数学 Tips

〜解析接続〜

KENZOU

2008 年 6 月 29 日

♣ 梅雨が真っ盛りのある晴れた日，コニー が自転車を軽快に走らせてＫ氏を訪ねてきた。

- コニー：こんにちわ，Ｋさん。
- Ｋ氏：いやぁ〜コニー，元気そうだね。少し日焼けしたかな？
- コニー：そうなの，晴れ間を縫ってテニスをしたのだけど，少し焼けたみたい。お肌の手入れには気を使っているのだけど，油断大敵ね。それはそうと，今日お尋ねしたのはズバリ "解析接続ってなに "ということなの。Ｋさんの「複素関数論入門（1），(2)」や「対話・ローラン展開と留数・主値積分について」など，一応目を通したけど，解析接続のことについては触れられていないので，機会があればお伺いしようと思っていたの。
- Ｋ氏：解析接続は複素関数論の大きな目玉だけど，最初はなかなかとっつきにくい。テキストでも終りのほうに書かれてあったり，また，まったくそのことについては書かれていなかったりで，まっ，ともかく，そこへたどり着くまでに轟沈するというか，あるいはスルーしてしまうよね。だけど知らないうちに解析接続の恩恵を受けているのも確かだよ。例えば三角関数の公式で $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ はよくご存知のところだ。これを複素数にまで拡張し，特に証明もなしに $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$ ってやっていると思うけど，これは解析接続のおかげで証明なしに安心して使えるんだ。といってもいまのところピンとこないよね。
- コニー：ぜ〜んぜんピンとこないわ。しかしまぁ，そういうことなのね。
- Ｋ氏：うん。ところで，数学に限らないけど，いきなり本丸に攻め込んでも返り討ちに会うのがおちで，鎧兜の武装はしっかりやっていた方がいいよね。そこで，複素関数論のざっとした復習からすすめようかなと思うのだけど，どうかな。
- コニー：大変結構よ。私も知識が整理できるわ。
- Ｋ氏：OK，それじゃ，ケーワードとなる正則関数のあたりから話を進めていくとしよう。
- コニー：よろしくお願いします。

1 正則関数

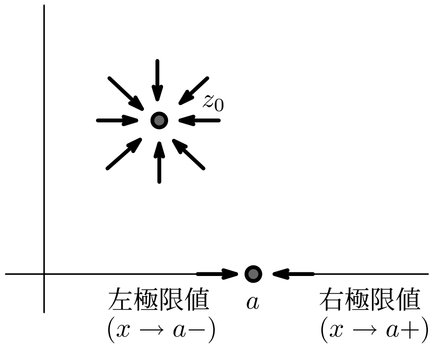
1.1 極限と連続

1.1.1 極限

z_0 の近傍 $0 < |z - z_0| < R$ で定義された複素関数 $w = f(z)$ において，z を z_0 に近づけたとき，w が w_0 に限りなく近づくなら $f(z)$ は極限値 w_0 をもつといい，

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$$

と書く。実関数の場合には，x が x_0 に近づく時には，右と左の 2 つの方向の 2 通りしかなく，実関数 $f(x)$ が $x = a$ で極限値をもつというのは右極限値と左極限値が一致する $\lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a-} f(x)$ 場合であった。一方，複素関数の場合，**東西南北，四方八方，あらゆる方向から近づくことができ，この無数の近づき方すべてについての極限値が等しいときに極限値をもつ**こと。これが実関数の場合と決定的に異なる点で，複素関数を特長づけている。



実関数の場合と同じように，複素関数においても $\lim_{z \to z_0} f(z) = A,\ \lim_{z \to z_0} g(z) = B$ が存在して有界ならば

(1) $\lim_{z \to z_0} \{f(z) \pm g(z)\} = A \pm B$

(2) $\lim_{z \to z_0} \{f(z) \cdot g(z)\} = AB$

(3) $\lim_{z \to z_0} \left\{ \dfrac{f(z)}{g(z)} \right\} = \dfrac{A}{B}, \quad B \neq 0$

が成立する。

1.1.2 連続

また，領域 D で定義された複素関数 $w = f(z)$ が D 内の点 z_0 で $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$ が成り立つとき，$f(z)$ は z_0 で連続であるという。

(1) $f(z), g(z)$ が z_0 で連続であれば，$f(z) \pm g(z), f(z) \cdot g(z), f(z)/g(z)$（ただし $g(z = 0) \neq 0$）はいずれも z_0 で連続である。

(2) $F(w)$ は $w = w_0$ で連続，$w = f(z)$ は z_0 で連続で，$w_0 = f(z_0)$ ならば，合成関数 $F(f(z))$ が z_0 で連続である。

1.2 微分係数と導関数

領域 D で定義された $w = f(z)$ に対し，D 内の点 z_0 で

$$\frac{df}{dz} = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \tag{1.1}$$

が存在し，その絶対値が有界であるとき，$f(z)$ は z_0 において微分可能であるといい，この極限値を微分係数と呼び $f'(z_0)$ と表す。領域 D の任意の点で微分可能な関数を「領域 D で正則」という。また，複素関数 $f(z)$ が点 z_0 で正則であるとは，点 z_0 の近傍の各点で微分可能なことをいい，点 z_0 を関数 $f(z)$ の正則点と呼ぶ。また，関数 $f(z)$ が $z = z_0$ で正則でないとき，点 z_0 を特異点という。正則な複素関数の微分は実関数の微分法のルールがそのまま成り立つ。

