

第4話 テンソル2次曲面とテンソル場

4.1 テンソル2次曲面

4.1.1 主軸問題の復習

- K氏：2次曲面というのは直交座標 x, y, z に関する2次方程式で表される曲面のことで、楕円面とか双曲面といったものがあることはご承知のとおりだ。いまは曲面論に関心がないので、素通りするとして、2次式の主軸問題に焦点を当てた話をしていこう。詳しいことは適当な線形代数のテキストを参照していただくとして、ザット復習をしておこう。 x, y, z の同次2次式

$$F(x, y, z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{13}zx = 0 \quad (4.1.1)$$

で表される2次式を考えると、

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad A_{ij} = A_{ji} \quad (\text{対称行列}) \quad (4.1.2)$$

として、次のように表すことができる。

$$F(x, y, z) = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = {}^t \mathbf{x} A \mathbf{x} \quad (4.1.3)$$

さて、(4.1.1) が適当な直交変換 P で

$$a_1 x'^2 + a_2 y'^2 + a_3 z'^2 = 0 \longrightarrow \begin{pmatrix} x' & y' & z' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = {}^t \mathbf{x}' A \mathbf{x}' \quad (4.1.4)$$

と表すことができるか、つまり標準形の形¹にあらわすことができるか？これは2次形式の主軸問題といわれるね。結論から先に言うと可能だ。 P を直交行列として $\mathbf{x} = P\mathbf{x}'$ という直交変換を(4.1.3)にほどこすと

$${}^t \mathbf{x}' A \mathbf{x}' = {}^t (P\mathbf{x}') A (P\mathbf{x}') = ({}^t \mathbf{x}' {}^t P) A (P\mathbf{x}') = {}^t \mathbf{x} (P^{-1} A P) \mathbf{x}', \quad \text{ただし } {}^t P = P^{-1} \quad (4.1.5)$$

となる。そこで問題は

$$P^{-1} A P = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix} \quad (4.1.6)$$

¹変数の2乗の項だけで表される形。

を満足する適当な直交行列 P が存在するかということになる。これは結論から言うと、 A が対称行列であれば常にそのような直交行列は存在し、行列 A の固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ とすると

$$P^1 A P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \quad (4.1.7)$$

となるというものだった。固有値 λ_i は I を単位行列として、次の行列式を解くことで求められる。

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda & a_{33} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (4.1.8)$$

この方程式を固有方程式という。1つの固有値 λ_i が求めれば λ_i を固有値にもつ固有ベクトル x の成分 (x_1, x_2, x_3) は次の連立方程式を解いて求まる。

$$(A - \lambda I)x = 0 \longrightarrow \begin{cases} (a_{11} - \lambda_i)x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 \\ a_{11}x_1 + (a_{12} - \lambda_i)x_2 + a_{13}x_3 = 0 \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + (a_{13} - \lambda_i)x_3 = 0 \end{cases} \quad (4.1.9)$$

ということで、 $F(x, y, z)$ は適当な直交変換 P により

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 = 0 \quad (4.1.10)$$

と標準形の形になる。新しい座標系の x', y', z' を主軸と呼んでおり、もとの (x, y, z) 座標系からこの (x', y', z') 座標系へ変換することを主軸変換といっている。新しい座標系の直交基底ベクトルを e'_i とすると、これらは固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ に対応する単位固有ベクトルとなる。

$$Ae'_1 = \lambda_1 e'_1, \quad Ae'_2 = \lambda_2 e'_2, \quad Ae'_3 = \lambda_3 e'_3 \quad (4.1.11)$$

以上で主軸問題の復習を終わる。

- エミリー：終わるのはいいのだけど、少し忘れていることもあるので具体的な問題を解いてしっかり思い出すことにしたいわ。2次式 ${}^t x A x$ は適当な直交変換により $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 = 0$ の形に変換することができ、この新しい x, y, z 軸を主軸という。 λ_i は対称行列 A の固有値。主軸の基底ベクトルは固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ に対応する単位固有ベクトルということで、簡単のため2次元平面をとって $\Phi(x, y) = 2x^2 - 2xy + 2y^2 = 3$ という2次曲線の主軸問題を考えるわね。まず

$$F(x, y) = 2x^2 - 2xy + 2y^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (4.1.12)$$

とにおいて、右辺真ん中の行列の対角化をしていく。固有方程式より固有値は

$$\begin{vmatrix} 2 - \lambda & -1 \\ -1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)^2 - 1 = 0 \quad \therefore \lambda = 1, 3 \quad (4.1.13)$$

と得られる。次に $\lambda = 1$ の固有ベクトル x は

$$\begin{cases} (2 - 1)x_1 - x_2 = 0 \\ 2x_1 + (-1 - 1)x_2 = 0 \end{cases} \longrightarrow x_1 = x_2 = u_1 \quad (u_1 \text{ は定数}) \quad (4.1.14)$$

