程式を満たさないなので正則ではありません。

## 1.2 複素関数の積分

実関数の積分と複素関数の積分の違いを見るために 2 つの積分を並べて書くと

$$\begin{cases} \text{実関数の積分} & : \int_a^b f(x)dx \\ \text{複素関数の積分} & : \int_c f(z)dz \end{cases}$$

実関数の場合,  $x$  軸上の点  $a$  を始点として終点  $b$  までの区間  $[a, b]$  としています。複素関数の場合, 始点  $z_a$ , 終点  $z_b$  として  $\int_{z_a}^{z_b} f(z)dz$  と表してもよさそうに思えますが, それだけでは十分ではないのです。



つまり, 始点  $z_a$  から終点  $z_b$  に到る経路が無数にあるわけで, どの経路をとるのかを指定しなければなりません。いわゆる線積分ですね。積分記号の  $\int_C$  は経路  $C$  を指定しますという意味が込められているわけで, この経路を積分経路といいます。実積分で  $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$  であったように, 複素積分でも逆向き経路を  $-C$  とすると

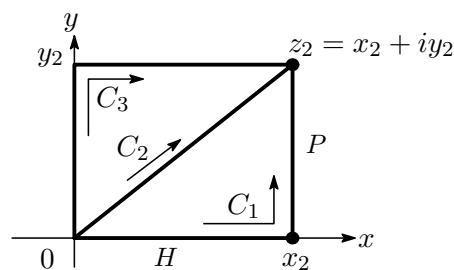
$$\int_{-C} f(z)dz = -\int_C f(z)dz \quad (1.3)$$

となります。

$f(z)$  が正則関数であればその積分値は経路に無関係という特長を持ちます。この一般的な証明はコーシーの積分定理 (1.3 節参照) を使って容易にできますが, ここでは具体的な例で確認しておきます。

<sup>4</sup> $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$

正則関数を  $f(z) = z$  とし, 積分経路を右図のように  $C_1, C_2, C_3$  と3つの異なる経路とします。経路  $C_1$  は原点から  $x$  軸上の  $x_2$  までの水平経路 ( $H$ ) とそこから終点  $z_2$  までの垂直経路 ( $P$ ) からなるので



$$\begin{aligned} \int_{C_1} z dz &= \int_H z dz + \int_P z dz \\ &= \int_0^{x_2} x dx + i \int_0^{y_2} (x_2 + iy) dy \quad (P : dz = idy) \\ &= \frac{1}{2}(x_2 + iy_2)^2 = \frac{1}{2}z_2^2 \end{aligned}$$

次に経路  $C_2$  は直線  $y = (y_2/x_2)x$  で与えられるので

$$\begin{aligned} z = x + iy &= x + i \frac{y_2}{x_2} x = \left(1 + i \frac{y_2}{x_2}\right) x, \quad dz = \left(1 + i \frac{y_2}{x_2}\right) dx \\ \int_{C_2} z dz &= \int_0^{x_2} \left(1 + i \frac{y_2}{x_2}\right)^2 dx = \frac{1}{2}(x_2 + iy_2)^2 = \frac{1}{2}z_2^2 \end{aligned}$$

最後に, 経路  $C_3$  の場合は

$$\begin{aligned} \int_{C_3} z dz &= \int_H z dz + \int_P z dz = \int_0^{y_2} (iy)(idy) + i \int_0^{x_2} (x + iy_2) dy \\ &= \frac{1}{2}(x_2 + iy_2)^2 = \frac{1}{2}z_2^2 \end{aligned}$$

いずれの経路をとっても積分値は同じ値になります。正則関数の積分値は経路に無関係なのです。

上の例は経路が簡単なケースでしたが, もっと一般的な経路を考える場合には経路上の複素数  $z$  をパラメーター表示してやると便利です。  $z = z(t)$  ( $a \leq t \leq b$ ),  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  とすると

$$\int_C f(z) dz = \int_C (u + iv)(dx + idy) = \int_C (u dx - v dy) + i \int_C (v dx + u dy)$$

また,

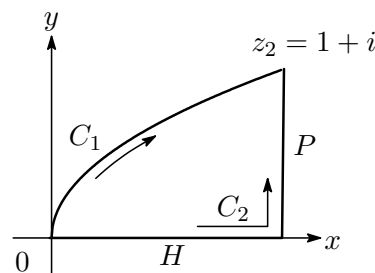
$$\frac{dz(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt} + i \frac{dy(t)}{dt} \quad \therefore \frac{dz}{dt} dt = dx + idy$$

より

$$\int_C f(z) dz = \int_a^b f(z(t)) \frac{dz(t)}{dt} dt \quad (1.4)$$

と表せます。

それでは経路をパラメーター表示した積分を考えましょう。原点から  $z_2 = 1 + i$  に至る経路  $C_1, C_2$  に沿って関数  $f(z) = \bar{z}$  (非正則関数)<sup>5</sup> を積分します。経路  $C_1$  は放物線  $x = y^2$  の一部としました。  $C_1$  をパラメータ表示すると,  $x(t) = t^2, y(t) = t$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) となるので,  $z(t) = x(t) + iy(t) = t^2 + it$  と書けます。これから



$$\frac{dz}{dt} = 2t + i$$

<sup>5</sup>C.R の関係式が成り立たない。

また,  $f(z) = \bar{z}(t) = x(t) - iy(t) = t^2 - it$  であるので

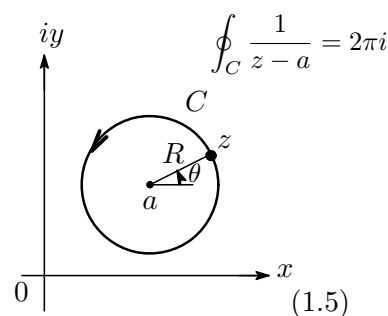
$$\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_1} \bar{z}dz = \int_0^1 (t^2 - it)(2t + i)dt = 1 - \frac{i}{3}$$

次に経路  $C_2$  ですが, 水平経路と垂直経路の2つに分け, 水平経路は  $x = t, y = 0 (0 \leq t \leq 1)$ , 垂直経路は  $x = 1, y = t (0 \leq t \leq 1)$  となるので

$$\int_{C_2} \bar{z}dz = \int_H \bar{z}dz + \int_P \bar{z}dz = \int_0^1 tdt + \int_0^1 i(1 - it)dt = 1 + i$$

となります。今回のケースでは経路により積分値は異なりました。これは関数  $f(z) = \bar{z}$  が非正則関数だからなのです。非正則関数の積分は経路によって積分値が異なります。

積分経路に半径  $R$  の閉曲線を考えるケースがこれからしばしば登場しますので, 最後にやっておきます。  $f(z) = (z - a)^n$  で右図の経路  $C$  (半径  $R$  の反時計まわりの閉曲線) に沿った積分を考えます。閉曲線を一周する積分なので  $\int_C$  という積分記号の代わりに  $\oint_C$  で表します。  $n \geq 0$  の場合は  $f(z)$  は正則関数です。経路  $C$  上の点  $z$  をパラメータ  $\theta (0 \leq \theta \leq 2\pi)$  を使って表すと



$$z = z_0 + R(\cos \theta + i \sin \theta) = z_0 + Re^{i\theta}$$

$$\frac{dz}{d\theta} = iRe^{i\theta}$$

$$(1.5)$$

$$(1.6)$$

となるので

$$I = \oint_C (z - a)^n dz = i \int_0^{2\pi} R^{n+1} e^{i(n+1)\theta} d\theta$$

$n$  をケースに分けて積分すると

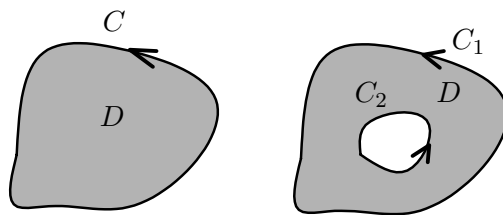
$$\begin{cases} n \neq -1 & I = R^{n+1} \frac{1}{n+1} [e^{i(n+1)\theta}]_0^{2\pi} = 0 \\ n = -1 & I = \oint_C \frac{1}{z-a} dz = i \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i \end{cases} \quad (1.7)$$

となります。この積分値は半径  $R$  を含んでいません。ということで, 点  $z_0$  を中心とした任意の半径の円を経路に選んでも同じ値をとります<sup>6</sup>。

### 1.3 コーシーの積分定理

『関数  $f(z)$  が閉曲線  $C$  と  $C$  の内部の領域  $D$  で正則であるなら  $C$  に沿っての周回積分は 0 になる』

$$\oint_C f(z)dz = 0 \quad (1.8)$$



これをコーシーの積分定理と呼んでいます。ただし, 領域  $D$  内の 1 点でも正則でない点があれば, (1.8) が成立する保証

はありません。これははじめて勉強したときは正直ビックリしました。実関数の積分にはない不思議な

<sup>6</sup>実は円に限らず  $z_0$  を囲む任意の閉曲線を経路としても (1.7) と同じ値をとります。

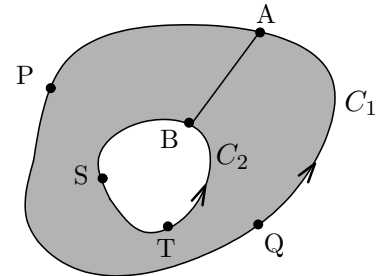
魅力を感じたものです。

コーシーの積分定理から次のことが言えます。関数  $f(z)$  が領域  $D$  で正則であるなら,  $D$  内の2つの閉曲線を  $C_1, C_2$  としたとき, 次式が成立します (いずれも反時計方向に周回)。

$$\oint_{C_1} f(z)dz = \oint_{C_2} f(z)dz \quad (1.9)$$

この証明はとくに難しくないののでやっておきます。

右図をご覧ください。閉曲線  $C_1$  と  $C_2$  は2点 A, B で結ばれています。閉曲線 APQABSTBA (周回経路に注意!) を考えると, コーシーの定理より



$$\oint_{APQABSTBA} f(z)dz = 0$$

積分の周回経路を分解すると

$$\oint_{APQA} f(z)dz + \int_{AB} f(z)dz + \oint_{BTSA} f(z)dz + \int_{BA} f(z)dz = 0 \quad (1.10)$$

ところが,

$$\oint_{APQA} f(z)dz = \oint_{C_1} f(z)dz, \quad \oint_{BTSA} f(z)dz = \oint_{-C_2} f(z)dz = -\oint_{C_2} f(z)dz$$

$$\int_{BA} f(z)dz = -\int_{AB} f(z)dz$$

なので, 結局 (1.10) は

$$\oint_{C_1} f(z)dz - \oint_{C_2} f(z)dz = 0 \quad \therefore \oint_{C_1} f(z)dz = \oint_{C_2} f(z)dz \quad //$$

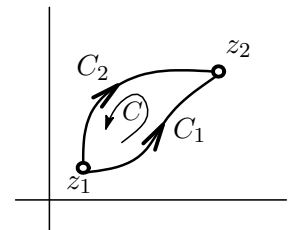
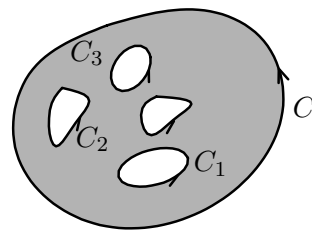
この結果を下の左の図のようなケースに拡張すると

$$\oint_C f(z)dz = \oint_{C_1} f(z)dz + \oint_{C_2} f(z)dz + \dots + \oint_{C_n} f(z)dz \quad (1.11)$$

が得られます。

最後に『正則な領域では積分の経路をどのように変形してもその値は変わらない。いいかえると被積分関数が正則である限り積分経路は自由に变形できる』ということを証明しておきます。