(1) $\{f(z) \pm g(z)\}' = f'(z) \pm g'(z)$

(2) $f(z) \cdot g(z)' = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$

(3) $\left\{ \dfrac{f(z)}{g(z)} \right\}' = \dfrac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g(z)^2}$

微分の定義（1.1）を詳しくフォローしてみよう。z を極形式に書き換えて（偏角 θ は変数としておいておく）

$$\Delta z = \Delta r e^{i\theta} \tag{1.2}$$

とする。これを (1.1) に代入すると

$$\frac{df}{dz} = \lim_{\Delta r \to 0} \frac{f(z + \Delta r e^{i\theta}) - f(z)}{\Delta r} e^{-i\theta} \tag{1.3}$$

となる。複素関数 $f(z)$ が z_0 において微分可能であるということは，(1.3) の極限値が存在し，しかも偏角 θ によらない（つまりあらゆる方向からのアプローチで極限値が存在する）ということである。つまり，”**微分可能な複素関数関数** $f(z)$ **はあらゆる方向に滑らか**”ということを意味している。また，のちほど明らかになるが[1]，複素関数は**１回微分可能であれば，自動的に何回でも微分可能**という実関数にはない驚くような性質をもっている。

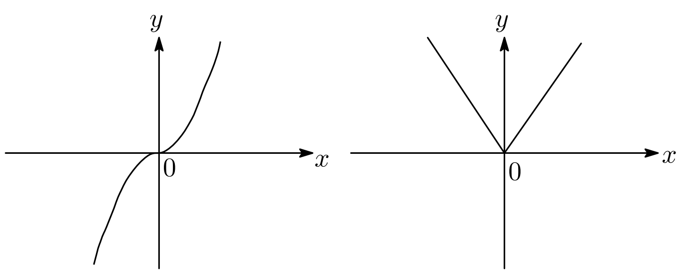
[`Example`] 次の実関数の微分回数を調べてみよう。

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & (x \geq 0) \\ -x^2 & (x < 0) \end{cases} \tag{1.4}$$

$f(x)$ を 1 回微分すると

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & (x \geq 0) \\ -2x & (x < 0) \end{cases} \tag{1.5}$$

となる。



$f'(x)$ の幾何学的な意味は接線の傾きということを念頭において，$f'(0) = 0$（傾きが 0) となり，$f'(x)$ は $x = 0$ で滑らかにつながっているので連続関数である。しかし $f'(x)$ は $x = 0$ で尖がっているため，接線をひくことができない。したがって $f'(x)$ は $x = 0$ で微分不可能となる。

1.2.1　コーシー・リーマン方程式

複素関数 $f(z)$ が微分可能であるためには，(1.3) で微分係数 df/dz は偏角 θ に依存してはならないことをみた。このことを見やすい式で表したのがコーシー・リーマンの方程式である。
微小な複素数 Δz を実部と虚部に分けて

$$\Delta z = \Delta x + i\Delta y, \quad (\, z = x + iy \,) \tag{1.6}$$

とおく。次に，$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ とおいて

$$\begin{aligned} f(z + \Delta z) - f(z) = &\, u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y) \\ &+ i\{v(x + \Delta x, y + \Delta y) - v(x, y)\} \end{aligned} \tag{1.7}$$

関数 u, v の全微分をとると

$$u(x + \Delta x, y + \Delta y) = u(x, y) + \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y \tag{1.8}$$

$$v(x + \Delta x, y + \Delta y) = v(x, y) + \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y \tag{1.9}$$

[1] 「コーシーの積分表示」の項を参照。

となるので，これを（1.7）に入れると

$$
\begin{aligned}
f(z+\Delta z)-f(z) &= \Delta x\frac{\partial u}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial u}{\partial y}+i\Delta x\frac{\partial v}{\partial x}+i\Delta y\frac{\partial v}{\partial y} \\
&= \left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Delta x+\left(\frac{\partial u}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial y}\right)\Delta y \qquad (1.10)
\end{aligned}
$$

Δx,Δy は偏角 θ と Δr を使って

$$
\Delta x=\Delta r\cos\theta,\quad \Delta y=\Delta r\sin\theta,\quad \Delta z=\Delta r e^{i\theta} \qquad (1.11)
$$

と書くことができる。したがって

$$
\frac{df}{dz}=\lim_{z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\cos\theta e^{-i\theta}+\left(\frac{\partial u}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial y}\right)\sin\theta e^{-i\theta} \qquad (1.12)
$$

を得る。恒等式 $\cos\theta=e^{i\theta}-i\sin\theta$ を上式の右辺に入れると

$$
\frac{df}{dz}=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}+\left[\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}-i\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right]\sin\theta e^{-i\theta} \qquad (1.13)
$$

となる。（1.13）が，偏角 θ に関係なく成り立つためには，右辺の [ ] の複素数の項がゼロでなければならない。すなわち，実部=0，虚部=0 で，この結果

$$
\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x} \qquad (1.14)
$$

を得る。（1.14）をコーシー・リーマンの方程式という。複素関数 $f(z)$ の微分可能性はコーシー・リーマンの方程式が成り立つかどうかを調べることで分かる。

例題 1：$w=z^2$ は複素平面上のすべての点で正則（微分可能）[2]であるか。
答：$z=x+iy$ とすると

$$
\begin{aligned}
&z^2=(x+iy)^2=x^2-y^2+2ixy=u+iv \\
&\frac{\partial u}{\partial x}=2x=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-2y=-\frac{\partial v}{\partial x}
\end{aligned}
$$