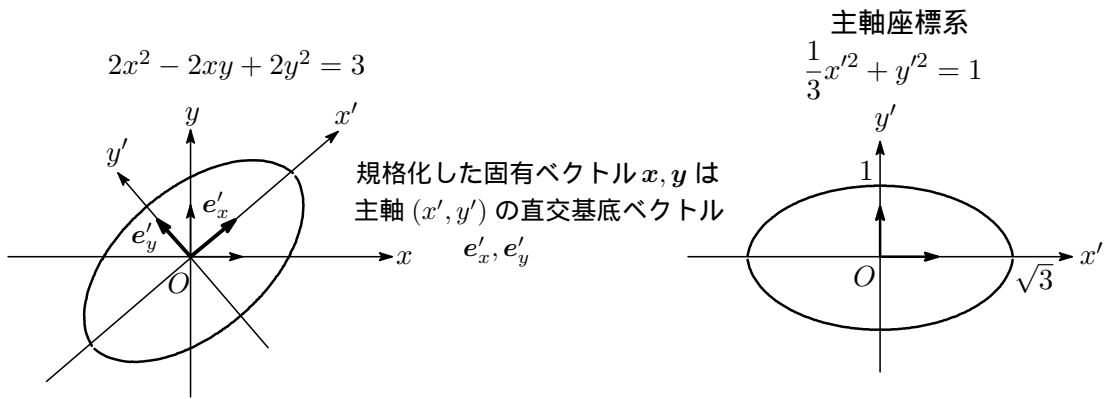
固有ベクトル x の大きさを 1 に規格化すると $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \sqrt{2u_1^2} = 1 \rightarrow u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ となる．
 同じようにして $\lambda = 3$ の場合の固有ベクトル y を求めると

$$-y_1 = y_2 = u_2 \quad (4.1.15)$$

固有ベクトル y の大きさを 1 に規格化すると $u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$. 以上の結果を整理すると

$$\left\{ \begin{array}{ll} 2x^2 - 2xy + 2y^2 = 3 & \text{標準形} \quad \rightarrow \quad x'^2 + 3y'^2 = 3 \\ \text{固有値 : 1} & \text{固有ベクトル} \quad \rightarrow \quad x = e'_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \text{固有値 : 3} & \text{固有ベクトル} \quad \rightarrow \quad y = e'_y = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad (4.1.16)$$

となるという次第で、大きさを 1 に規格化した固有ベクトルは新しい座標系（主軸）の単位直交基底ベクトルになっているのね．



- K氏： そうだね．ここでついでのおまけとしていろいろ役に立つケイリー・ハミルトンの恒等式をあげておこう．一般の 3 次正方行列 $A = (a_{ij})$ については次の恒等式が成立する．

$$\begin{aligned} A^3 - (a_{11} + a_{22} + a_{33})A^2 + (a_{11}a_{22} + a_{22}a_{33} + a_{33}a_{11} - a_{12}a_{21} - a_{13}a_{31} - a_{23}a_{32})A - \det(A)I \\ = A^3 - \text{tr}(A)A^2 + \Phi(A)A - \det(A)I = 0 \end{aligned} \quad (4.1.17)$$

4.1.2 テンソル不変量

- K氏： 2 階テンソルに限って話を進めよう．§ 5.2 「縮約」のところで 2 階テンソル T のトレース (T_{ii}) はスカラー量で座標変換で不変ということを知った．不変量はこれ以外に 2 階テンソルの行列式 $\det(T)$ とか 2 階テンソル成分の 2 乗の和 $\sum_{i,j} (T_{ij})^2$ も不変量になる．一般に任意の 2 階テンソル成分を T_{ij} とすると、 T_{ij} の整式 $F(T_{ij})$ が座標変換で不変であるとき、 $F(T_{ij})$ をテンソル不変量といっている．
- エミリー： 整式 $F(T_{ij})$ というのは T_{ij} についての単項式や多項式というものね．ところで $\det(T)$ とか $\sum_{i,j} (T_{ij})^2$ が不変量になるというのはスカラーになるか、あるいは座標変換で変わらないということだと思うんだけど、詳しく説明いただけるかしら．

- K氏：了解，それがこのセクションのテーマだ．まず $\det(T)$ が不変量となることを証明しよう．テンソルの座標変換前・後 (Σ 系 \leftrightarrow Σ' 系) のテンソル成分の行列式が $\det(T') = \det(T)$ となることを示せばよいわけだね．そこで $T'_{ij} = a_{ik}a_{j\ell}T_{k\ell}$ という変換式を行列形式で表すことを考える．

$$\Sigma \text{系} : \mathbf{y} = T\mathbf{x} \rightarrow \text{変換行列 } A \rightarrow \Sigma' \text{系} : \mathbf{y}' = T'\mathbf{x}' \quad (4.1.18)$$

上の座標変換で

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y}, \quad \mathbf{x}' = A\mathbf{x} \quad (4.1.19)$$

なので (4.1.18) の第 2 式は

$$A\mathbf{y}' = T'A\mathbf{x}, \quad \therefore \mathbf{y}' = A^{-1}T'A\mathbf{x} \quad (\because A^{-1}A = \mathbf{I})$$

となる．(4.1.18) の第 1 式との比較から

$$T = A^{-1}T'A, \quad \therefore T' = ATA^{-1} \quad (4.1.20)$$

が得られる．この行列式をとると

$$\det(T') = \det(A) \det(T) \det(A^{-1}) = \det(T) \quad (4.1.21)$$

となって， $\det(T)$ は不変量になることが分かる．

次に 2 階テンソル成分の 2 乗の和が不変量になるということだけど，テンソル成分の 2 乗の和を具体的に書けば次のようなものだね．

$$\sum_{i,j=1}^3 (T_{ij})^2 = (T_{11})^2 + (T_{22})^2 + (T_{33})^2 + (T_{12})^2 + (T_{13})^2 + (T_{21})^2 + (T_{23})^2 + (T_{31})^2 + (T_{32})^2 \quad (4.1.22)$$