始点  $z_1$  から終点  $z_2$  に到る2つの経路を  $C_1, C_2$  とし, 次の2つの積分を考えます。



$$I_1 = \int_{C_1} f(z)dz, \quad I_2 = \int_{C_2} f(z)dz$$

$C_2$  の逆経路を  $-C_2$  と書くと

$$-I_2 = \int_{-C_2} f(z)dz$$

経路  $C_1 + (-C_2)$  をとると閉曲線  $C$  となるので, コーシーの積分定理より

$$I_1 - I_2 = \oint_C f(z)dz = 0 \quad \therefore I_1 = I_2$$

つまり, 被積分関数  $f(z)$  が正則である限り, 積分経路は自由に变形できることとなります。

## 1.4 コーシーの積分表示

関数  $f(z)$  が閉曲線  $C$  で囲まれた領域  $D$  で正則であるなら,  $D$  内の任意の点  $a$  に対して

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z-a} dz \quad (1.12)$$

が成り立つ。これをコーシーの積分表示といいます。(1.12) を  $a$  について微分すると

$$f'(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^2} dz$$

もう一回微分すると

$$f''(a) = \frac{2}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^3} dz$$

さらに繰り返し微分していくと,  $n$  階の微分係数は

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz \quad (1.13)$$

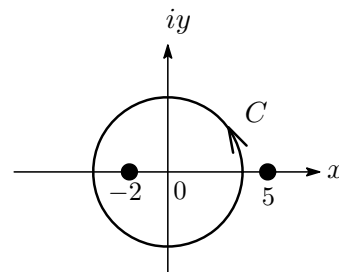
与えられます。(1.13) をグルサ<sup>7</sup>の公式といい, 正則な関数は 1 回でも微分可能であれば何回でも微分可能という正則関数の驚くべき性質を表わしています。

経路  $C$  を  $|z| = 4$  として次の積分を求めてみます。

$$I = \oint_C \frac{z}{(z+2)(z-5)} dz \quad (1.14)$$

点  $z = -2$  は  $C$  の内部にあり, 点  $z = 5$  は  $C$  の外部にあるので, 関数  $f(z) = \frac{z}{z-5}$  は  $C$  の内部で正則です。したがって

$$\oint_C \frac{1}{z+2} \left( \frac{z}{z-5} \right) = 2\pi i f(-2) = \frac{4}{7}\pi i$$



\*\*\*\* お疲れさまでした。少し盛りだくさんでしたが第 1 話はこれで終了です。\*\*\*\*

<sup>7</sup>Edouard Goursat : 1858-1936, 仏の数学者。

## 第2話. テイラー展開・ローラン展開と留数定理

### 2.1 特異点

本論に入る前に少し特異点について触れておきます。複素関数  $f(z)$  が正則でない点を特異点としました。特異点は大まかに次の2種類に分類できます。

- 集積特異点
- 1 点に孤立した特異点

この中の孤立特異点はさらに次のように分類されます。

$$\text{孤立特異点} \left\{ \begin{array}{l} \text{除去可能な特異点} \\ \text{極} \\ \text{真性特異点} \\ \text{分岐点} \end{array} \right.$$

特異点の細かな話はスルーして手短かに説明しておきます<sup>8</sup>。関数  $f(z)$  が  $z = a$  のまわりで  $\frac{1}{(z-a)^N}$  のように振る舞うとき、 $a$  を関数  $f(z)$  の  $N$  位の極といいます ( $N$  は正の整数)。また、関数  $f(z)$  が  $z = a$  で正則ではないが、 $\lim_{z \rightarrow a} f(z)$  が存在するとき、 $z = a$  を除去可能な特異点とといいます。例えば、関数  $f(z) = \frac{z}{e^z - 1}$  は  $z = 0$  の特異点をもちますが、次のように  $z \rightarrow 0$  の極限值が存在します。

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{e^z - 1} = 1$$

そこで、特異点  $z = 0$  での関数  $f(z)$  の値をあらためて  $f(0) = 1$  と定義しなおすことで  $z = 0$  の特異点を取り除くことができます。真性特異点は「極」でも「除き得る特異点」でもない特異点です<sup>9</sup>。

### 2.2 テイラー展開

領域  $D$  で正則な関数  $f(z)$  を考えます。 $D$  内の任意の点  $a$  を中心として領域  $D$  内に半径  $R$  の円を考えると、この円の内部に含まれる任意の点  $z$  について  $f(z)$  は次のようなべき級数に展開できます<sup>10</sup>。

$$f(z) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(z-a) + \frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n \quad (2.1)$$

展開係数  $A_n$  は

$$A_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz \quad (2.2)$$

とも表されま<sup>11</sup>す。(2.1) を関数  $f(z)$  のテイラー展開<sup>12</sup>とといいます。なお、 $a=0$  の場合はともいう。

$$f(z) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}z + \frac{f''(0)}{2!}z^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n \quad (2.3)$$

べき級数が収束する領域の最大半径  $R$  を収束半径といい、その最大値は  $z = a$  にもっとも近い特異点までの距離になります。

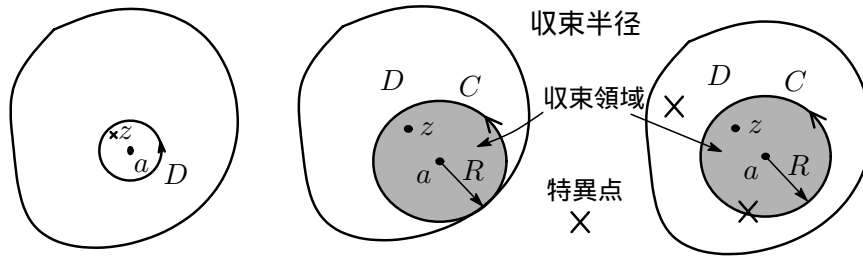
<sup>8</sup>詳しく知りたい方は「解析接続」のレポート参照。

<sup>9</sup>2.3 ローラン展開の項を参照。 $a$  が真性特異点であればローラン展開の主要部は無級数となる。

<sup>10</sup>「 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n$  が成り立てばすべての  $n$  に対して  $a_n = b_n$  が成り立つ」というべき級数の一意性というのがあります。つまり、べき級数展開は1通りしかないということで、ローラン展開も一意に展開されます。

<sup>11</sup>第1話のグルサの公式 (1.13) を参照。

<sup>12</sup>Sir Brook Taylor : 1685-1731, イギリスの数学者。1715年にテイラー展開を発見。



関数  $f(z) = 1/(z + 1)$  を  $z = 0$  のまわりでテイラー展開し、収束半径を求めると

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \dots$$

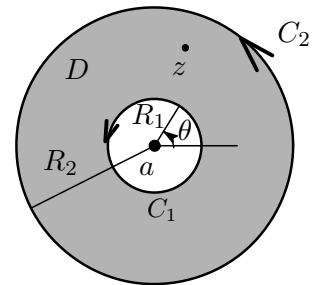
となり、関数  $f(z)$  は  $z = -1$  に特異点をもつので収束半径  $R$  は原点からの距離  $R = 1$  ですね。

### 2.3 ローラン展開

関数  $f(z)$  が点  $a$  の回りで正則でなければテイラー展開はできません。このようなケースに登場するのがローラン展開です。点  $z = a$  を関数  $f(z)$  の孤立特異点とし、点  $a$  を中心に半径  $R_1$  と  $R_2$  ( $R_1 < R_2$ ) の間の円環領域  $D$  で  $f(z)$  は正則とすると、関数  $f(z)$  は次のように級数展開できます。

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_{-n}}{(z-a)^n} \quad (2.4)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n(z-a)^n \quad (2.5)$$



これをローラン展開<sup>13</sup>といい、展開係数  $A_n$  は

$$A_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (2.6)$$

で与えられます。(2.4)に見られるように、ローラン展開にはテイラー展開で見られた正のべき級数の項に加えて負のべき級数  $(z-a)^{-k}$  ( $k > 0$ ) が現れていることに留意してください。展開中心の  $z = a$  は孤立特異点であるということがローラン展開の負のべき級数部分に現れています。この負のべき級数部分をとくにローラン展開の主要部と呼んでいます。 $n \geq 0$  から始まる主要部がない場合は除去可能な特異点、主要部が有限項で最高次が  $(z-a)^{-k}$  のとき  $z = a$  を  $k$  位の極、主要部が無限項からなる場合、 $z = a$  を真性特異点<sup>14</sup>といいます。

$$\left\{ \begin{array}{l} f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(z-a)^n \quad : \quad z = a \text{ は除去できる特異点 (主要部がない } n \geq 0) \\ f(z) = \sum_{n=-k}^{\infty} A_n(z-a)^n \quad : \quad z = a \text{ は } k \text{ 位の極 (主要部が有限項の和 } n \geq -k, k > 0) \\ f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n(z-a)^n \quad : \quad z = a \text{ は真性特異点 (主要部が無限項の和 } n = -\infty) \end{array} \right.$$

<sup>13</sup>一意に展開されます。Pierre Alphonse Laurent : 1813-1854, 仏の数学者。1843年にローラン級数を発表。

<sup>14</sup>Weierstrass(独の数学者: 1815-1897) は  $z = a$  近傍における  $f(z)$  の振る舞いは甚だ複雑ということで、 $a$  を  $f(z)$  の真性特異点と名付け、極は仮性特異点と名付けた、とのことです(高木貞治(著)「解析概論」より)。



$z=a$  に  $k$  位の極をもつ場合,  $z=a$  でのローラン展開は

$$f(z) = \frac{A_{-1}}{z-a} + \frac{A_{-2}}{(z-a)^2} + \cdots + \frac{A_{-k}}{(z-a)^k} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n(z-a)^n$$

となりますね。この中で係数  $A_{-1}$  を留数 (りゅうすう, residue) と呼び,  $\text{Res}(a)$  と表します<sup>15</sup>。

ローラン展開を具体的に行うには展開係数を求めなければなりません。テイラー展開の場合には  $f^n(a)$  のような微分係数から簡単に求められましたが, ローラン展開の場合,  $f^{(n)}(a)$  そのものが存在しないので苦戦を強いられそうです。しかし, テイラー展開の技術さえ知っていればうまく求めることができます。その要点は関数  $f(z)$  を特異点を含まない様に加工・分解してやることにです。そのように変形した関数を改めてテイラー展開をすればよいわけです<sup>16</sup>。これは口でいうより具体的にやった方が早いので, 関数  $f(z) = \frac{1}{z(z+1)}$  を特異点  $z=0$  のまわりでローラン展開してみましょう。  $f(z)$  を次のように部分分数に分解してやります。

$$f(z) = \frac{1}{z(z+1)} = \frac{1}{z} - \frac{1}{z+1} = f_1(z) + f_2(z)$$

右辺第2項の  $f_2(z)$  は  $z=0$  が特異点ではないので次のようにテイラー展開できますね。

$$\frac{1}{z+1} = 1 - z + z^2 - z^3 \cdots$$

したがって  $f(z)$  を  $z=0$  のまわりでローラン展開したものは

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n z^n = \frac{1}{z(z+1)} = z^{-1} - 1 + z - z^2 + z^3 \cdots, \quad \begin{cases} A_{-1} = 1 \\ A_0 = -1 \\ A_1 = 1 \\ \vdots \end{cases} \quad (2.7)$$

となります。ローラン展開の主要部は負のべき部分ですから  $z^{-1}$  です。ということで, 簡単にローラン展開ができました。ところで, テイラー展開を使わずに定義式 (2.6) からローラン展開の係数を求めたいという剛毅な方もおられるでしょう。その場合には,  $a=0$  として

$$A_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{1}{z^{n+2}} \cdot \frac{1}{(z+1)} dz \quad (2.8)$$

の積分を実行しなければなりません。ために経路を特異点である原点を中心に半径  $R=1$  の円周をとり,  $z = e^{i\theta}$  ( $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ) とパラメータ表示して... とやってみましたが, 手計算ではなかなか埒あかず, Mathematica にやらすと超幾何関数というのがでてきました。うーん, とこの辺りで挫折しそうですが, 捨てる神あれば拾う神ありで, 次節で紹介する留数定理の威力を借りればこの積分は難なくできます! この続きは第3話でやりますので, お楽しみに!