コーシー・リーマンの方程式が成り立つので，$w=z^2$ は複素全平面で正則である。

例題 2：関数 $f(z)=|\,z\,|^2$ は
(1) どんな点で微分可能か
(2) どんな点で正則か
答：$z=x+iy$ とすると

$$
\begin{aligned}
&f(z)=|\,z^2\,|=(x+iy)(x-iy)=x^2+y^2=u+iv \\
\therefore\quad &u=x^2+y^2,\quad v=0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial x}=2x,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=0 \\
&\frac{\partial u}{\partial y}=2y,\quad \frac{\partial v}{\partial x}=0
\end{aligned}
$$

となるから，$z=0$ ($x=y=0$) のときにのみコーシー・リーマン方程式が成り立つ。したがって，関数 $f(z)$ は
(1) 複素平面上の 1 点 $z=0$ で微分可能であり，
(2) 複素平面上のすべての点で正則でない。

[2] 実際上は正則と微分可能は同じと思って差し支えないが，厳密には僅かに異なる。つまり，関数 $f(z)$ が点 $z=z_0$ と ”その近傍 ”で微分可能なときに，関数 $f(z)$ は点 z_0 において正則であるという。

1.3　特異点

　複素関数 $f(z)$ が正則であるとは，その点 z で微分可能であることであった。$f(z)$ が正則でない点を特異点という[3]。特異点は次のように分類できる。

(1) 面状，あるいは線状に密集した特異点たち。··· 例題 2 がこのタイプの特異点をもつ。

(2) 1 点に孤立した特異点。

この孤立特異点はさらに次のように分類される（ここでは分岐点の詳しい議論はやらない。）

(1) 除き得る特異点

(2) 極

(3) 真性特異点

(4) 分岐点

1.3.1　除き得る特異点

　関数 $f(z)$ が 1 点 z_0 を覗いて一価正則で $|\,f(z)\,|$ が有界である場合，点 z_0 を**除きうる特異点**という。これは，

$$f(z_0) = \lim_{z\to z_0} f(z) \tag{1.15}$$

と改めて定義しなおすことで，$f(z)$ を $z = z_0$ を含む領域で一価正則にすることができる。これにより特異点 $z = z_0$ を取り除くことができる。関数 $f(z) = \dfrac{z}{e^z - 1}$ は，$z = 0$ の特異点をもつ。関数 $f(z)$ の $z = 0$ の極限値を求めると

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{z}{e^z - 1} = 1$$

となる。そこで，特異点 $z = 0$ での関数 $f(z)$ の値をあらためて $f(0) = 1$ と定義しなおすことで $z = 0$ の特異点を取り除くことができる。

1.3.2　極

　関数 $f(z)$ が点 $z = z_0$ の近傍で一価正則とする。このとき，$z \to z_0$ で

$$\lim_{z\to z_0} |\,f(z)\,| = \infty \tag{1.16}$$

となる場合，$z = z_0$ を**極**という。また，関数 $f(z)$ が $z = z_0$ のまわりで $\dfrac{1}{(z - z_0)^n}$ のように振舞うとき，z_0 を関数 $f(z)$ の N 位の極という。ただし，N は正の整数である。$\dfrac{1}{z - z_0}$，$\dfrac{1}{(z - z_0)^2}$，$\dfrac{1}{(z - z_0)^3}$ 等はそれぞれ 1 位，2 位，3 位の極をもつという。

例題 4：関数 $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$ は, どんな特異点をもつか。
答：

$$f(z) = \frac{1}{(z - i)(z + i)}$$

となるので，この関数 $f(z)$ は $z = i, -i$ に 1 位の極をもつ。

[3] 正則である点を正則点という。

1.3.3 真性特異点

関数 $f(z)$ が $z = z_0$ を除いてその近傍で一価正則であり，$z = z_0$ で有界ではないが，$z = z_0$ が「除きうる特異点」でも,「極」でもないとき，$z = z_0$ を**真性特異点**という[4]。
関数 $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ を考える。この関数は

$$
\begin{aligned}
z = x(x > 0) \text{ とすると} \qquad & \lim_{x\to+0} f(z) = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}} = \infty \\
z = -x(x < 0) \text{ とすると} \qquad & \lim_{x\to-0} f(z) = \lim_{x\to+0} e^{\frac{1}{-x}} = 0
\end{aligned}
$$

となって，点 $z = x$ は，取り除きうる特異点でもなければ，極でもない。真性特異点である。

例題 5：関数 $f(z) = e^{\frac{1}{z-a}}$ は, どんな特異点をもつか。
答：a は真性特異点である。指数関数の定義を使ってこの関数を展開すれば

$$f(z) = e^{\frac{1}{z-a}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{(z-a)^n}$$

となるので，$N = \infty$ の極を真性特異点と考えることができる。

例題 6：関数 $f(z) = (z + i)e^{\frac{1}{z+i}}$ は, どんな特異点をもつか。
答：指数関数の定義を使うと

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

したがって $f(z)$ は次のように展開できる。

$$f(z) = (z+i)e^{(z+i)^{-1}} = (z+i)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+i)^{-n}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(z+i)^{n-1}}, \quad (|\, z + i\,| > 0)$$