これは整式 $F(T_{ij})$ だね．ところで，第 2 話の §3 の最後で少し触れたけど，テンソル成分の 2 乗の和は実はテンソルの内積だった．いまそのことは兎も角として，座標変換後のテンソルは

$$\begin{aligned} T'_{ij} &= a_{ik}a_{j\ell}T_{k\ell} \\ &= a_{i1}a_{j1}T_{11} + a_{i1}a_{j2}T_{12} + a_{i1}a_{j3}T_{13} \\ &\quad + a_{i2}a_{j1}T_{11} + a_{i2}a_{j2}T_{12} + a_{i2}a_{j3}T_{13} \\ &\quad + a_{i3}a_{j1}T_{11} + a_{i3}a_{j2}T_{12} + a_{i3}a_{j3}T_{13} \end{aligned}$$

両辺の 2 乗の和をとると

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} (T'_{ij})^2 &= \sum_{i,j} \left(\sum_{k,\ell} a_{ik}a_{j\ell}T_{k\ell} \right) \left(\sum_{m,n} a_{im}a_{jn}T_{mn} \right) \\ &= \sum_{k,\ell} \sum_{m,n} \left(\sum_i a_{ik}a_{im} \right) \left(\sum_j a_{j\ell}a_{jn} \right) T_{k\ell}T_{mn} \\ &= \sum_{k,\ell} \sum_{m,n} \delta_{km}\delta_{\ell n} T_{k\ell}T_{mn} \\ &= \sum_{k\ell} T_{k\ell}T_{k\ell} = \sum_{k,\ell} (T_{k\ell})^2 \end{aligned} \quad (4.1.23)$$

となって不変性を証明できた．

- エミリー：テンソルの内積は成分が多いので難儀ね．長ったらしい式を掛け算したうえにさらにサムメーション \sum をとるとというのは貧血を起こしそうになるわ．
- K氏：たしかに ... まあ老婆心ながら一言いっておくと，この手の似た計算は他の分野のところでも遭遇することがあると思うので，短い多項式を作ってコツコツ計算しそのルールのようなものを掴んでおくと後が楽になると思うよ．
さて，2階テンソルの成分の2乗和の平方根をテンソル T の大きさといっている．テンソルの大きさを $\|T\|$ と表すと

$$\|T\|^2 = \sum_{i,j} (T_{ij})^2, \quad \therefore \|T\| = \sqrt{\sum_{i,j} (T_{ij})^2} \quad (4.1.24)$$

と表される．第2話の(2.2.21)も思いだして欲しい．テンソルの大きさという概念に最初はビックリするかも知れないけど，ベクトルの大きさが $\sqrt{a \cdot a} = \sqrt{\sum a_i^2}$ で表されたことを思い浮かべると納得できると思う．当然 $\|T\| \geq 0$ で $\|T\| = 0$ ならそのテンソルはゼロテンソルだね．

4.1.3 テンソル2次曲面

- K氏：ここでの議論は§7.1「主軸問題の復習」の内容がそっくりそのまま役立つ．任意の2階対称テンソルを T とすると，ベクトル x との積 Tx はベクトルになるので，さらにこれと ${}^t x$ とのスカラー積をとったものを Φ とすると

$$\begin{aligned} \Phi = {}^t x \cdot Tx &= \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{12} & T_{22} & T_{23} \\ T_{13} & T_{23} & T_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= T_{11}x^2 + T_{22}y^2 + T_{33}z^2 + 2T_{12}xy + 2T_{23}yz + 2T_{13}zx \end{aligned} \quad (4.1.25)$$

Φ はスカラーなのでこれを c (定数) とおくとこれは座標原点を中心とする2次曲面を表す．これをテンソル2次曲面という．

- エミリー：テンソル2次曲面というのは2次形式の係数がテンソル量となっているのね．

主軸方向はテンソルの主方向

- K氏：うん，それで(4.1.25)は主軸変換によりつぎの標準形にすることができる．

$$\Phi \equiv \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 = c \quad (4.1.26)$$

λ_i は固有値だね．主軸座標はプライムをとって x, y, z とした．この2次曲面の主軸方向をテンソル T の主方向という．この座標系ではテンソル T は

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \quad (4.1.27)$$

という簡単な形になる． λ_i はテンソル T の固有値でテンソルの主値という．新しい座標系での直交基底ベクトルを e_i は固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ に対応する単位固有ベクトルで与えられる．

$$Te_1 = \lambda_1 e_1, \quad Te_2 = \lambda_2 e_2, \quad Te_3 = \lambda_3 e_3 \quad (4.1.28)$$

慣性テンソルの対角化

- エミリー：§ 5.3.2「軸性テンソル」のところで慣性テンソルがでてきたわね。

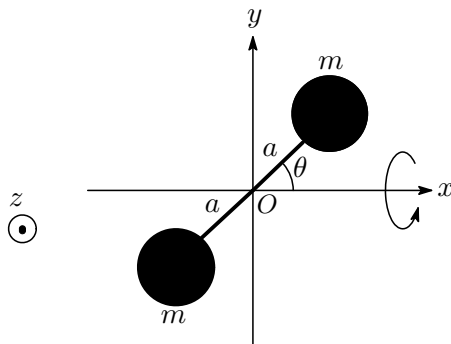
$$J = \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{12} & J_{22} & J_{23} \\ J_{13} & J_{23} & J_{33} \end{pmatrix} \quad (4.1.29)$$