ついでにもう一つ,  $f(z) = \frac{z-1}{z(z+1)}$  を  $z=-1$  の回りでローラン展開してみます。少し技巧的ですが  $u = z+1$  とおいてやるとローラン展開は次のようになります。

$$\begin{aligned} \frac{z-1}{z(z+1)} &= \frac{2-u}{u(1-u)} = \frac{2-u}{u} (1-u)^{-1} = \frac{2-u}{u} (1+u+u^2+\cdots) \\ &= \frac{1}{u} (2+u+u^2+u^3+\cdots) \\ &= \frac{2}{z+1} + 1 + (z+1) + (z+1)^2 + \cdots \end{aligned}$$

テイラー展開をうまく使っていますね。

<sup>15</sup>  $\text{Res}(f, a)$  という表記もあります。

<sup>16</sup> 展開係数の一意性が効いています。

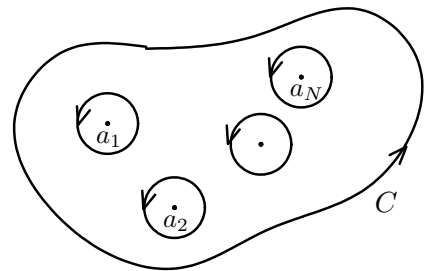
## 2.4 留数定理

関数  $f(z)$  を特異点  $a$  のまわりを反時計方向に一周する半径  $R_1$  の経路  $C_1$  に沿って積分します。 $f(z)$  のローラン展開は

$$\begin{aligned}
 I &= \oint_{C_1} f(z) dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \oint_{C_1} (z-a)^n dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \int_{-\pi}^{\pi} (R_1 e^{i\theta})^n i R_1 e^{i\theta} d\theta \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n R_1^{n+1} i \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n+1)\theta} d\theta \quad \left( \text{但し, } \int_{-\pi}^{\pi} e^{im\theta} d\theta = \begin{cases} 2\pi & m=0 \\ 0 & m \neq 0 \end{cases} \right) \\
 &= 2\pi i A_{-1} = 2\pi i \text{Res}(a) \\
 \therefore \frac{1}{2\pi i} \oint f(z) dz &= \text{Res}(a) \tag{2.9}
 \end{aligned}$$

となります ( $z$  はパラメータ表示 (1.5), (1.6) を使った)。この結果を見ると、留数を含む項だけが残って、他の項はすべて消えていることに気がつきます<sup>17</sup>。これが留数と呼ばれる所以です。

さて、いまの場合、閉曲線  $C_1$  の内部に1個の特異点  $a$  がある場合でしたが、右図に示すように閉曲線  $C$  の内部にいくつもの孤立特異点  $a_1, a_2, \dots, a_N$  がある場合はどうなるかという、反時計回りの経路  $C$  の周回積分<sup>18</sup>はそれらの特異点の留数の和となります。



$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) dz = \sum_{i=1}^N \text{Res}(a_i) \tag{2.10}$$

or

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{i=1}^N \text{Res}(a_i) \tag{2.11}$$

これを留数定理といいます。

## 2.5 留数を求める

留数はローラン展開の係数  $A_{-1}$  ですが、関数  $f(z)$  をローラン展開しなくても次のように簡単に求めることができます。

(A)  $f(z)$  が  $z = a$  に1位の極をもつ場合： $f(z) = \frac{F(z)}{z-a}$

$$\text{Res}(a) = F(a) \tag{2.12}$$

(B)  $f(z)$  が  $z = a$  が2位の極をもつ場合： $f(z) = \frac{F(z)}{(z-a)^2}$

$$\text{Res}(a) = F'(a) \tag{2.13}$$

$f(z)$  が  $k$  位の極をもつ場合： $f(z) = \frac{F(z)}{(z-a)^k}$

$$\text{Res}(a) = \frac{1}{(k-1)!} F^{(k-1)}(a) \tag{2.14}$$

<sup>17</sup>  $f(z)$  は  $z = a$  で正則でないので周回積分は0にならない。

<sup>18</sup> 時計まわりの周回積分は負号がつくことに注意！

(C)  $f(z) = \frac{G(z)}{F(z)}$  であって,  $F(a) = 0, F'(a) \neq 0$  の場合

$$\text{Res}(a) = \frac{G(a)}{F'(a)} \quad (2.15)$$

(D)  $f(z)$  が真性特異点をもつ場合: この場合は留数の定義式 (2.8) に戻って計算するしかありませんが, テイラー展開をうまく使えるように工夫すればいいでしょう。次の関数は  $z = 0$  が真性特異点で  $A_{-1} = \text{Res}(0) = 1$  です。

(例)  $f(z) = e^{1/z} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} \frac{1}{z^2} + \dots$

最後に, 関数  $f(z) = \frac{\cos z}{z(z-2i)}$  の各特異点における留数と, 各特異点回りの周回積分を求めてみます。関数  $f(z)$  は  $z = 0$  と  $z = 2i$  で 1 位の極をもちます。これらの極における留数は (2.12) より,  $F(z) = \cos z / (z - 2i)$  とすると

$$\text{Res}(0) = \frac{i}{2}$$

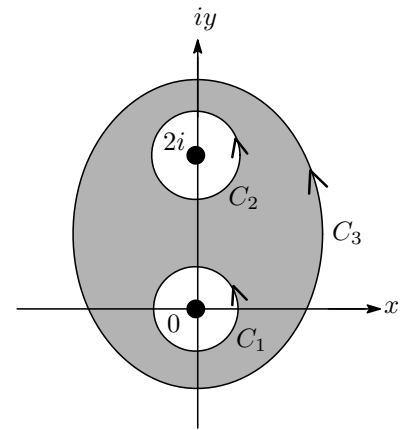
また,  $F(z) = \cos z / z$  として

$$\text{Res}(2i) = \frac{\cos 2i}{2i} = -\frac{(e^{-2} + e^2)i}{4}$$

周回経路を  $C_1, C_2, C_3$  として周回積分は

$$\begin{aligned} I_1 &= \oint_{C_1} f(z) dz = 2\pi i \text{Res}(0) = -\pi \\ I_2 &= \oint_{C_2} f(z) dz = 2\pi i \text{Res}(2i) = \pi \cos 2i \\ I_3 &= \oint_{C_3} f(z) dz = I_1 + I_2 = \pi(\cos 2i - 1) \end{aligned}$$

となります。



\*\*\*\* お疲れさまでした。第2話はこれで終了です。\*\*\*\*

### 第3話. 留数定理の定積分への応用

#### 3.1 ローラン展開の係数を求める

第2話でお約束した (2.8) のローラン展開の係数  $A_n$  を求めます。  $A_n$  は  $f(z) = \frac{1}{z(z+1)}$  のローラン展開係数でした。  $f(z)$  を (2.8) に入れると

$$A_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{1}{z^{n+2}} \cdot \frac{1}{(z+1)} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \varphi(z) dz, \quad \varphi(z) = \frac{1}{z^{n+2}} \cdot \frac{1}{(z+1)} \quad (3.1)$$

周回経路  $C$  は原点を中心に半径  $R < 1$  の円周をとります。  $\varphi(z)$  は  $z=0$  に  $n+2$  の極をもちますが、  $n$  が  $-2$  以下の値をとるときには  $\varphi(z)$  は正則関数となるのでコーシーの積分定理から周回積分は0。従って  $n$  の値としては  $n = -1, 0, 1, 2, \dots$  となります。  $\varphi(z) = \frac{F(z)}{z^{n+2}}$ ,  $F(z) = \frac{1}{z+1}$  とおくと (2.14) より

$$A_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \varphi(z) dz = \text{Res}(0) = \frac{1}{(n+1)!} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d^{n+1}}{dz^{n+1}} [z^{n+2} \varphi(z)] \implies \begin{cases} n = -1 & A_{-1} = 1 \\ n = 0 & A_0 = -1 \\ n = 1 & A_1 = 1 \\ n = 2 & A_2 = -1 \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$

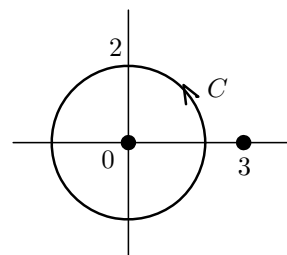
これは  $f(z)$  をテーラー展開して得た (2.7) の結果と一致します。まさに留数定理の威力を感じますね！

#### 3.2 留数定理を使った複素積分

2つほど留数定理を使った周回積分をやります。

1.  $f(z) = \frac{2z+1}{z(z-3)}$  原点から半径  $R=2$  の円周  $C$  上の周回積分。  $f(z)$  は  $z=0, 3$  の2つの特異点をもちますが、  $C$  内にあるのは  $z=0$  だけ。留数定理 (2.11) より

$$I = \oint_C \frac{2z+1}{z(z-3)} dz = 2\pi i \text{Res}(0)$$



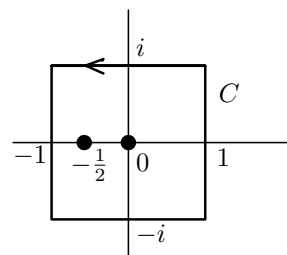
また, (2.12) より  $F(z) = \frac{2z+1}{z-3}$  とおいて

$$\text{Res}(0) = F(0) = -\frac{1}{3}, \quad \therefore I = -\frac{2\pi i}{3} \quad //$$

2.  $f(z) = \frac{z+1}{z(2z+1)(z-3)}$  正方形の周を  $C$  としたの周回積分。  $f(z)$  は  $C$  の内部に2つの特異点  $z=0, z=-1/2$  をもちます。各特異点での留数は (2.12) より

$$f(z) = \frac{1}{z} \cdot \frac{z+1}{(2z+1)(z-3)} = \frac{F(z)}{z} \quad \therefore \text{Res}(0) = F(0) = -\frac{1}{3}$$

$$f(z) = \frac{1}{(2z+1)} \cdot \frac{z+1}{z-3} = \frac{F(z)}{2z+1} \quad \therefore \text{Res}(-1/2) = F(-1/2) = \frac{1}{7}$$



したがって留数定理 (2.11) より

$$I = \oint_C \frac{z+1}{z(2z+1)(z-3)} dz = 2\pi i (\text{Res}(0) + \text{Res}(-1/2)) = -\frac{8\pi i}{21} \quad //$$

### 3.3 留数定理の定積分への応用

#### 実定積分の計算

留数定理<sup>19</sup>を応用した実数関数の定積分の計算です。

1. 手始めに次の無限積分を計算してみましょう。

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + a^2} dx \quad (a > 0, \text{実数}) \quad (3.2)$$

この積分はすぐできて

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \left[ \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a} \right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{\pi}{a}$$

となりますが、ここでは留数定理を使った積分のやり方を学ぶ例として取り上げました。次の複素関数を考えます。

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + a^2} = \frac{1}{z - ia} \cdot \frac{1}{z + ia} \quad (3.3)$$

この関数は  $z = \pm ia$  に特異点 (1 位の極) をもちます。さて、留数定理を使うには閉じた積分経路が必要なので、まず、実軸 ( $x$  軸) 上の経路  $C_1$  と原点を中心とした半径  $R$  の半円周経路  $C_2$  の二つの経路からなる閉じた積分経路  $C (= C_1 + C_2)$  を考えます。  $f(z)$  の  $C$  に沿った周回積分は留数定理を使えば

$$\begin{aligned} \oint_C f(z) dz &= \int_{C_1} \frac{1}{z^2 + a^2} dz + \int_{C_2} \frac{1}{z^2 + a^2} dz \\ &= \int_{-R}^R \frac{1}{x^2 + a^2} dx + \int_{C_2} \frac{1}{z^2 + a^2} dz \\ &= 2\pi i \text{Res}(ia) = \frac{\pi}{a} \end{aligned}$$

となります。ここで  $z = Re^{i\theta}$  ( $0 < \theta < \pi$ ) とパラメータ表示し、  $R \rightarrow \infty$  の極限をとると (3.4) の右辺第 1 項は求める積分値  $I$  となり、第 2 項は

$$\int_{C_2} \frac{1}{z^2 + a^2} dz = \int_0^\pi \frac{ie^{i\theta}}{Re^{2i\theta} + a^2} d\theta \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \sim \int_0^\pi \frac{ie^{-i\theta}}{R} d\theta \rightarrow 0$$