これから $z = -i$ は真性特異点である。

1.3.4 分岐点

べき乗関数 $(z - z_0)^b$（b$\neq$ 整数）や対数関数 $\log(z - z_0)$ は，$z = z_0$ のまわりで**偏角を 2π だけ変化させたときに関数値がもとの値に戻らない**という特長をもつ。このような点（いまの場合 $z = z_0$）をその関数の分岐点という。例えば $w = z^b$ という関数を考える。z を極形式で表し，$z = e^{i\theta}$ としておく。偏角 θ を 0 から 2π まで変えた関数値の変化をみよう。

θ	0	$\to$	θ	$\to$	2π
z	1	$\to$	$e^{i\theta}$	$\to$	$e^{i2\pi} = 1$
w	1	$\to$	$e^{ib\theta}$	$\to$	$e^{i2\pi b}$

偏角 θ が一周して 2π になると z ははじめの点に戻るが，w の方は，$b = n$（整数）ならば，$e^{i2\pi n}$ だから，はじめの値 1 に戻るが，$b \neq$ 整数ならば，$\theta = 2\pi$ になっても w ははじめの値に戻らない。つまり，1 つの複素数 z に対して複数個の関数値 w が存在する。このような関数は多価関数と呼ばれる。この多価関数の取り扱いはリーマン面というのを考えてやっていくのだが，これについてはここではこれ以上追求しない。

♣ *Q&A* ———

- K氏：ちょっと一息つこうか。冷たい缶コーヒーでもいかが？

[4] $z \to z_0$ の極限のとり方により ∞ を含めいろいろな値をとる。e^z や $\sin z$ などでは $z = \infty$ は真性（孤立）特異点となっている。

- コニー：ありがとう，ご馳走になるわ。しかし，こうして復習して改めて感じるんだけど，複素関数の正則条件というのは実関数の場合と違って非常に強力な条件なのね。1 回微分可能であれば，何回でも微分可能というのは本当に凄い性質ね。正則関数というのはウルトラ級の超ツルツルの関数といったところね。特異点はそういう非常に滑らかなところに節穴のポツポツあるというか。。。目止めで隠せる節穴は除きうる特異点，そうでないものは，真性特異点というようにメージすると想像しやすいわ。

- K氏：うん，そうだね。ところで真性（孤立）特異点のなかで集積特異点というのもあるんだ。例えば $f(z) = \mathsf{cosec}(1/z)$ の特異点は $z = 1/n\pi\ (n = \pm 1, \pm 2, \cdots)$ で，これは n が有限の値であれば 1 位の極だけど，$z = 0$ の近傍にはこれらの特異点は無数に存在するよね。つまり，$z = 0$ を中心としたどんな小さな円の中にも必ず特異点が含まれてしまう。このような点 $z = 0$ を**集積特異点**といって，真性特異点の１つに数えられるんだ。ところで，少し天下り的に正則関数は何回でも微分可能だといったけど，のちほど**「グルサの公式」**でこの点に触れるから楽しみにしておいて。

- コニー：そうなの,。了解しました。ところで，微分の定義で，偏角によらずにアプローチというか，あらゆる角度からアプローチしていく，ということを言われていたけど，微分可能性を検証するコーシー・リーマン方程式の導出をみると，そのあたりの様子がよく分かるわね。

- K氏：うん，大抵のテキストではこの点あまり触れていないように思うんだけど，ここの導出は小野寺義孝著「なっとくする複素関数」からの拝借だよ。この本は大変分かりやすく，丁寧に書かれているから，是非図書館等で見てみるといいよ。

- コニー：そうなの，メモっておくわ。ところで例えば $y = 1/x$ という関数で，x が原点にアプローチする方向は $x \to +0$ と $x \to -0$ の 2 通りで，それぞれ $+\infty$，$-\infty$ と無限大がプラスとマイナスというように違いが生じるけど，$f(z) = 1/z$ という複素関数の場合，極形式に書き換えて $\frac{1}{r}e^{-i\theta}$ として，$r \to 0$ とアプローチした場合，偏角 θ の値によって無限大でも大小が生まれるのかしら，そのあたりはどうなのかしら？

- k：うん，いいところに気付いたね。確かに大小無限大が生じるけど，複素関数論ではそれらを取りまとめて**無限遠点**と呼んでいるんだ。

- コニー：そうなの。無限遠点って限りなく遠いところにある点ということね。そういえば平行線は無限遠で交わっているとかいうのを数学の時間に聞いたことがあるわ。

- K氏：リーマン幾何学だね。まっ，ここではその程度に止めておこう。ところでここから見える無限遠点の空は見事に快晴だね。 空気も新鮮だし，気分もリフレッシュするね。どれ，一休みを切り上げて次の話に入ろうか。