慣性テンソルは2階対称テンソルだから

$$I = \begin{pmatrix} I_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{pmatrix} \quad (4.1.30)$$

と対角化できるのね。

- K氏：そうなんだ。\$I_{11}, I_{22}, I_{33}\$ を主慣性モーメントと呼んでいるが、慣性主軸の周りの慣性モーメントということになる。具体的な事例をみていこう。下図のような質量 \$m\$ の質点を重さの無視できる長さ \$2a\$ の棒でつないだ垂鈴系の物体を考える。絵では大きな黒丸で描いているけど、これはあくまで大きさのない質点ということをお忘れなく。なお、分かりやすいように添え字の数字を \$x, y, z\$ 表記に変えておく。



$$\begin{aligned} J_{xx} &= \sum m_i (y_i^2 + z_i^2) = 2ma^2 \sin^2 \theta \\ J_{yy} &= \sum m_i (z_i^2 + x_i^2) = 2ma^2 \cos^2 \theta \\ J_{zz} &= \sum m_i (x_i^2 + y_i^2) = 2ma^2 \\ J_{yz} &= -\sum m_i y_i z_i = 0 \\ J_{zx} &= -\sum m_i z_i x_i = 0 \\ J_{xy} &= -\sum m_i x_i y_i = -2ma^2 \cos \theta \sin \theta \end{aligned}$$

この質点系が図のように \$x\$ 軸回りに回転しているとした場合の慣性テンソルは次のようになる。このテンソルには慣性乗積の非対角項があるね。

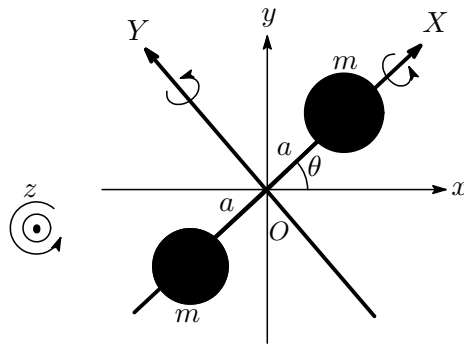
$$J = 2ma^2 \begin{pmatrix} \sin^2 \theta & -\cos \theta \sin \theta & 0 \\ -\cos \theta \sin \theta & \cos^2 \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.1.31)$$

この固有値を求めると

$$I_{XX} = 0, \quad I_{YY} = 2ma^2, \quad I_{ZZ} = 2ma^2, \quad I = 2ma^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.1.32)$$

となる。\$X, Y, Z\$ は主軸変換後の新しい座標だ。これを慣性主軸と呼んでいる。\$I_{XX}\$ は \$X\$ 軸まわりの慣性モーメントで、質点の自転になるけど大きさはないのでこれは 0 になるね。\$I_{YY}, I_{ZZ}\$ はそれぞれ \$Y\$ 軸, \$Z\$ 軸周りの慣性モーメントだね。

さて、テンソル 2 次曲面のお話はこの辺りで切り上げて、次にテンソル場の話へと進もう。

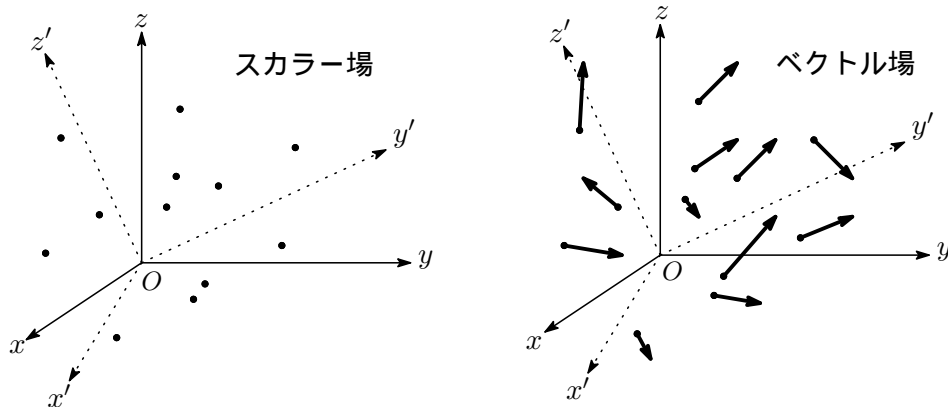


4.2 テンソル場

4.2.1 場という概念について

- K氏：場とはなんだ？ということだけど，高橋康著「古典場から量子場への道」(講談社サイエンスティフィック)に”場”という概念が分かりやすく説明されているのでそこから引用しよう。

『場というものをここではあまりむずかしく考えないで，さしあたり単に空間に分布している物理量であると定義しておこう．たとえば物質が空間に連続的に分布している物理量であると定義しておこう．たとえば物質が空間に連続的に分布しているとき，その密度は一般には空間の点によって異なった値をとるだろう，これを密度の場といてよい．またその物質の各点における速度も，場所によって異なるのが一般であろう，速度を空間の各点の関数と見たとき，それを速度場という』