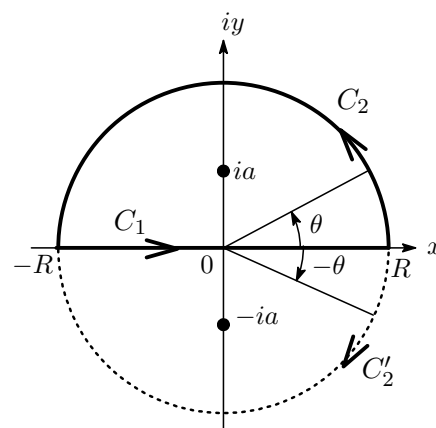
となります。これらの結果から与式の積分 (3.2) は

$$I = \frac{\pi}{a}$$

と簡単に求められました。いま、積分経路として上の半円をとりましたが、下の半円  $C'_2$  をとってまかまいません。その場合は時計回りの経路になる (周回積分に負号がつく) ことと、特異点が  $z = -ia$  であることに注意をしてください。結果は同じになります。

2. 同じような考え方で次の積分を計算します。

$$I = \int_0^\infty f(x) dx = \int_0^\infty \frac{1}{x^4 + 1} dx \quad (3.4)$$



<sup>19</sup> 「偏角の定理」というのがありますが、ここでは直接関係がないので触れません。

半無限積分ですが，関数  $f(x)$  は偶関数なので次のように無限積分にできます。

$$I = \int_0^{\infty} \frac{1}{x^4 + 1} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4 + 1} dx \quad (3.5)$$

1. の処方に従って複素関数  $f(z) = \frac{1}{z^4 + 1}$  を考えます。  $z^4 + 1 = 0$  の解は次の 4 個です<sup>20</sup>。

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i) & a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1 + i) \\ a_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i) & a_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - i) \end{cases} \quad (3.6)$$

このうち  $f(z)$  の上半平面での特異点は  $a_0$  と  $a_1$  の 2 個ですね。

$$f(z) = \frac{1}{(z - a_0)(z - a_1)(z - a_2)(z - a_3)} = \frac{1}{z - a_0} F_0(z) = \frac{1}{z - a_1} F_1(z)$$

とおけば，1 位の極の留数を求める公式 (2.12) より

$$\text{Res}(a_0) = F_0(a_0) = -\frac{1}{4\sqrt{2}}(1 + i), \quad \text{Res}(a_1) = F_1(a_1) = -\frac{1}{4\sqrt{2}}(1 - i)$$

したがって留数定理よりこの複素関数の周回積分の値は

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i (\text{Res}(a_0) + \text{Res}(a_1)) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

となります。次に，  $z = Re^{i\theta}$  とパラメータ表示した閉曲線  $C$  の周回積分は

$$\oint_C f(z) dz = \int_{C_1} \frac{1}{z^4 + 1} dz + \int_{C_2} \frac{1}{z^4 + 1} dz = \int_{-R}^R \frac{1}{x^4 + 1} dx + \int_0^{\pi} \frac{ie^{i\theta}}{R^3 e^{4i\theta} + 1} d\theta$$

とおけます。ここで  $R \rightarrow \infty$  の極限をとると右辺第 2 項は 0 となるので

$$\oint_C f(z) dz = \frac{\pi}{\sqrt{2}} = 2I \quad \therefore I = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \quad //$$

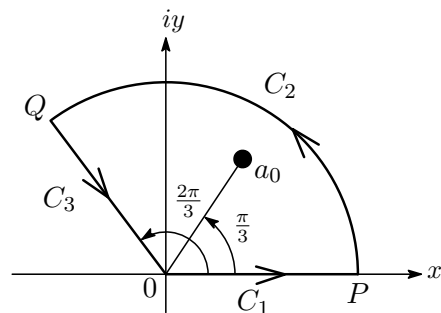
3. 次の半無限積分を計算します。

$$I = \int_0^{\infty} \frac{1}{1 + x^3} dx \quad (3.7)$$

被積分関数は偶関数ではないので，複素関数  $f(z) = \frac{1}{1 + z^3}$  の積分を考えた場合，積分経路として 2. のように上半円をとるわけにはいかず少し工夫が必要で，右図に示す円弧を含む経路  $C = C_1 + C_2 + C_3$  をとることにします。経路  $C_3$  をとるのがポイントで，この経路上の点  $z = Re^{i(2\pi/3)}$  は

$$\frac{1}{1 + z^3} = \frac{1}{1 + R^3 e^{i2\pi}} = \frac{1}{1 + R^3}$$

を満たし，これは被積分関数の形となっていますね。つまり， $R$  を 0 から  $\infty$  までとれば (3.8) はまさに求める半無限積分となります。ということで実軸上の経路  $C_1$  と複素平面上の経路  $C_3$  が求める積分に



<sup>20</sup>  $z^n + 1 = 0$  の解は次の  $n$  個。  $a_k = e^{i(1+2k)\pi/n}$ ,  $(k = 0, 1, 2, \dots, n-1)$

関与してきます。経路  $C_2$  の積分は 0 になるだろうということはこれまでのことから予想されますね。例によって次の周回積分を考えます。

$$\mathcal{I} = \oint_C f(z)dz = \oint_C \frac{1}{1+z^3}dz \quad (3.8)$$

$z^3 + 1 = 0$  の解は  $a_0 = e^{i\pi/3}$ ,  $a_1 = e^{i\pi}$ ,  $a_2 = e^{i5\pi/3}$  の 3 個で、経路  $C$  内に含まれる関数  $f(z)$  の特異点は  $a_0$  だけです。 $(z - a_0)$  は 1 位の極なので (2.12) より留数を求めると、周回積分の値は

$$\mathcal{I} = \oint_C f(z)dz = 2\pi i \text{Res}(a_0) = i \frac{2\pi}{3} e^{-(2\pi/3)} \quad (3.9)$$

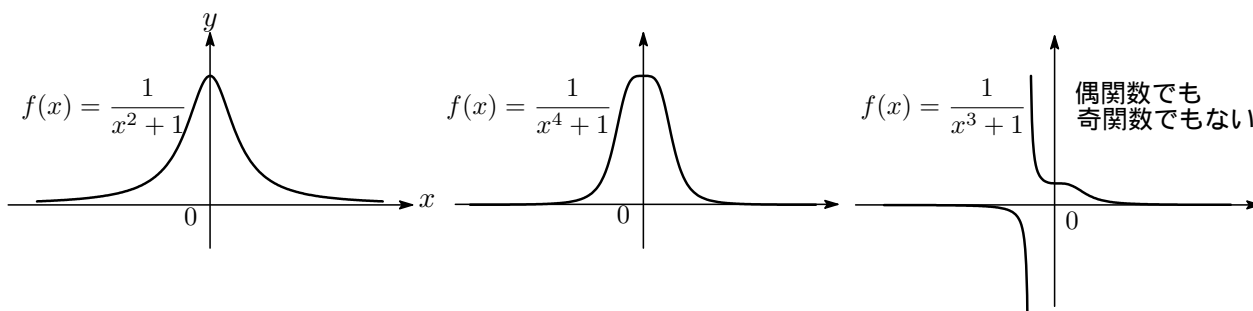
次に (3.8) の積分を経路に沿って分解し、 $z = Re^{i\theta}$  とパラメーター表示すると

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= \int_{C_1} \frac{1}{1+x^3}dx + \int_{C_2} \frac{1}{1+z^3}dz + \int_{C_3} \frac{1}{1+z^3}dz \\ &= \int_0^R \frac{1}{1+x^3}dx + \int_0^{2\pi/3} \frac{iRe^{i\theta}}{1+R^3e^{i3\theta}}d\theta + \int_{\vec{Q}0} \frac{e^{i2\pi/3}}{1+R^3}dR \end{aligned}$$

となります。ここで  $R \rightarrow \infty$  の極限をとると上式右辺の第 2 項は 0 となり、(3.9) の結果を使えば<sup>21</sup>

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= \int_0^\infty \frac{1}{1+x^3}dx + 0 + e^{i2\pi/3} \int_\infty^0 \frac{1}{1+x^3}dx = (1 - e^{i2\pi/3}) \int_0^\infty \frac{1}{1+x^3}dx = i \frac{2\pi}{3} e^{-(2\pi/3)} \\ \therefore I &= \int_0^\infty \frac{1}{1+x^3}dx = \frac{i2\pi e^{-i2\pi/3}}{3(1 - e^{i2\pi/3})} = \frac{2\pi e^{-i\pi/6}}{3(1 - e^{i2\pi/3})} = \frac{2\pi}{3(e^{i\pi/6} - e^{i5\pi/6})} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} // \end{aligned}$$

参考までに 1. 2. 3 で登場したの実関数のグラフを載せておきます。

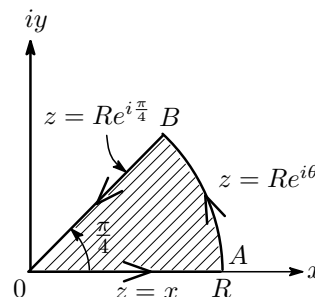


#### 4. フレネル積分<sup>22</sup>。

$$\int_0^\infty \cos x^2 dx, \quad \int_0^\infty \sin x^2 dx$$

周回経路を扇型と直角 2 等辺三角形の 2 通りで考えます。

扇型の経路：複素関数  $f(z) = e^{-z^2}$  を考えます。扇型経路の一部  $B0$  上で



<sup>21</sup> 第 3 項の積分変数は  $R$  から  $x$  に書き換えた。

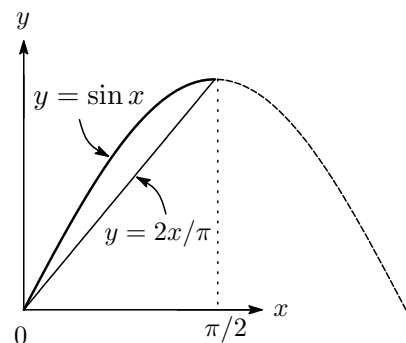
<sup>22</sup> 仏の物理学者オーギュスタン・ジャン・フレネル (1788-1827) が光の回折現象を説明する際に使っています。

は  $z = Re^{i\pi/4}$  で,  $z^2 = R^2e^{i\pi/2} = iR^2$  となって  $e^{-z^2} = e^{-ix^2} = \cos^2 x - i \sin^2 x$  と望む形がでてきますね。扇型経路内で  $f(z)$  は正則なので

$$\begin{aligned} \oint e^{-z^2} dz &= \int_{0A} + \int_{AB} + \int_{B0} \\ &= \int_0^R e^{-x^2} dx + \int_0^{\pi/4} iRe^{-R^2e^{i2\theta}} \cdot e^{i\theta} d\theta + \int_R^0 e^{i\pi/4} e^{-R^2e^{i\pi/2}} dR \\ &= \int_0^R e^{-x^2} dx + \int_0^{\pi/4} iRe^{-R^2e^{i2\theta}} \cdot e^{i\theta} d\theta - \frac{1+i}{\sqrt{2}} \int_0^R e^{-ix^2} dx \quad (\text{積分変数を } R \text{ から } x \text{ に書き換えた}) \\ &= \int_0^R e^{-x^2} dx + \int_0^{\pi/4} iRe^{-R^2e^{i2\theta}} \cdot e^{i\theta} d\theta - \frac{1+i}{\sqrt{2}} \int_0^R (\cos x^2 - i \sin x^2) dx \\ &= 0 \quad \therefore \int_0^R (\cos x^2 - i \sin x^2) dx = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i) \left( \int_0^R e^{-x^2} dx + \int_0^{\pi/4} e^{-R^2e^{i2\theta}} \cdot iRe^{i\theta} d\theta \right) \end{aligned}$$

$0 \leq 2\theta \leq \pi/2$  で  $\sin 2\theta \geq 0$  かつ  $\sin 2\theta \geq 4\theta/\pi$  となるので経路 AB の積分は

$$\begin{aligned} \left| \int_{AB} \right| &= \left| \int_0^{\pi/4} iRe^{-R^2e^{i2\theta}} \cdot e^{i\theta} d\theta \right| \leq \int_0^{\pi/4} \left| e^{i(R^2 \cos 2\theta + iR^2 \sin 2\theta)} iRe^{i\theta} \right| d\theta \\ &= \int_0^{\pi/4} \left| e^{i(R^2 \cos 2\theta + \theta)} \cdot e^{-R^2 \sin 2\theta} iR \right| d\theta \\ &= R \int_0^{\pi/4} e^{-R^2 \sin 2\theta} d\theta \\ &\leq R \int_0^{\pi/4} e^{-4R^2\theta/\pi} d\theta = \frac{\pi}{4R}(1 - e^{-R^2}) \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow \infty) \end{aligned}$$