- コニー：そうね，お願いします。

2 複素積分

複素関数の積分は，始点 z_1 と終点 z_2，被積分関数 $f(z)$ に加えて，z_1 から z_2 まで，どのような経路を通っていくかを指定するという，複素平面上の線積分として定義される。実関数の積分は，一次元の数直線上の区間を指定すればよかったのに対し，複素数の場合は 2 次元ガウス平面の始点，終点とそれを結ぶ経路に自由度があるためである。複素積分は次のように表される[5]。

$$I = \int_C f(z)dz \tag{2.1}$$

また，経路がぐるっと一回りする場合は

$$I = \oint_C f(z)dz \tag{2.2}$$

[5] 積分記号の下についている C は積分経路の記号を意味しており，英語の *contour*(輪郭線）の C からきている。

と○をつけた積分記号が使われる。そして，複素積分の値 I は，**”一般に ”積分の経路に依存する**[6]。始点 z_1 から終点 z_2 まで C とは逆向きにたどる経路（$z_2 \to z_1$）を $\bar{C}$ とすると

$$\int_{\bar{C}} f(z)dz = -I \tag{2.3}$$

となって,（2.1）の逆符号をとる。複素積分の要点を纏めると次にようになる。

- 複素平面の点 z_1 から z_2 に至る経路 C の方程式を

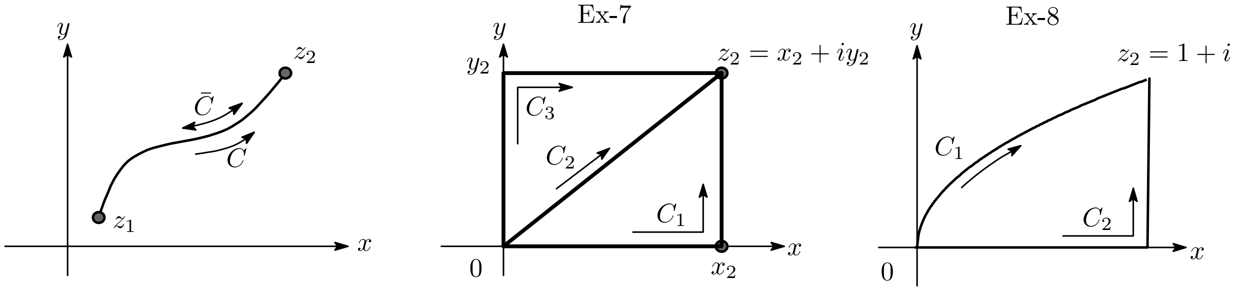
$$z = z(t) = x(t) + iy(t), \quad (\alpha \le t \le \beta)$$

  とし，$z(\alpha) = z_1$, $z(\beta) = z_2$ とする。実数 t（$\alpha \le t \le \beta$）の連続関数 $f(t) = u(t) + iv(t)$ に対し，その積分を次のように定義する。

$$\int_{z_1}^{z_2} f(t)dt = \int_{z_1}^{z_2} u(t)dt + i\int_{z_1}^{z_2} v(t)dt \tag{2.4}$$

- 複素積分は，正則な領域では，積分経路をどのように変形しても，その値は変わらない。
  $f(z)$ が領域 D で正則ならば，D 内の点 z_1 から z_2 に至る経路 C に対し次式が成立する。

$$\oint_C f'(z)dz = \Big[f(z)\Big]_{z_1}^{z_2} = f(b) - f(a) \tag{2.5}$$



例題 7：上図右の積分経路に沿って $I_n = \displaystyle\int_{C_n} zdz \quad (n = 1, 2, 3)$ を計算せよ。

答：経路 C_1 を考える。この経路は x 軸上の x_2 までの水平経路とそこから終点 z_2 までの垂直経路からなるので，I_1 はこの 2 つの経路の足し算で表される。

$$I_1 = \int_H zdz + \int_P zdz \quad （H：水平, P：垂直）$$

水平経路は実関数の積分と同じになるから

$$\int_H zdz = \int_H xdx = \frac{1}{2}x^2$$

一方，垂直経路は $z = x_2 + iy \quad (0 \le y \le y_2)$ となるから $dz = idy$ となって

$$\int Pzdz = i\int_0^{y_2} (x_2 + iy)dy = ix_2y_2 - \frac{1}{2}y_2^2$$

したがって経路 C_1 の積分値は

$$I_1 = \frac{1}{2}x^2 + ix_2y_2 - \frac{1}{2}y_2^2 = \frac{1}{2}(x_2 + iy_2)^2 = \frac{1}{2}z_2^2 \tag{2.6}$$

となる。次に，経路 C_2 の場合は，経路 C_2 は直線 $y = (y_2/x_2)x$ で与えられるので

$$z = x + iy = x + i\frac{y_2}{x_2}x = \left(1 + i\frac{y_2}{x_2}\right)x$$

$$dz = \left(1 + i\frac{y_2}{x_2}\right)dx$$

$$I_2 = \int_{C_2} zdz = \int_0^{x_2} \left(1 + i\frac{y_2}{x_2}\right)^2 dx = \frac{1}{2}(x_2 + iy_2)^2 = \frac{1}{2}z_2^2$$

[6] ただし，正則な領域では積分経路に関係なく始点と終点だけで値が決まる。

最後に，経路 C_3 の場合は，経路 C_1 と同様に垂直経路と水平経路の足し算になる。垂直経路の場合は

$$\int_P zdz = -\int_0^{y_2} ydy = -\frac{1}{2}y_2^2$$

水平経路の場合は

$$\int_H zdz = \int_0^{x_2}(x+iy_2)dx = \frac{1}{2}x^2 + ix_2y_2$$

したがって

$$I_3 = \frac{1}{2}x_2^2 - \frac{1}{2}y_2^2 + ix_2y_2 = \frac{1}{2}z_2^2$$

結局，経路に関係なく $I_1 = I_2 = I_3$ となった。これは関数 $f(z) = z$ が複素平面上で正則関数だからで，<u>正則関数の場合，積分経路に依存しない</u>。