さらに続けて，著者が昔はじめて場というものを習ったときの有名な実験物理学者の説明が紹介されている．その実験物理学者によれば，

『まず，座標系を設定する．たとえば3次元の直交直線座標を考えよう．その空間の各点に，1個ずつ勝手な数字を書きこむ．それらの数字全体の分布を考えたとき，それがスカラー場である．また，空間の各点に，1個ずつ矢を書き込む，これらの矢の分布を考えたとき，それがベクトル場である．矢の長さが，その点における場の大きさであり，矢の方向が，その点における場の方向である．これらの矢が，あっちもこっちでも，よきによき長くなったり短くなったり，方向を変えたりしていれば，それが時間に依存するベクトル場である．そのよきによきのしかたを決めるのが，場の運動方程式である』

私は嘗てこの文章を読んだとき，気分がスッとしたような感じがしたが，いかがでしょうか．

さて、これで場というもののアウトラインをつかめたと思うので、次に場を定量的に扱うための数学的手段を紹介していこう。

4.2.2 スカラー場とベクトル場

スカラー場

- K氏：まずスカラー場だが、空間の全域あるいは領域で定義された関数 φ を考え、3次元直交座標系 (Σ 系) 空間の各点 $P_i(x_i, y_i, z_i)$ における φ の値を $\varphi(P_i) = \varphi(x_i, y_i, z_i)$ としよう。いま、点 P を別の直交座標系 Σ' から見たとき、その系での座標を $P'(x'_i, y'_i, z'_i)$ としよう。そうすると

$$\varphi(x_i, y_i, z_i) = \varphi'(x'_i, y'_i, z'_i) \quad (4.2.1)$$

が成り立つとき、関数 φ の値は座標系に依存しない値となる。スカラー量は見る視点 (座標系) を変えても変わらない量なので、関数 φ をスカラー場と呼んでいる。空間の各点における量は関数 $\varphi(x_i, y_i, z_i)$ で与えられるということだね。ただ、空間反転のように不連続に視点を変えた場合、符号が反転する擬スカラーというのがあった。

$$\text{空間反転} : \varphi(-x_i, -y_i, -z_i) = -\varphi(x_i, y_i, z_i) \quad (4.2.2)$$

このような場はスカラー場とは考えにくいね。いまはそのことに深入りはしないでおく。

次にベクトル場だが、これも同様に空間の全域あるいは領域の各点 $P(x_i, y_i, z_i)$ における量がベクトル v_P で表されるというものだ。添え字の P は各点でベクトルが異なることを意味している。 v_P は3成分 $(v_{x_i}, v_{y_i}, v_{z_i})$ をもち、それぞれの成分は空間座標 (x_i, y_i, z_i) の関数となる。

- エミリー：スカラー場とかベクトル場とかのイメージは大体つかめたわ。

スカラー場の勾配はベクトル場

- エミリー：ところで場の性質を調べていくためにはすぐ近傍との関係とかある領域での場の量とかを調べていく必要があるわね。そのような場の量が見る視点というか座標変換でどのように変わるか...
- K氏：そうだね。そこでまず勾配について調べていこう。その前に、見通しを良くするために座標系を x, y, z から x_1, x_2, x_3 と変えておく。さて、スカラー場 φ の偏導関数 $\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}$ が座標変換でどのように変換されるかをまず見てみよう。座標は $x'_i = a_{ij}x_j$ と変換されるので、この微分は

$$\frac{\partial x'_i}{\partial x_j} = a_{ij} \quad (4.2.3)$$

スカラー関数の偏微分は合成関数の微分法 $f(g(x)) \rightarrow \frac{df}{dg} \frac{dg}{dx}$ を思いだして

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = a_{ji} \frac{\partial \varphi}{\partial x'_j} \quad (4.2.4)$$

となるね。この両辺に a_{ki} をかけて i について足し算をすると $a_{ki}a_{ji} = \delta_{kj}$ なので

$$a_{ki} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = a_{ki} a_{ji} \frac{\partial \varphi}{\partial x'_j} = \delta_{kj} \frac{\partial \varphi}{\partial x'_j} = \frac{\partial \varphi}{\partial x'_k}$$

ここで添え字を書き換えて整理すると

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x'_i} = a_{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \quad (4.2.5)$$

となる．これはベクトルの変換公式だ．スカラー関数の偏導関数 $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$ は座標変換に対してベクトル成分として振舞う．ベクトル場

$$\nabla \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \mathbf{e}_3 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \mathbf{e}_i = (\nabla_i \varphi) \mathbf{e}_i \quad (4.2.6)$$

をスカラー場 φ の勾配と呼んでいる．スカラー場の勾配はベクトル場だ．(4.2.6) から微分演算子だけを抜きだすと

$$\nabla = \mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \mathbf{e}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \mathbf{e}_3 \frac{\partial}{\partial x_3} = \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (4.2.7)$$

で，この微分演算子をナブラとよんでいる． $\nabla_i \equiv \frac{\partial}{\partial x_i}$ とおくと

$$\nabla = \mathbf{e}_1 \nabla_1 + \mathbf{e}_2 \nabla_2 + \mathbf{e}_3 \nabla_3 = \mathbf{e}_i \nabla_i \quad (4.2.8)$$

微分演算子 ∇ は ∇_i を 3 成分とするベクトルだ．(4.2.5) よりベクトルとしての ∇ の座標変換の公式

$$\nabla'_i = a_{ij} \nabla_j \quad \left(\frac{\partial}{\partial x'_i} = a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \quad (4.2.9)$$

が得られる．スカラー場 φ の勾配はベクトル ∇ とスカラー関数 φ の積と考えられるね．スカラー場の勾配は

$$\nabla \varphi \equiv \text{grad } \varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \right) \quad (4.2.10)$$