$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$  (ガウス積分) なので, 以上の結果を整理して

$$\int_0^\infty (\cos x^2 - i \sin x^2) dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4} - i \frac{\sqrt{2\pi}}{4}$$

両辺の実部と虚部がそれぞれ相等しいとして

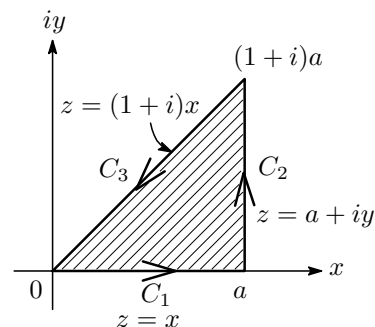
$$\int_0^\infty \cos^2 x dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}, \quad \int_0^\infty \sin^2 x dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4} //$$

2等辺三角形の経路: 関数  $f(z)$  として  $f(z) = e^{-z^2/2}$  を考えます。ここでも経路  $C_3$  から狙う形がでてきます。斜線領域で  $f(z)$  は正則なので

$$\oint_C e^{-z^2/2} dz = \int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3} = 0 \quad (3.10)$$

右辺の積分は

$$\begin{aligned} \int_{C_1} e^{-z^2/2} dz &= \int_0^a e^{-x^2/2} dx \\ \int_{C_3} e^{-z^2/2} dz &= \int_a^0 e^{-ix^2} (1+i) dx = -(1+i) \int_0^a (\cos^2 x - i \sin^2 x) dx \end{aligned}$$





$C_2$  では  $z = a + iy$  で

$$-\frac{z^2}{2} = \frac{-a^2 + y^2}{2} + iay, \quad \left| -\frac{z^2}{2} \right| = \left\{ \left( \frac{-a^2 + y^2}{2} \right)^2 + (ay)^2 \right\}^{1/2} = \frac{-a^2 + y^2}{2}$$

$0 \leq y \leq a$  なので

$$\left| e^{-z^2/2} \right| = e^{-(a^2 - y^2)/2} \leq e^{-(a/2)(a-y)}$$

の関係式が成り立ちます。したがって

$$\left| \int_{C_2} e^{-z^2/2} dz \right| \leq \int_0^a e^{-(a/2)(a-y)} dy = \frac{2}{a} (1 - e^{-a^2/2}) < \frac{2}{a}$$

ここで  $a \rightarrow \infty$  とすると  $\int_{C_2} \rightarrow 0$  となり, (3.10) を整理すると

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty e^{-x^2/2} dx - (1+i) \int_0^\infty (\cos^2 x - i \sin^2 x) dx \\ &= \left( \sqrt{\frac{\pi}{2}} - \int_0^\infty \cos^2 x dx - \int_0^\infty \sin^2 x dx \right) - i \left( \int_0^\infty \cos^2 x dx - \int_0^\infty \sin^2 x dx \right) = 0 \end{aligned}$$

実部, 虚部をそれぞれ 0 とおいて

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \cos^2 x dx + \int_0^\infty \sin^2 x dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad \int_0^\infty \cos^2 x dx - \int_0^\infty \sin^2 x dx = 0 \\ \therefore & \int_0^\infty \cos^2 x dx = \int_0^\infty \sin^2 x dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4} \quad // \end{aligned}$$

### 5. フーリエ変換型の積分 $\int_{-\infty}^\infty f(x)e^{ikx} dx$

この手の計算にはジョルダンの補助定理というのが役に立つので, 証明抜きでその紹介をしておきます。

ジョルダンの補助定理

上半円  $C$  の経路をとるとき,  $|z| \rightarrow \infty$  で  $f(z) \rightarrow 0$  となる関数  $f(z)$  に対して

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_C f(z)e^{ikz} dz = 0 \quad (k > 0)$$

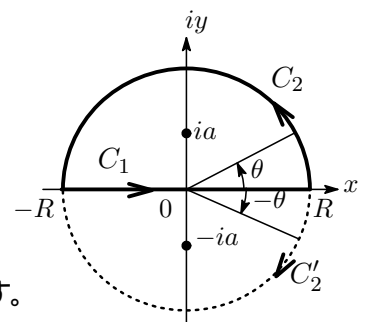
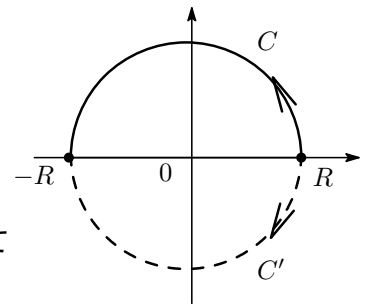
が成り立つ。また  $k < 0$  であれば下半円の経路  $C'$  をとればよい<sup>23</sup>。//

それでは次の積分を計算します。この形の積分は量子力学で登場するグリーン関数の計算などでよく出会います。

$$I = \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ikx}}{x^2 + a^2} dx \quad (a > 0, k \text{ は正の実数}) \quad (3.11)$$

図に示す  $C = C_1 + C_2$  の反時計回りの閉曲線とした次の複素積分を考えます。

$$\mathcal{I} = \oint_C \frac{e^{ikz}}{z^2 + a^2} dz = \int_{-R}^R \frac{e^{ikx}}{x^2 + a^2} dx + \int_{C_2} \frac{e^{ikz}}{z^2 + a^2} dz \quad (3.12)$$



<sup>23</sup>経路は必ずしも半円でなく円弧でもよい。

虚数軸上に一位の極があります。ジョルダンの補助定理 (3.3) から右辺第 2 項の積分は 0 になり、あとは左辺の被積分関数の留数を求めるだけとなります。その結果、

$$I = 2\pi i \operatorname{Res}(ia) = 2\pi i \frac{e^{-ka}}{2ia} = \frac{\pi}{a} e^{-ka}$$

$R \rightarrow \infty$  の極限をとると

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{x^2 + a^2} dx = \frac{\pi}{a} e^{-ka} \quad (k > 0) \quad //$$

ところで、(3.11) の積分は  $k$  が正の場合でした。 $k$  が負の場合を考えます。この場合の経路はジョルダンの補助定理により時計回りの閉曲線  $C' = C_1 + C_2'$  をとればいいわけですね。留数は

$$\operatorname{Res}(-ia) = -\frac{e^{ka}}{2ia}$$

と求められるので

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{x^2 + a^2} dx = \frac{\pi}{a} e^{ka} \quad (k < 0) \quad //$$

以上の結果をまとめると

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{x^2 + a^2} dx = \frac{\pi}{a} e^{-|k|a} \quad (k : \text{実数}) \quad (3.13)$$

となります。

補足 1 :  $k$  の正負によって経路を変える理由

$z = Re^{i\theta}$  と置くと反時計回りの上半円経路  $C_2$  上の積分は

$$\int_{C_2} \frac{e^{ikz}}{z^2 + a^2} dz = \int_0^\pi \frac{e^{ikR \cos \theta} e^{-kR \sin \theta}}{R^2 e^{2i\theta} + a^2} Rie^{i\theta} d\theta \quad (3.14)$$

となります。ここで  $R \rightarrow \infty$  の極限をとったとき  $\int_0^\pi \frac{e^{ikR \cos \theta} e^{-kR \sin \theta}}{R^2 e^{2i\theta} + a^2} Rie^{i\theta} d\theta$  が 0 になる条件を調べると、まず  $e^{ikR \cos \theta}$  は  $|e^{ikR \cos \theta}| = 1$  で  $R$  に無関係で問題なし。次に  $e^{-kR \sin \theta}$  のところは、経路  $C_2$  は  $0 < \theta < \pi$  なので  $\sin \theta > 0$  ですね。したがって、 $k > 0$  であれば  $e^{-kR \sin \theta}$  は  $R \rightarrow \infty$  の極限で 0 となり、めでたく上の積分は 0 になります。しかし、 $k < 0$  である場合には経路  $C_2$  での積分は 0 にはなりません。この場合は  $-\pi < \theta < 0$  となる時計回りの下半円経路  $C_2'$  をとると  $\sin \theta < 0$  となるので、 $e^{-kR \sin \theta}$  は  $R \rightarrow \infty$  の極限で 0、つまり積分は 0 になります。以上、 $k$  の符号によって経路を選択する理由はここにあるわけです。(補足終わり)

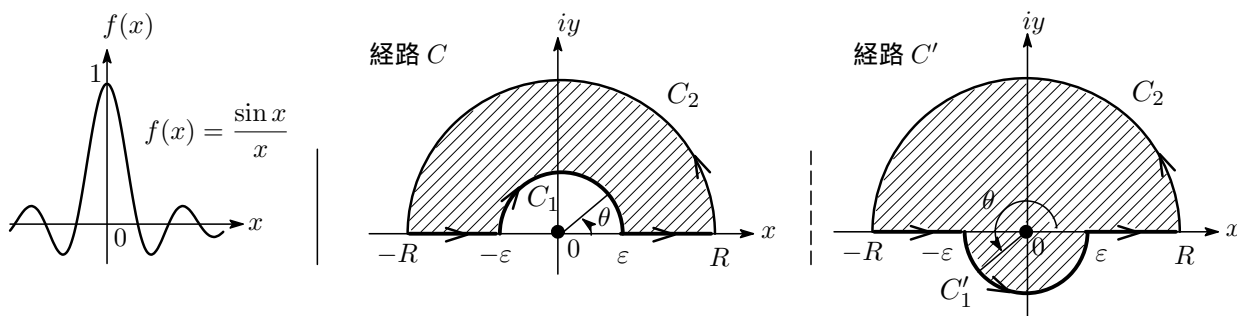
6. 複素関数が実軸上に特異点をもつ場合の例として、次の積分<sup>24</sup>を計算します。

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} \quad (3.15)$$

例によって複素関数  $f(z) = e^{iz}/z$  の積分

$$\oint_C \frac{e^{iz}}{z} dz \quad (e^{iz} = \cos z + i \sin z) \quad (3.16)$$

<sup>24</sup> この積分はディリクレ積分と呼ばれ、実質的には  $\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} \int_\varepsilon^R \frac{\sin x}{x}$  といった形の広義積分(次節参照)です。



を考えます。\$f(z)\$ は \$z=0\$ に一位の極（特異点）をもちます。特異点を通して積分することはできないので、特異点を迂回する経路と特異点を内部に取り込む経路の2つのケースで計算します。

特異点を迂回：特異点を迂回する半円経路 \$C\_1\$ をとり、経路全体として中央の図に示すような経路 \$C\$ をとります。\$C\$ で囲まれた斜線内では \$f(z)\$ は正則なので、コーシーの積分定理から

$$\oint_C \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{C_1} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{\varepsilon}^R \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{C_2} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0$$

ここで右辺第1項の積分で、変数 \$x\$ を \$-x\$ に置き換えると

$$\int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{ix}}{x} dx \xrightarrow{x \rightarrow -x} \int_R^{\varepsilon} \frac{e^{-ix}}{-x} (-dx) = - \int_{\varepsilon}^R \frac{e^{-ix}}{x} dx$$

となるので、これを上式に入れて整理すると

$$\int_{\varepsilon}^R \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{x} dx + \int_{C_1} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{C_2} \frac{e^{iz}}{z} dz = 2i \int_{\varepsilon}^R \frac{\sin x}{x} dx + \int_{C_1} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{C_2} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0$$

$$\therefore \int_{\varepsilon}^R \frac{\sin x}{x} dx = -\frac{1}{2i} \left\{ \int_{C_1} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{C_2} \frac{e^{iz}}{z} dz \right\}$$

が得られます。右辺第1項の半円 \$C\_1\$ 上の積分は \$z = \varepsilon e^{i\theta}\$ とおいて

$$\int_{C_1} \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_{\pi}^0 \frac{e^{i\varepsilon e^{i\theta}}}{\varepsilon e^{i\theta}} i\varepsilon e^{i\theta} d\theta = -i \int_0^{\pi} e^{i\varepsilon e^{i\theta}} d\theta$$