例題 8： 0 から $1+i$ に至る経路 C_1, C_2 に沿って次の関数を積分せよ。ただし，経路 C_1 は放物線 $x = y^2$ の一部とする。

(1) $f(z) = \bar{z}$ ， (2) $f(z) = z^2$

答：

(1) 経路 C_1 をパラメータ表示すると，$x(t) = t^2, y(t) = t$ $(0 \le t \le 1)$ となるので，$z(t) = x(t) + iy(t) = t^2 + it$ と書ける。これから $dz = (2t+i)dt$。また，$\bar{z}(t) = x(t) - iy(t) = t^2 - it$ であるから

$$\int_{C_1} \bar{z}dz = \int_0^1 (t^2 - it)(2t+i)dt = 1 - i\frac{1}{3}$$

次に経路 C_2 は水平経路と垂直経路の 2 つに分けて，水平経路は $x = t, y = 0$ $(0 \le t \le 1)$，垂直経路は $x = 1$, $y = t$ $(0 \le t \le 1)$ であるから

$$\int_{C_2} \bar{z}dz = \int_H \bar{z}dz + \int_P \bar{z}dz = \int_0^1 tdt + \int_0^1 i(1-it)dt = 1 + i$$

この例の場合，関数 $f(z) = \bar{z}$ が正則関数でないため経路により積分値は異なる値をとる。

(2)$f(z) = z^2$ は複素平面上で正則であるから，公式（2.5）より

$$\int_{C_1} z^2dz = \int_{C_2} z^2dz = \int_0^{1+i} z^2dz = \left[\frac{1}{3}z^3\right]_0^{1+i} = -\frac{2}{3}(1-i)$$

例題.9： 積分経路 C を中心 a の円とする。n を整数とするとき次の式を証明せよ。

$$\oint_C (z-a)^n dz = \begin{cases} 2\pi i & n = -1 \\ 0 & n \neq -1 \end{cases} \tag{2.7}$$

答： 極形式で $z - a = re^{i\theta}$ とおくと，$dz = ire^{i\theta}d\theta$ となるので

$$\oint_C (z-a)^n dz = i\oint_0^{2\pi} (re^{i\theta})^n re^{i\theta}d\theta = ir^{n+1}\oint_0^{2\pi} e^{i(n+1)\theta}d\theta = I_n$$

$$\therefore\ n = -1 \text{ のとき} \quad I_n = i\oint_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i$$

$$n = 1 \text{ のとき} \quad I_n = ir^{n+1}\left[\frac{e^{i(n+1)\theta}}{n+1}\right]_0^{2\pi} = 0$$

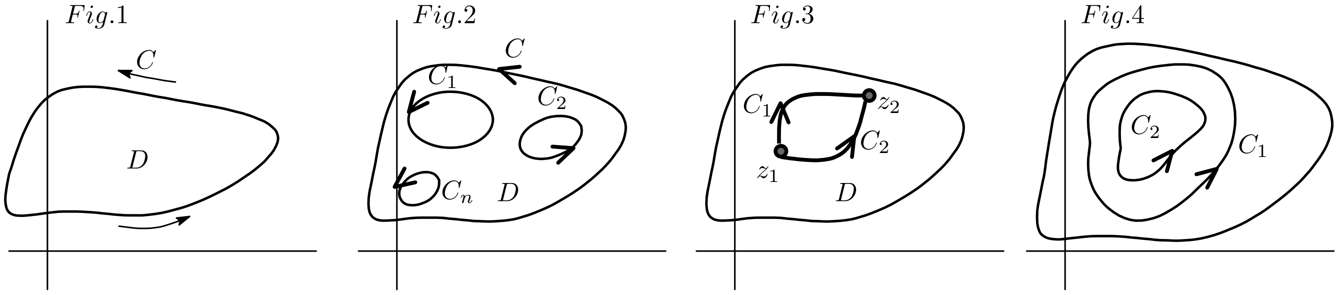
この結果はよく利用するので，覚えておくと何かと便利。

2.1 コーシーの積分定理

関数 $f(z)$ が複素平面上の閉曲線 C とその内部で正則ならば，C を一周する経路に沿った $f(z)$ の積分値はゼロである。

$$\oint_C f(z)dz = 0 \tag{2.8}$$

コーシーの定理は実関数では見られないもので，どんな複素関数であっても，関数が正則であれば，複素平面上を一周して積分すればゼロになるという，非常にスッキリした内容[7]である。



[証明]　$z = x + iy$ として $dz = dx + idy$ となる。関数 $f(z)$ を実部と虚部に分けて $f(z) = u + iv$ と書くと

$$\oint_C f(z)dz = \oint (u+iv)(dx+idy) = \oint_C \{(u+iv)dx + (iu-v)dy\} = \oint_C (Pdx + Qdy)$$

ただし，$P = u + iv$, $Q = iu - v$ とおいた。ここで線積分と二重積分を結び付ける次のグリーンの定理[8]を使う。P, Q は x, y の関数として

$$\oint_C (Pdx + Qdy) = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \tag{2.9}$$

（2.9）の右辺の被積分関数は

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) + i\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

となるが，正則関数を特長づける（1.14）のコーシー・リーマンの方程式よりこの項はゼロになるので，コーシーの積分定理（2.8）が証明された。コーシーの積分定理から次のことがいえる[9]。