とも書かれる．

- エミリー：スカラー場の勾配はベクトル場になるのね．確かに勾配というのは右肩上がりか左肩上がりか云々という調子で傾斜の向きがあるからベクトル場になるといわれればそうだなと思うわ．微分演算子がベクトルというのもエツと思うけど，ベクトルとしての座標変換をうけるのね．
- K氏：最初はエツ!? と思うけど，そのうちに驚かなくなる(笑い)．

スカラー場の方向微分係数

- K氏：スカラー場 φ の $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ 方向への変化率はそれぞれ

$$\mathbf{e}_1 \cdot \nabla \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \quad \mathbf{e}_2 \cdot \nabla \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \quad \mathbf{e}_3 \cdot \nabla \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \quad (4.2.11)$$

で与えられるけど，任意の方向への φ の変化を調べたいときにはどうすればいいだろうか．

- エミリー：う～ん，そうねえ... 任意の方向だから空間に適当な曲線を描き，この曲線に沿った方向への φ の変化を調べればいいのかしら．

- K氏： そうなんだ．空間曲線の位置ベクトルを r とし，弧長を s とすると

$$\mathbf{r}(s) = (x_1(s), x_2(s), x_3(s)) \quad (4.2.12)$$

で表すことができる．そうするとこの曲線に沿った方向への φ の変化率は

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi(x_1(s), x_2(s), x_3(s))}{ds} &= \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} \frac{dx_1}{ds} + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} \frac{dx_2}{ds} + \frac{\partial\varphi}{\partial x_3} \frac{dx_3}{ds} \\ &= (\nabla\varphi) \cdot (\mathbf{r}'(s)) \quad \text{ただし, } \mathbf{r}'(s) = \left(\frac{dx_1}{ds}, \frac{dx_2}{ds}, \frac{dx_3}{ds} \right) \end{aligned} \quad (4.2.13)$$

と表すことができる．ここで $\mathbf{r}'(s)$ の大きさ $\|\mathbf{r}'(s)\|$ は 1 になることに注意しよう²．つまり， $\mathbf{r}'(s)$ は単位ベクトルとなる．これを e_s とすると φ の単位ベクトル e_s 方向への変化率は

$$\frac{d\varphi}{ds} = e_s \cdot \nabla\varphi = \nabla_{e_s}\varphi \quad (4.2.14)$$

で与えられる．ここで $e_s \cdot \nabla$ を ∇_{e_s} で表した．これを φ の e_s 方向への方向微分係数と呼んでいる．とくに

$$\nabla_{e_i}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \quad (4.2.15)$$

である．

ベクトル場

- K氏： ベクトル場 v の e_s 方向の方向微分係数は

$$\frac{dv}{ds} = \frac{\partial v}{\partial x_1} \frac{dx_1}{ds} + \frac{\partial v}{\partial x_2} \frac{dx_2}{ds} + \frac{\partial v}{\partial x_3} \frac{dx_3}{ds} = (e_s \cdot \nabla)v = \nabla_{e_s}v \quad (4.2.16)$$

で与えられる．とくに，

$$\nabla_{e_i}v = \frac{\partial v}{\partial x_i} \quad \left(\nabla_{e_1}v_j = \frac{\partial v_j}{\partial x_1}, \nabla_{e_2}v_j = \frac{\partial v_j}{\partial x_2}, \nabla_{e_3}v_j = \frac{\partial v_j}{\partial x_3} \right) \quad (4.2.17)$$

である．

さて，ベクトル場の流れがどれだけ膨張するかを測る量としての発散 (div) と，流れがどれだけ回転するかを測る量としての回転 (rot) がある．具体的に見ていこう．

ベクトル場の発散はスカラー場

- K氏： ベクトル場 v に対して発散は

$$\operatorname{div} v = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_i} v_i = \nabla \cdot v \quad (4.2.18)$$

というものだ．この式から見て分かるようにベクトル場の発散はスカラー量だね．2つのベクトル場 v, w と1つのスカラー場 φ に対して

$$\begin{cases} \operatorname{div}(v + w) = \operatorname{div}v + \operatorname{div}w \\ \operatorname{div}(\varphi v) = (\operatorname{grad}\varphi) \cdot v + \varphi(\operatorname{div}v) \end{cases} \quad (4.2.19)$$

が成り立つ．

² $\mathbf{r}'(s)^2 = \sum dx_i^2/ds^2 = 1$

ベクトル場の回転はベクトル場（擬ベクトル場）

- K氏：次にベクトル場の回転だが、これは

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \boldsymbol{v} &= \nabla \times \boldsymbol{v} = \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}, \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}, \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) \\ &= (\nabla_2 v_3 - \nabla_3 v_2) \boldsymbol{e}_1 + (\nabla_3 v_1 - \nabla_1 v_3) \boldsymbol{e}_2 + (\nabla_1 v_2 - \nabla_2 v_1) \boldsymbol{e}_3 \end{aligned} \quad (4.2.20)$$

で定義される． $\boldsymbol{w} = \operatorname{rot} \boldsymbol{v}$ とすれば³ベクトル場の回転成分は

$$w_i = \varepsilon_{ijk} \nabla_j v_k \quad (4.2.21)$$

で与えられる．2つのベクトル場 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ の和の回転は個々のベクトル場の回転の和に等しい．

$$\operatorname{rot}(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = \operatorname{rot} \boldsymbol{u} + \operatorname{rot} \boldsymbol{v} \quad (4.2.22)$$