ここで \$\varepsilon \to 0\$ の極限をとると

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{C_1} \frac{e^{iz}}{z} dz = -i \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{\pi} e^{i\varepsilon e^{i\theta}} d\theta = -\pi i$$

また、右辺第2項はジョルダンの補助定理により

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_2} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0$$

以上の結果から

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} \int_{\varepsilon}^R \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = -\frac{1}{2i} \cdot (-\pi i) = \frac{\pi}{2} \quad //$$

が得られます。

特異点を取り込む：一位の極 \$z = 0\$ を取り込んだ反時計回りの経路 \$C'\$ を考えます。留数定理の(2.12)より

$$\oint_{C'} \frac{e^{iz}}{z} dz = 2\pi i$$

極を取り込んだ下半円経路  $C'_1$  では

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{C'_1} \frac{e^{iz}}{z} dz = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\pi}^{2\pi} \frac{e^{i\varepsilon e^{i\theta}}}{\varepsilon e^{i\theta}} i\varepsilon e^{i\theta} d\theta = i\pi$$

となります。いままで得られた結果から

$$2i \int_{\varepsilon}^R \frac{\sin x}{x} dx + \int_{C'_1} = 2\pi i$$

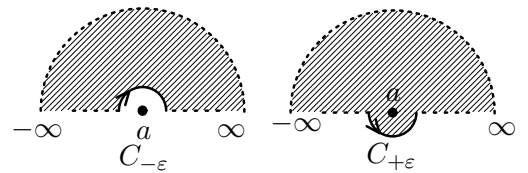
となるので

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} \int_{\varepsilon}^R \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2i}(2\pi i - \pi i) = \frac{\pi}{2} \quad //$$

この結果は特異点を迂回した計算結果と一致します。

一位の極周りの半円経路  $C_{\pm\varepsilon}$  からの積分への寄与

$$\int_{C_{\pm\varepsilon}} \frac{f(z)}{z-a} dz = \begin{cases} i\pi f(a) & C_{+\varepsilon}: \text{反時計回り} \\ -i\pi f(a) & C_{-\varepsilon}: \text{時計回り} \end{cases}$$



補足 2 :

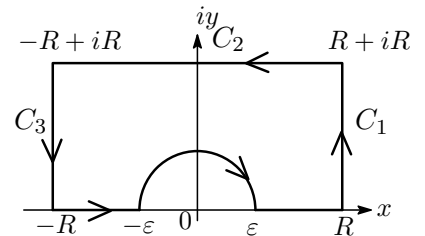
$C_2$  の大半円経路の代わりに右図のような矩形経路  $C_1 \rightarrow C_2 \rightarrow C_3$  をとることもできます。この経路の積分が 0 になることは次のように示すことができます。  $f(z) = e^{iz}/z$  として

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_1} \frac{e^{iz}}{z} dz \right| &= \left| \int_0^R \frac{e^{iR-y}}{R+iy} i dy \right| \leq \int_0^R \left| \frac{e^{iR-y}}{R+iy} i \right| dy \\ &= \int_0^R \frac{e^{-y}}{\sqrt{R^2-y^2}} dy \leq \frac{1}{R} \int_0^R e^{-y} dy = \frac{1}{R}(1-e^{-R}) \end{aligned}$$

$$\left| \int_{C_2} \frac{e^{iz}}{z} dz \right| = \left| \int_{-R}^R \frac{e^{ix-R}}{x+iR} dx \right| \leq \frac{1}{R} \int_0^R e^{-y} dy = \frac{1}{R}(1-e^{-R})$$

$$\left| \int_{C_3} \frac{e^{iz}}{z} dz \right| = \left| \int_0^R \frac{e^{-iR-y}}{-R+iy} dy \right| \leq \frac{1}{R} \int_0^R e^{-y} dy = \frac{1}{R}(1-e^{-R})$$

$$\therefore \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_1+C_2+C_3} f(z) dz = 0$$



### 3.4 広義積分

広義積分も留数定理を使って求めることができます。まず広義積分の簡単な講釈から。

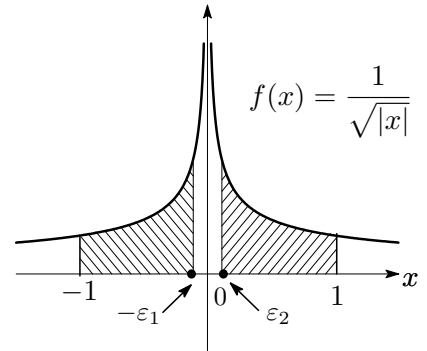
広義積分 (improper integral) というのは、通常の定積分を拡張したもので、簡単に言えばそのままでは積分できない (発散する) が、極限操作をおこなうことで有限な積分値が得られる といった積分です。口で言うより具体例で見た方が早いので、次の積分を考えます。

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{|x|}} dx \quad (3.17)$$

これは点  $x = 0$  で被積分関数が発散するので通常の定積分はできません。

しかし,  $\varepsilon_1, \varepsilon_2 (> 0)$  を無限小の微小量とし, 点  $x = 0$  をスキップした2つの区間  $[-1, -\varepsilon_1], [\varepsilon_2, 1]$  での積分はすぐにできて,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{|x|}} dx &= \int_{-1}^{-\varepsilon_1} \frac{1}{\sqrt{-x}} dx + \int_{\varepsilon_2}^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx \\ &= (-2\sqrt{\varepsilon_1} + 2) + (2 - 2\sqrt{\varepsilon_2}) \\ &= 4 - 2\sqrt{\varepsilon_1} - 2\sqrt{\varepsilon_2} \end{aligned}$$



ここで独立に  $\varepsilon_1 \rightarrow 0, \varepsilon_2 \rightarrow 0$  の極限をとると

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{|x|}} dx = 4 - 2 \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \sqrt{\varepsilon_1} - 2 \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0} \sqrt{\varepsilon_2} = 4 \quad (3.18)$$

となり, めでたく積分値が求められました。ただし, いつも広義積分が存在するとは限りません。

広義積分は存在しないが主値積分は存在する例を一つ。

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx &= \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \int_{-1}^{-\varepsilon_1} \frac{1}{x} dx + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0} \int_{\varepsilon_2}^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} [\ln|x|]_{-1}^{-\varepsilon_1} + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0} [\ln|x|]_{\varepsilon_2}^1 \\ &= \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \ln \varepsilon_1 - \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0} \ln \varepsilon_2 = -\infty + \infty \end{aligned}$$

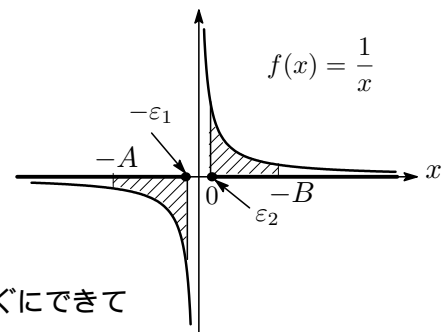
となって, 広義積分は存在しません。しかし, つぎに見るように主値積分は存在し,  $P \int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx = 0$  となります。各自確認されたし。

### 3.5 コーシーの主値積分

次の積分を考えます。

$$I = \int_{-A}^B \frac{1}{x} dx \quad (A, B > 0) \quad (3.19)$$

この積分は区間  $[A, B]$  の間に点  $x = 0$  を含み, その点で被積分関数  $1/x$  は無限大に発散するので普通の意味で定積分はできません。しかし, 例によって  $\varepsilon_1, \varepsilon_2 (> 0)$  を無限小の微小量とし, 点  $x = 0$  をスキップした2つの区間  $[-A, -\varepsilon_1], [\varepsilon_2, B]$  での積分はすぐにできて



$$\int_{-A}^{-\varepsilon_1} \frac{1}{x} dx + \int_{\varepsilon_2}^B \frac{1}{x} dx = -\ln \frac{A}{\varepsilon_1} + \ln \frac{B}{\varepsilon_2} = \ln \frac{B\varepsilon_1}{A\varepsilon_2}$$

となります。ここで  $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \rightarrow 0$  の極限をとると

$$\lim_{\varepsilon_1, \varepsilon_2 \rightarrow 0} \ln \frac{B\varepsilon_1}{A\varepsilon_2} \quad (3.20)$$

問題はこの極限值が存在するかどうかです。  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  は無限小の微小量とはいえ, それぞれ独立して別個に0に向かうので, このままでは極限值は決まらず, したがって 広義積分は存在しません。そこで

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 \quad (3.21)$$

という条件を付けてやれば極限值  $\ln(B/A)$  が確定し, (3.19) は積分できることとなります。このように, 条件を付けることで可能となる積分をコーシーの主値積分 (Cauchy principal value integral) といひ, 広義積分と区別する意味で慣例上積分記号の前に Principal の P を付けます<sup>25</sup>。いまの場合では

$$I = P \int_{-A}^B \frac{1}{x} dx \quad (3.22)$$

と表します。そして,  $I$  をコーシーの主値と呼んでいます。なお, 広義積分が存在すれば, その値はコーシーの主値に一致します。先ほどの広義積分は  $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{|x|}} dx = 4$  でした。コーシーの主値積分では  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$  の条件を付けるので  $P \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{|x|}} dx = 4$  となり, 広義積分の値と一致しますね。

留数定理を使って主値積分を求める

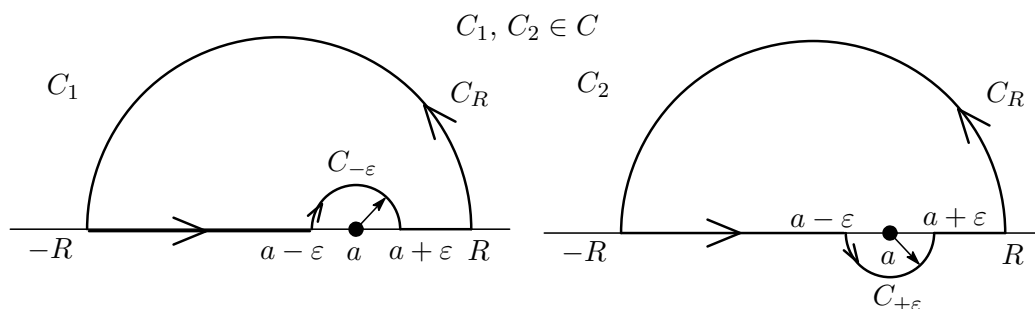
次のような形の積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x-a} dx \quad (a: \text{実数}, f(a) \neq 0)$$

は物理ではよく登場しますが, この積分は通常の意味で積分不可能ですね。関数  $f(x)$  が  $x = a$  を除いて連続なとき, 主値積分は

$$P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x-a} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_{-\infty}^{a-\varepsilon} \frac{f(x)}{x-a} dx + \int_{a+\varepsilon}^{\infty} \frac{f(x)}{x-a} dx \right) \quad (3.23)$$

で表されます。主値積分を留数定理を使って計算するのがこのセクションの目的です。



$f(z)$  は  $|z| \rightarrow \infty$  のとき十分早く 0 に近づく関数として, 次の複素積分を考えます。2つの図で示された閉曲線経路を  $C$  とすると

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} \oint_C \frac{f(z)}{z-a} dz &= \int_{-\infty}^{a-\varepsilon} \frac{f(z)}{z-a} dz + \int_{C_{\pm\varepsilon}} \frac{f(z)}{z-a} dz + \int_{a+\varepsilon}^{\infty} \frac{f(z)}{z-a} dz + \int_{C_R} \frac{f(z)}{z-a} dz \\ &= \int_{-\infty}^{a-\varepsilon} \frac{f(z)}{z-a} dz + \int_{C_{\pm\varepsilon}} \frac{f(z)}{z-a} dz + \int_{a+\varepsilon}^{\infty} \frac{f(z)}{z-a} dz \end{aligned} \quad (3.24)$$

ここで大半円経路の積分は  $\int_{C_R} \rightarrow 0$  としました。

<sup>25</sup>Principal の P で,  $P$  の代わりに v.p. と書くことも有ります。

- 経路  $C_1$  : 極  $a$  は閉曲線の外部にあるので留数定理より

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} \oint_{C_1} \frac{f(z)}{z-a} dz &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{a-\varepsilon} \frac{f(x)}{x-a} dx - i\pi f(a) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^{\infty} \frac{f(x)}{x-a} dx \\ &= P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x-a} dx - i\pi f(a) = 0 \\ \therefore P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x-a} dx &= i\pi f(a) \end{aligned}$$