- 関数 $f(z)$ が閉曲線 C および C で囲まれた領域 D のすべての点で正則ならば（$Fig.1$）

$$\oint_C f(z)dz = 0 \tag{2.10}$$

- 関数 $f(z)$ が閉曲線 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ およびこれらで囲まれた領域 D のすべての点で正則ならば（$Fig.2$）

$$\oint_C f(z)dz = \oint_{C_1} f(z)dz + \oint_{C_2} f(z)dz + \cdots + \oint_{C_n} f(z)dz \tag{2.11}$$

- 関数 $f(z)$ は領域 D で正則とし，z_1 から z_2 に至る D 内の経路 C_1, C_2 に対して，これらによって囲まれた範囲が領域 D に含まれるとき（$Fig.3$）

$$\oint_{C_1} f(z)dz = \oint_{C_2} f(z)dz \tag{2.12}$$

- 関数 $f(z)$ は領域 D で正則とする。D 内の閉曲線 C_1, C_2 に対して Fig4 のような範囲（ドーナツ領域）が D に含まれるとき，

$$\oint_{C_1} f(z)dz = \oint_{C_2} f(z)dz \tag{2.13}$$

コーシーの積分定理によれば，複素関数は正則な領域では積分の経路をどのように変形してもその値は変わらないことをみてきた。逆にいうと，被積分関数が正則である限り積分経路は自由に変形できるが，特異点があると，そこを超えて変形することは許されないということになる（例題 7〜8 参照）。例題.8 でそのような例をみ

[7] 逆も真なりで，周回積分がゼロになるなら関数 $f(z)$ は正則となる。
[8] グリーンの定理の解説・証明は http://www12.plala.or.jp/ksp/vectoranalysis/GreensTheorem/を参照ください。尚，3 次元に拡張したものはストークスの定理と呼ばれる。
[9] ここでは証明を略します。

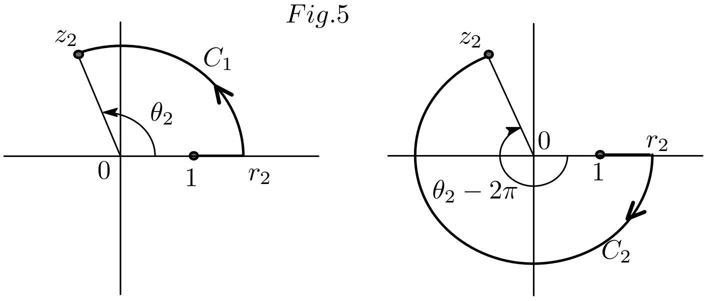
たが，ついでだからもう一つ例をあげておこう。

例題.10 始点 $z=1$ を出発して，Fig.5 の経路 C_1 を通り，終点 $z_2=r_2e^{i\theta_2}$ に到る積分

$$I_1=\int_{C_1}\frac{1}{z}dz,\quad I_2=\int_{C_2}\frac{1}{z}dz$$

を計算せよ。また，経路 C_2 を通る場合はどうなるか計算せよ。

$Fig.5$



答：関数 $f(z)=\dfrac{1}{z}$ は $z=0$ に特異点をもつから，積分経路によって異なる値を持つ。そこでまず I_1 を計算しよう。例によって水平経路と円弧の経路にわける。水平部分は $y=0$ だから $f(z)=1/z=1/x$ と実関数になる。そこで

$$I_1^{\text{水平}}=\int_0^{r_2}\frac{1}{x}dx=\log r_2$$

次に，円弧の経路は，極形式を使って $z=r_2e^{i\theta}$ とおく。$dz=ir_2\theta e^{i\theta}$ となるので

$$I_1^{\text{円弧}}=\int_{r_2}^{z_2}\frac{1}{z}dz=i\int_0^{\theta_2}\frac{1}{r_2}e^{-i\theta}r_2e^{i\theta}d\theta=i\theta_2$$

$I=I_1^{\text{水平}}+I_1^{\text{円弧}}$ であるから，求める結果は

$$I_1=\log r_2+i\theta_2$$

次に，I_2 を計算しよう。同様にして水平経路と円弧の経路に分ける。

$$I_2^{\text{水平}}=\int_0^{r_2}\frac{1}{x}dx=\log r_2$$

次に，円弧の経路[10]は，

$$I_2^{\text{円弧}}=\int_{r_2}^{z_2}\frac{1}{z}dz=i\int_0^{\theta_2-2\pi}d\theta=i(\theta_2-2\pi)$$

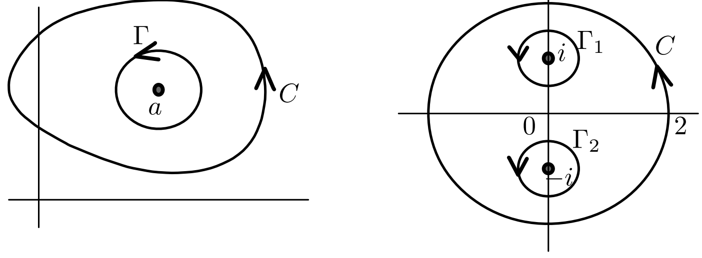
$I_2=I_2^{\text{水平}}+I_2^{\text{円弧}}$ であるから，求める結果は

$$I_2=\log r_2+i(\theta_2-2\pi)$$

ということで $I_2=I_1-2\pi i$ となり，積分経路により値が異なる。

おまけのついでとして，2 つほど例題をこなそう。

$Fig.Ex-1$ $Fig.Ex-2$



[10] 時計回りに回るからマイナスが付くのではと誤解しないように。始点と終点をひっくり返した時にマイナスが付きます。

● **Ex-1：** 点 a は単一閉曲線 C の内部にあるとする。次の等式を証明せよ（Fig.Ex-1 参照)。

$$(1)\ \oint_C \frac{1}{z-a}dz = 2\pi i \quad (2)\ \oint_C \frac{1}{(z-a)^n}dz = 0\ (n>1)$$