- エミリー：ベクトル場の回転は右回転あるいは左回転？
- K氏：うん，回転方向はその場の状況によるんだ．右手座標系で，仮に $x - y$ 平面上で反時計回りの回転をすればベクトルの方向は z の正の方向を向くし，逆回転となれば z 軸の負の方向を向く，つまり右ネジの法則だね．ベクトル場 \boldsymbol{w} は軸性ベクトル（擬ベクトル）場になるわけだね．
- エミリー：擬ベクトル場には第3話の §5.3.2 「軸性テンソル」のところで学習したように2階反対称テンソル場が付随しているはずね．
- K氏：そうなんだ，擬ベクトル場 \boldsymbol{v} に付随する2階対称テンソル場 (A_{ij}) は次のようなものだね．

$$(A_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & \nabla_1 v_2 - \nabla_2 v_1 & \nabla_1 v_3 - \nabla_3 v_1 \\ \nabla_2 v_1 - \nabla_1 v_2 & 0 & \nabla_2 v_3 - \nabla_3 v_2 \\ \nabla_3 v_1 - \nabla_1 v_3 & \nabla_3 v_2 - \nabla_2 v_3 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.2.23)$$

さて，ここでスカラー場 φ とベクトル場 \boldsymbol{v} に対して成り立つ公式をあげておこう．

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi = \nabla \times (\nabla \varphi) = 0 \\ \operatorname{div} \operatorname{rot} \boldsymbol{v} = \nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{v}) = 0 \\ \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \nabla \cdot (\nabla \varphi) = \nabla^2 \varphi = \Delta \varphi \end{cases} \quad (4.2.24)$$

1番目の式は次のようなイメージで捉えれば分かりやすいと思う．矢印 (grad) の始点を中心にくるっと一回転 (rot) させ，始点を中心放射状に並んだベクトルの和をとると0になるという感じ．同じように2番目は回転の発散なので，擬ベクトル（軸性ベクトル）の向きは対向面で逆向きになり，これらベクトルを足すと0になるね．下の絵を眺めながら自分のイメージで憶えればよいと思う．3番目の Δ はラプラスの演算子とかラプラシアンと呼ばれる微分演算子で， ∇ の内積で与えられ，座標変換で不変なスカラー場となる．

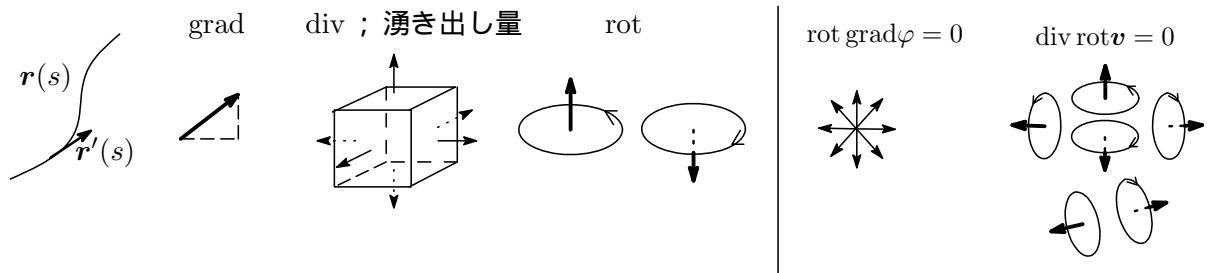
$$\Delta \equiv \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \quad (4.2.25)$$

Δ と grad, div, rot は交換可能で

$$\operatorname{grad} \Delta = \Delta \operatorname{grad}, \quad \operatorname{div} \Delta = \Delta \operatorname{div}, \quad \operatorname{rot} \Delta = \Delta \operatorname{rot} \quad (4.2.26)$$

が成立する．これはベクトルとスカラー (Δ) の積とみなせば憶えやすいと思う．もっとも grad はスカラー関数に作用してベクトルになるんだけど，まあそのことは分かった上でということで ...

³ \boldsymbol{v} を \boldsymbol{w} のベクトルポテンシャルという．



テンソル場

- K氏：テンソル場は空間の各点にテンソル量が分布している場ということだね．ここでは2階テンソル場に限定して話を進めていく．スカラー場で勾配を考えた．この考えをベクトル場 (v) とテンソル場 (T_{ij}) に拡張する．

ベクトル場の勾配は2階テンソル場

- K氏：まずベクトル場 v の勾配を次のように定義する．

$$\nabla v = (\nabla_i v_j) = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla_1 v_1 & \nabla_1 v_2 & \nabla_1 v_3 \\ \nabla_2 v_1 & \nabla_2 v_2 & \nabla_2 v_3 \\ \nabla_3 v_1 & \nabla_3 v_2 & \nabla_3 v_3 \end{pmatrix} \quad (4.2.27)$$

これはダイアドだね．ベクトル場の勾配は2階テンソル場になる．ベクトル場の勾配成分を座標変換すれば

$$\nabla'_i v'_j = (a_{ip} \nabla_p) a_{jq} v_q = a_{ip} a_{jp} \nabla_p v_q \quad (4.2.28)$$