- 経路  $C_2$  : 極  $a$  は閉曲線の内部にあるので留数定理より

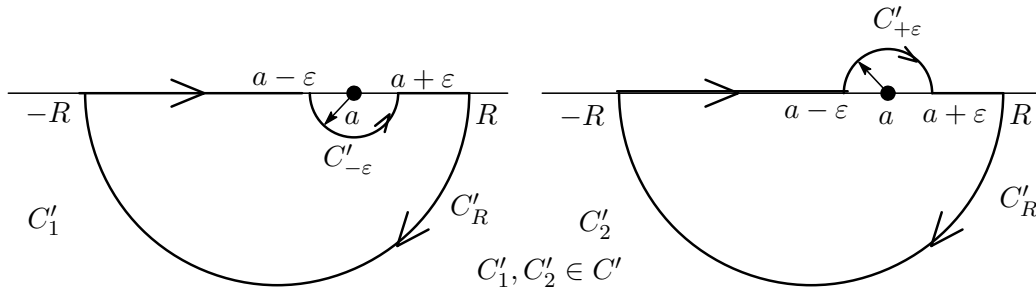
$$\begin{aligned} \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} \oint_{C_2} \frac{f(z)}{z-a} dz &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{a-\varepsilon} \frac{f(x)}{x-a} dx + i\pi f(a) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^{\infty} \frac{f(x)}{x-a} dx \\ &= P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x-a} dx + i\pi f(a) = 2\pi i f(a) \\ \therefore P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x-a} dx &= i\pi f(a) \end{aligned}$$

いずれにしても主値積分は

$$P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x-a} dx = i\pi f(a) \quad (3.25)$$

となります。

下大半円の経路  $C'$  の場合も同様に



- 経路  $C'_1$  : 極  $a$  は閉曲線の外部にあるので留数定理より

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} \oint_{C'_1} \frac{f(z)}{z-a} dz &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{a-\varepsilon} \frac{f(x)}{x-a} dx + i\pi f(a) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^{\infty} \frac{f(x)}{x-a} dx \\ &= P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x-a} dx + i\pi f(a) = 0 \\ \therefore P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x-a} dx &= -i\pi f(a) \end{aligned}$$

- 経路  $C'_2$  : 極  $a$  は閉曲線の内部にあるので留数定理より

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} \oint_{C'_2} \frac{f(z)}{z-a} dz &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{a-\varepsilon} \frac{f(x)}{x-a} dx - i\pi f(a) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^{\infty} \frac{f(x)}{x-a} dx \\ &= P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x-a} dx - i\pi f(a) = -2\pi i f(a) \\ \therefore P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x-a} dx &= -i\pi f(a) \end{aligned}$$

したがって、主値積分は

$$P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x-a} dx = -i\pi f(a) \quad (3.26)$$

となります。

例として次の主値積分を求めてみましょう。

$$I = P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{x-a} dx \quad (k > 0)$$

$k > 0$  なので上半円の経路をとる（補足 1 を参照）と，(3.25) より

$$I = P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{x-a} dx = i\pi e^{ika} \quad //$$

と一発で求められます。

もう一つ

$$I = P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2 - a^2} dx$$

の主値積分は上半円経路をとって

$$I = P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} P \left( \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x-a} dx - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x+a} dx \right) = \frac{i\pi}{2a} (e^{ia} - e^{-ia}) = \frac{i\pi}{a} \sin a$$

と求められます。虚部をとると

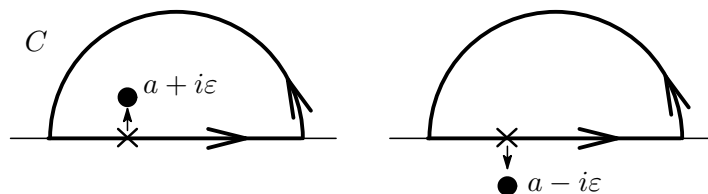
$$I = P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2 - a^2} dx = \frac{\pi}{a} \sin a$$

### 特異点をずらす方法

特異点を迂回したり取り込んだりしてきましたが，経路上から特異点を虚軸方向に上あるいは下へ無限小だけずらして計算し，そのあと元に戻す（主値をとる）という方法も考えられます。複素積分

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - a \mp i\varepsilon} dz$$

を考えます。



そうすると上半円経路の積分は  $R \rightarrow \infty$  で 0 になるとして，留数定理より

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - a \mp i\varepsilon} dz = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x - a - i\varepsilon} dx = 2\pi i f(a) \\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x - a + i\varepsilon} dx = 0 \end{cases} \quad (3.27)$$



となります。無限小のずらしを元に戻して，上の2式の合体から

$$\frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x-a-i\varepsilon} dx + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x-a+i\varepsilon} dx \right) = P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x-a} dx = i\pi f(a)$$

が得られます。つまり，主値積分は特異点  $a$  を上と下にそれぞれ無限小ずらした場合の積分の相加平均になっています。

特異点を固定したままの主値積分の表式 ( (3.26) など ) と特異点をずらした (3.27) の関係は (3.28) のようにまとめることができます。

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x-a-i\varepsilon} dx &= P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x-a} dx + i\pi f(a) \\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x-a+i\varepsilon} dx &= P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x-a} dx - i\pi f(a) \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x-a \mp i\varepsilon} dx = P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x-a} dx \pm i\pi f(a) \quad (3.28)$$

(3.28) から  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$  を外すと

$$\frac{1}{x-a \mp i\varepsilon} = P \frac{1}{x-a} \pm i\pi \delta(x-a) \quad \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x-a) dx = f(a) \right) \quad (3.29)$$

この式は  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$  に作用する演算子になっています<sup>26</sup>。

### 3.6 散乱問題におけるグリーン関数

前節コーシーの主値積分の具体的な応用例として散乱問題などで登場するグリーン関数について触れておきます<sup>27</sup>。昔，砂川重信「散乱の量子論」(岩波全書，1977) という本を読んでいたとき，

$$G_0(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi^2 r} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k' \sin k' r}{k'^2 - k^2} dk' \quad (3.30)$$

という散乱波を表すグリーン関数が登場し，留数定理を使っていとも簡単にこの積分が求められているのに愕然とした記憶があります。もっとも，当時はこの計算手法がよく理解できませんでした。。ところで，今回，この本の計算を見直したところどうも腑に落ちない。う～ん！どうしたことだろうと悩みましたが，結局計算をやり直してみることにしました。おかしな点を見つけられれば，是非一方いだけるとありがたい，なお，グリーン関数の物理的な内容については，ここではほとんど触れませんので，詳しく知りたい方は上記の砂川の著書の他，今村勤「物理とグリーン関数」(岩波全書，1978)，小泉義晴「量子物理学とグリーン関数」(現代工学社，1994)などを参照ください。

#### 1) 特異点を迂回する方法 (コーシーの主値)

$$\sin k' r = \frac{e^{ik' r} - e^{-ik' r}}{2i}$$

<sup>26</sup>(3.29) はプレメリの公式と呼ばれます。Josip Plemelj (1873-1967)，スロベニアの数学者

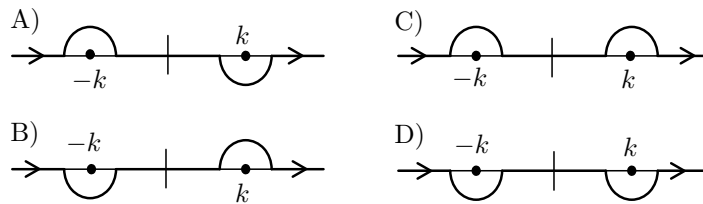
<sup>27</sup>数学のコーナーの「対話・グリーン関数(1)」も参照されたし。

の関係式を使って  $G_0(\mathbf{r})$  を次のように書き換えておきます。

$$G_0(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi^2 r} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k' \sin k' r}{k'^2 - k^2} dk' = -\frac{1}{16\pi^2 i r} (I_1 - I_2)$$

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k' e^{ik'r}}{(k' + k)(k' - k)} dk', \quad I_2 = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k' e^{-ik'r}}{(k' + k)(k' - k)} dk'$$

複素  $k'$  平面で  $I_1$  の積分は上半円の経路,  $I_2$  の積分は下半円の経路に実軸上の経路を加えた閉じた経路を考えます (ジョルダンの補助定理参照)。



実軸上の極を迂回する経路は図に示す A) から D) の 4 つの経路がありますが, いずれの経路をとっても主値積分の結果は変わらないので, ここでは A) の経路をとっています。

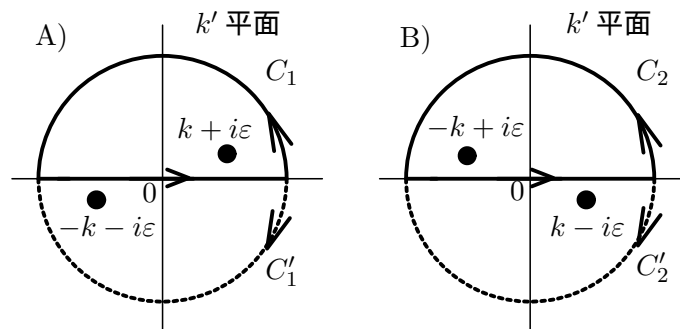
(3.25), (3.26) より

$$\begin{aligned} P I_1 &= i\pi \frac{e^{-ikr}}{2} + i\pi \frac{e^{ikr}}{2} \\ P I_2 &= -i\pi \frac{e^{ikr}}{2} - i\pi \frac{e^{-ikr}}{2} \\ \therefore P(I_1 - I_2) &= i\pi(e^{ikr} + e^{-ikr}) = 2\pi i \cos kr \\ \therefore G_0(\mathbf{r}) &= -\frac{1}{8\pi} \frac{\cos kr}{r} \end{aligned} \quad (3.31)$$

が得られます。これは定在波のグリーン関数を表します。

## 2) 特異点をずらす方法

実軸上の極を A)  $k \rightarrow \pm(k + i\varepsilon)$ , B)  $k \rightarrow \mp(k - i\varepsilon)$  とずらします<sup>28</sup>。



<sup>28</sup>ずらし方で外向き球面波あるいは内向き球面波を表すグリーン関数が得られますが, その物理的内容については参考図書をご覧ください。

A . 次の積分計算となります。

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k' e^{ik'r}}{(k' + k + i\varepsilon)(k' - k - i\varepsilon)} dk'$$

$$I_2 = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k' e^{-ik'r}}{(k' + k + i\varepsilon)(k' - k - i\varepsilon)} dk'$$

$I_1$  は特異点  $k + i\varepsilon$  を ,  $I_2$  は特異点  $-k - i\varepsilon$  を領域内にそれぞれ持つので , 留数定理より

$$I_1 = 2\pi i \frac{(k + i\varepsilon) e^{i(k+i\varepsilon)r}}{2(k + i\varepsilon)} = \pi i e^{i(k+i\varepsilon)r} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \pi i e^{ikr}$$

$$I_2 = -2\pi i \frac{-(k + i\varepsilon) e^{i(k+i\varepsilon)r}}{-2(k + i\varepsilon)} = -\pi i e^{i(k+i\varepsilon)r} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} -\pi i e^{ikr}$$

$$\therefore G_0(\mathbf{r}) = \frac{1}{16\pi^2 i r} (I_1 - I_2) = -\frac{1}{8\pi r} e^{ikr} \quad (3.32)$$

$e^{-i\omega t}$  のような時間的な変化を想定すると  $e^{i(kr - \omega t)}$  となり , これは外向き球面波<sup>29</sup>を表します。//

B . 次の積分計算となります。

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k' e^{ik'r}}{(k' - k + i\varepsilon)(k' + k - i\varepsilon)} dk'$$

$$I_2 = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k' e^{-ik'r}}{(k' - k + i\varepsilon)(k' + k - i\varepsilon)} dk'$$