となり， $T_{ij} \equiv \nabla_i v_j$ とおけば上の式は2階テンソルの座標変換公式

$$T'_{ij} = a_{ip} a_{jq} T_{pq} \quad (4.2.29)$$

となる．ベクトル場 v の勾配をとることをベクトル場 v の微分という．

$\nabla \varphi$ はベクトル場で $\nabla \varphi$ の微分 $\nabla \nabla \varphi$ は2階テンソル場となり，その成分は $\nabla_i \nabla_j \varphi$ だね．この場は2階対称テンソル場になる．

$$T_{ij} = \nabla_i \nabla_j \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_i} = \nabla_j \nabla_i \varphi = T_{ji} \quad (4.2.30)$$

また，これから分かるように

$$Tr(T) = T_{ii} = \nabla^2 \varphi = \Delta \varphi \quad (4.2.31)$$

2階テンソル場の勾配は3階テンソル場

- K氏：テンソル場の勾配も同様に

$$\nabla T = (\nabla_i T_{jk}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial T_{jk}}{\partial x_i} \end{pmatrix} \quad (4.2.32)$$

と定義する．テンソル場 T の勾配をとることをテンソル場 T の微分という．2階テンソル場の勾配はベクトル ∇ と2階テンソルの積なので3階のテンソル場になる．

$$\nabla'_i T'_{jk} = (a_{i\ell} \nabla_\ell) a_{jp} a_{kq} T_{pq} = a_{i\ell} a_{jp} a_{kq} \nabla_\ell T_{pq}$$

$\nabla_i T_{jk} \equiv T_{ijk}$ とおけば

$$T'_{ijk} = a_{i\ell} a_{jp} a_{kq} T_{lpq} \quad (4.2.33)$$

これは 3 階テンソルの座標変換公式だね .

- エミリー : スカラー場の勾配はベクトル場 , ベクトル場の勾配は 2 階テンソル場 , 2 階テンソル場の勾配は 3 階テンソル場 ... ということは一般に p 階テンソル場の勾配は $p+1$ 階のテンソル場になるということかしら .
- K 氏 : その通り . 高階テンソル場の微分も同じように定義できるんだね .
さて , ここで勾配についての公式をあげておこう . S は 2 階テンソル .

$$\begin{cases} \nabla(\varphi \mathbf{v}) = (\nabla\varphi) \otimes \mathbf{v} + \varphi \nabla \mathbf{v} & \longrightarrow \nabla_i(\varphi v_j) = (\nabla_i\varphi)v_j + \varphi \nabla_i v_j \\ \nabla(\varphi T) = (\nabla\varphi) \otimes T + \varphi \nabla T & \longrightarrow \nabla_i(\varphi T_{jk}) = (\nabla_i\varphi)T_{jk} + \varphi \nabla_i T_{jk} \\ \nabla(T \otimes S) = (\nabla T) \otimes S + T \otimes \nabla S & \longrightarrow (\nabla_i T_{jk})S_{\ell m} + T_{jk}(\nabla_i S_{\ell m}) \end{cases} \quad (4.2.34)$$

2 階テンソル場の発散はベクトル場

- K 氏 : 2 階テンソル場の発散を

$$\operatorname{div} T = \nabla \cdot T = (\nabla_i T_{ij}) = (\nabla_1 T_{1j} + \nabla_2 T_{2j} + \nabla_3 T_{3j}) \quad (4.2.35)$$

で定義する . テンソル場の発散はベクトル場になる .

$$u_j = \nabla_i T_{ij} = \nabla_1 T_{1j} + \nabla_2 T_{2j} + \nabla_3 T_{3j} \quad (4.2.36)$$

座標変換から

$$\nabla'_i T'_{ij} = a_{ik} a_{ip} a_{jq} \nabla_k T_{pq} = \delta_{kp} a_{jp} \nabla_k T_{pq} = a_{jp} \nabla_p T_{pq}$$

$u_j = \nabla_i T_{ij}$ とすると

$$u'_j = a_{jp} v_p \quad (4.2.37)$$

でこれはベクトルの変換公式だね . ところで 2 階テンソル場には添え字が 2 つあるので , 次の発散も定義できる .

$$v_i = \nabla_j T_{ij} = \nabla_1 T_{i1} + \nabla_2 T_{i2} + \nabla_3 T_{i3} \quad (4.2.38)$$

(4.2.36) をテンソル第 1 添え字の発散とか左発散 , (4.2.38) をテンソル第 2 添え字の発散とか右発散と呼んで区別している . ただし , 対称テンソルの場合は両者は一致するけど .

- エミリー : 2 つの添え字は対等だから左発散と右発散があって当然ね .
- K 氏 : ところで , ベクトル解析でガウスの発散定理というのを習っただろう . 復習するとベクトル場 \mathbf{v} において , 閉曲面 S で囲まれた領域を V とすると

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{v} dV = \int_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS \quad (4.2.39)$$

\mathbf{n} は閉曲面の内部から外部に向いた曲面に垂直な単位ベクトル , というものだったね . テンソル場でも同様の発散定理が成立する .

$$\int_V \operatorname{div} T dV = \int_S T \cdot \mathbf{n} dS \quad (4.2.40)$$

成分で書けば

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{左発散に関して} \quad \int_v \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_i} dV = \int_S T_{ij} n_i dS \\ \text{右発散} \quad " \quad \int_v \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} dV = \int_S T_{ij} n_j dS \end{array} \right. \quad (4.2.41)$$

さて、ここらで第4話を終わることにしよう。第5話は斜交座標系の話をする予定だ。それではまた～。