$I_1$  は特異点  $-k + i\varepsilon$  を ,  $I_2$  は特異点  $k - i\varepsilon$  を領域内にそれぞれ持つので , 留数定理より

$$I_1 = 2\pi i \frac{(-k + i\varepsilon) e^{i(-k+i\varepsilon)r}}{2(-k + i\varepsilon)} = \pi i e^{i(-k+i\varepsilon)r} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \pi i e^{-ikr}$$

$$I_2 = -2\pi i \frac{(k - i\varepsilon) e^{-i(k-i\varepsilon)r}}{2(k - i\varepsilon)} = -\pi i e^{-i(k-i\varepsilon)r} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} -\pi i e^{-ikr}$$

$$\therefore G_0(\mathbf{r}) = \frac{1}{16\pi^2 i r} (I_1 - I_2) = -\frac{1}{8\pi r} e^{-ikr} \quad (3.33)$$

これは内向き球面波<sup>30</sup>を表します。//

外向き球面波 (3.32) と内向き球面波 (3.33) の相加平均をとると

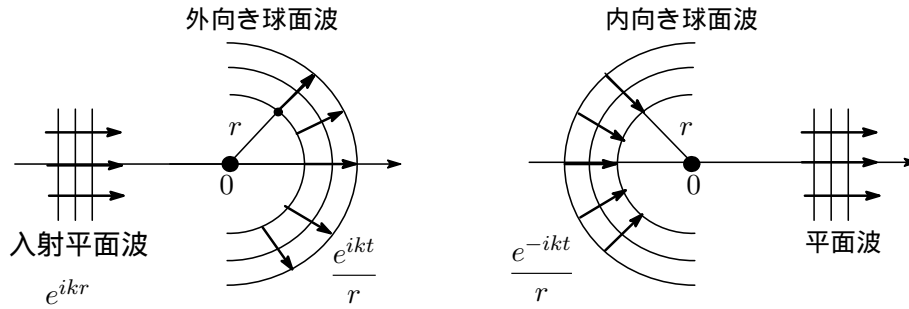
$$\frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{8\pi r} (e^{ikr} + e^{-ikr}) = -\frac{1}{8\pi} \frac{\cos kr}{r}$$

となり , これは (3.31) の定在波となります。

補足 3 : 1 ) 特異点を迂回するコーシーの主値での計算結果と , 2 ) 特異点をずらす方法での計算結果が異なるのはどういうこと? と疑問に感じる方も多いと思います。なぜ異なるのかという理由は特異点の取り扱いが 1 ) と 2 ) で違うからなんですね。1 ) の主値計算の場合 , 特異点は積分経路の実軸上に頑 (がん) として存在していて , 特異点を迂回した経路で計算しました。このことは , (3.25) や (3.26) からわかるように , 被積分関数の特異点における留数の影響を半分だけ考慮した計算 となっています。一方 , 2 ) の特異点をずらす方法では , 特異点を積分経路上からわざわざズラしてして積分を実行し , その後にズレを元に戻して ( $\varepsilon \rightarrow 0$ ) 積分値を求めていますね。つまり , あとの極限操作でズレを元に戻しても , 元々積分経路上に特異点が存在した場合とはならず , 被積分関数の特異点における留数の影響がすべて考慮された結果が得られること になります。

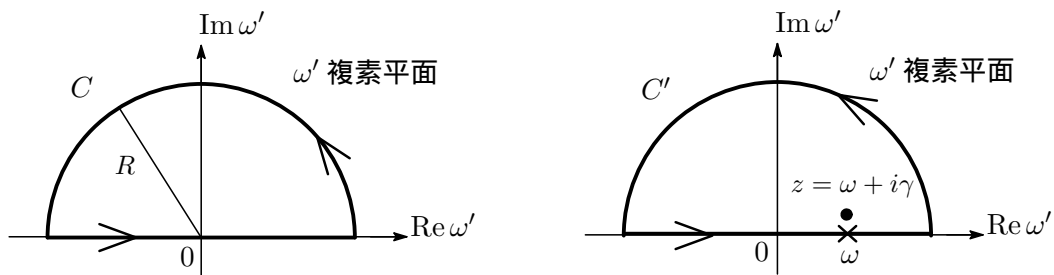
また , 2 ) で A) と B) の計算結果が異なるのは特異点の位置が異なっているため , という事が原因です。(補足終わり)

<sup>29</sup>  $\varphi(x) = f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r}$   
<sup>30</sup>  $\varphi(x) = f(\theta) \frac{e^{-ikr}}{r}$



### 3.7 クラマース・クロニツヒの関係式

$\omega$  を複素数として、複素関数  $\varepsilon(\omega)$  が  $\omega$  複素平面の上半分で正則で、さらに  $|\omega| \rightarrow \infty$  で十分に早くゼロに漸近 ( $|\varepsilon(\omega)| \rightarrow 0$ ) する関数とします。



そうすると左の図に示す閉じた積分経路  $C$  内の任意の点  $z$  に関し、コーシーの積分表示 (1.7), (1.12) より

$$\oint_C \frac{\varepsilon(\omega') - 1}{\omega' - z} d\omega' = 2\pi i \{\varepsilon(z) - 1\}$$

が成立します。上式を整理して

$$\varepsilon(z) = 1 + \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{\varepsilon(\omega') - 1}{\omega' - z} d\omega' \quad (3.34)$$

を得ます。ここで半円の半径を  $R \rightarrow \infty$  とすると被積分関数の分子  $\varepsilon(\omega') - 1$  も速やかに 0 になるので半円からの寄与は無視でき、実軸上の積分経路の積分だけが残ります。したがって、(3.34) は次の無限積分に書き換えることができます。

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon(\omega') - 1}{\omega' - z} d\omega' \quad (3.35)$$

さて、 $z$  は  $\omega$  複素平面の上半分に存在する任意の点でしたが、実軸上の点 (実数値) であるとした場合を考えます。この場合、このままでは積分ができないので、「特異点をずらす方法」のところで行ったように  $z = \omega + i\gamma$  とおいてやると (3.35) は

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon(\omega') - 1}{\omega' - \omega - i\gamma} d\omega' \quad (3.36)$$

と表せます。さらに、(3.29) の表式を使えば

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} (\varepsilon(\omega') - 1) \left\{ P \left( \frac{1}{\omega' - \omega} \right) + i\pi\delta(\omega' - \omega) \right\} d\omega' \quad (3.37)$$

となります。さらに展開を続けると

$$\begin{aligned}\varepsilon(\omega) &= 1 + \frac{1}{2\pi i} \text{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon(\omega') - 1}{\omega' - \omega} d\omega' + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (\varepsilon(\omega') - 1) \delta(\omega' - \omega) d\omega' \\ &= 1 + \frac{1}{2\pi i} \text{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon(\omega') - 1}{\omega' - \omega} d\omega' + \frac{1}{2} (\varepsilon(\omega) - 1) \\ \therefore \varepsilon(\omega) &= 1 + \frac{1}{\pi i} \text{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon(\omega') - 1}{\omega' - \omega} d\omega'\end{aligned}$$

複素関数  $\varepsilon(\omega)$  を実部と虚部に分けて

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_r(\omega) + i\varepsilon_i(\omega) \quad (3.38)$$

と書くと

$$\begin{aligned}\varepsilon_r(\omega) + i\varepsilon_i(\omega) &= 1 + \frac{1}{\pi i} \text{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon_r(\omega') + i\varepsilon_i(\omega') - 1}{\omega' - \omega} d\omega' \\ &= 1 + \frac{1}{\pi} \text{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon_i(\omega') + i(1 - \varepsilon_r(\omega'))}{\omega' - \omega} d\omega'\end{aligned}$$

実部と虚部を比較して

$$\varepsilon_r(\omega) = 1 + \frac{1}{\pi} \text{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon_i(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' \quad (3.39)$$

$$\varepsilon_i(\omega) = -\frac{1}{\pi} \text{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon_r(\omega') - 1}{\omega' - \omega} d\omega' \quad (3.40)$$

を得ます。これが有名なクラマース・クローニツヒの関係式です。クラマース・クローニツヒの関係式は線形応答理論で  $t = 0$  で刺激が与えられたときの応答は  $t > 0$  に生起する<sup>31</sup>という因果律 (causality) から導かれますが、われわれは複素関数  $\varepsilon(\omega)$  が  $\omega$  複素平面の上半分で正則かつ  $|\omega| \rightarrow \infty$  で十分に早くゼロに漸近 ( $|\varepsilon(\omega)| \rightarrow 0$ ) するという条件を課しました。この条件が因果律と等価の関係にあります。このことからわかるように、クラマース・クローニツヒの関係式は上で述べた条件を満たす任意の複素関数に対して成立する普遍的な関係式です。

さて、複素関数  $\varepsilon(\omega)$  の実部と虚部がそれぞれ偶関数と奇関数であるとしします。

$$\begin{aligned}\varepsilon_r(-\omega) &= \varepsilon_r(\omega) : \text{偶関数}, & \varepsilon_i(-\omega) &= -\varepsilon_i(\omega) : \text{奇関数} \\ \varepsilon(-\omega) &= \varepsilon_r(-\omega) + i\varepsilon_i(-\omega) = \varepsilon_r(\omega) - i\varepsilon_i(\omega) = \varepsilon^*(\omega) : \text{複素共役}\end{aligned}$$

そうすると  $\varepsilon_r(\omega)$  は偶関数なので (3.39) は半無限積分にすることができて

$$\begin{aligned}\varepsilon_r(\omega) &= 1 + \frac{1}{\pi} \text{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon_i(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' \\ &= 1 + \frac{1}{\pi} \text{P} \int_{-\infty}^0 \frac{\varepsilon_i(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' + \frac{1}{\pi} \text{P} \int_0^{\infty} \frac{\varepsilon_i(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' \\ &= 1 + \frac{1}{\pi} \text{P} \int_{\infty}^0 \frac{\varepsilon_i(-\omega')}{(-\omega') - \omega} d(-\omega') + \frac{1}{\pi} \text{P} \int_0^{\infty} \frac{\varepsilon_i(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' \\ &= 1 + \frac{1}{\pi} \text{P} \int_0^{\infty} \frac{\varepsilon_i(\omega')}{\omega' + \omega} d\omega' + \frac{1}{\pi} \text{P} \int_0^{\infty} \frac{\varepsilon_i(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' \\ &= 1 + \frac{2}{\pi} \text{P} \int_0^{\infty} \frac{\omega' \varepsilon_i(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega'\end{aligned} \quad (3.41)$$

<sup>31</sup>例えば誘電体に電場  $E$  を加えると分極  $P$  を生じます。このとき電場  $E$  が刺激で分極  $P$  がその応答になります。

と表せます。まったく同様にして

$$\begin{aligned}\varepsilon_i(\omega) &= -\frac{1}{\pi} \text{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon_r(\omega') - 1}{\omega' - \omega} d\omega' \\ &= -\frac{1}{\pi} \text{P} \left\{ \int_{-\infty}^0 \frac{\varepsilon_r(-\omega') - 1}{(-\omega') - \omega} d(-\omega') + \int_0^{\infty} \frac{\varepsilon_r(\omega') - 1}{\omega' - \omega} d\omega' \right\} \\ &= -\frac{1}{\pi} \text{P} \left\{ -\int_0^{\infty} \frac{\varepsilon_r(\omega') - 1}{\omega' - \omega} d\omega' + \int_0^{\infty} \frac{\varepsilon_r(\omega') - 1}{\omega' - \omega} d\omega' \right\} \\ &= -\frac{2\omega}{\pi} \text{P} \int_0^{\infty} \frac{\varepsilon_r(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega'\end{aligned}\tag{3.42}$$

が得られます。

\*\*\*\* お疲れさまでした。第3話が終了しました。\*\*\*\*

・2017.4.17：クラマース・クローニッヒの関係式を追記

#### 参考文献

1. 小野寺嘉孝「なっとくする複素関数」(講談社, 2002)  
非常にわかりやすい内容でポイントを押さえて書かれている好著です。
2. 矢野健太郎, 石原繁「複素解析」(裳華房, 1999)  
コンパクトにまとめられていて, ざっと見直すのに便利です。
3. 飽本一裕「今日から使える複素関数」(講談社サイエンティフィク, 2008)  
豊富なイラストと理解しやすいように工夫されている好著です。