○ **Ans：** 点 a を中心とする小円 Γ を書く。C と Γ で囲まれる領域で $\dfrac{1}{(z-a)^2}$ は正則であるから，コーシーの積分定理（2.13）より，

$$\oint_C \frac{1}{(z-a)^n}dz = \oint_\Gamma \frac{1}{(z-a)^n}dz$$

また，公式（2.7）より

$$\oint_\Gamma \frac{1}{z-a}dz = 2\pi i, \quad \oint_\Gamma \frac{1}{(z-a)^n}dz = 0\ (n>1)$$

となるから,（1）,（2）は証明された。

● **Ex-2：** 積分 $\displaystyle\oint_C \frac{z}{z^2+1}dz$ を求めよ。C は $|\,z\,| = 2$ の円周とする（Fig.Ex-2 参照)。

○ **Ans：**

$$\frac{z}{z^2+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-i} + \frac{1}{z+i}\right)$$

となり，被積分関数は $z=\pm i$ で 1 位の極を持つ。そこで $z=\pm 1$ を中心とする互いに交わらない小さい円 Γ_1 と Γ_2 を描く。そうすると関数 $\dfrac{z}{z^2+1}$ は閉曲線 C と Γ_1,Γ_2 で囲まれた領域で正則になるから，コーシーの積分定理（2.11）より

$$\oint_C \frac{z}{z^2+1}dz = \oint_{\Gamma_1} \frac{z}{z^2+1}dz + \oint_{\Gamma_2} \frac{z}{z^2+1}dz$$

と書ける。上の右辺第 1 項は

$$\oint_{\Gamma_1} \frac{z}{z^2+1}dz = \frac{1}{2}\left(\oint_{\Gamma_1} \frac{1}{z-i}dz + \oint_{\Gamma_1} \frac{1}{z+i}dz\right)$$

となるが，$1/(z+i)$ は Γ_1 の内部で正則であるから，コーシーの積分定理によりゼロとなる。また，公式 (2.7) より

$$\oint_{\Gamma_1} \frac{1}{z-i}dz = 2\pi i$$

であるので，結局

$$\oint_{\Gamma_1} \frac{z}{z^2+1}dz = i\pi$$

となる。Γ_2 の場合もまったく同様にして

$$\oint_{\Gamma_2} \frac{z}{z^2+1}dz = \pi i$$

が得られる。よって

$$\oint_C \frac{z}{z^2+1}dz = 2\pi i$$

2.1.1　コーシーの積分表示

複素関数 $f(z)$ は単一閉曲線 C で囲まれた領域 D で正則であるとする。D 内の任意の点 a に対して次式が成り立つ。

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-a}dz \tag{2.14}$$

点 a を中止に十分小さい円 Γ を描く (Fig. Ex-1 参照)。C と Γ で囲まれた領域で $\dfrac{f(z)}{z-a}$ は正則だから，コーシーの積分定理（2.13）より

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-a}dz = \oint_\Gamma \frac{f(z)}{z-a}dz \tag{2.15}$$

Γ 上の任意の点 z を極形式で書くと $z = a + re^{i\theta}$ となるから

$$\oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{z-a} dz = i \int_0^{2\pi} \frac{f(a+re^{\theta})}{re^{i\theta}} re^{i\theta} d\theta = i \int_0^{2\pi} f(a+re^{i\theta}) d\theta \tag{2.16}$$

ここで $r \to +0$ にすると

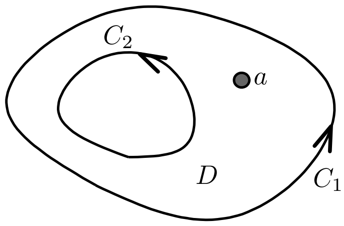
$$\lim_{r\to 0} i \int_0^{2\pi} f(a+re^{i\theta}) d\theta = if(a) \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i f(a) \tag{2.17}$$

よって（2.14）が証明された。

[**コーシーの積分表示の拡張版**]

単一閉曲線 C_1 の内部に単一閉曲線 C_2 があり，C_1 と C_2 で囲まれた領域 D で関数 $f(z)$ は正則であるとする。点 a が領域 D 内にあれば次式が成り立つ。

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(z)}{z-a} dz - \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(z)}{z-a} dz \tag{2.18}$$



2.18）が成り立っているとする。h を微少量として点 $a+h$ を考えると,（2.14）のコーシーの積分表示により

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{1}{2\pi hi} \oint_C \left(\frac{f(z)}{z-(a+h)} - \frac{f(z)}{z-a} \right) dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-a-h)(z-a)} dz$$

ここで $h \to 0$ の極限をとると

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-a-h)(z-a)} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^2} dz \tag{2.19}$$

同様にして $f(z)$ の代わりに $f'(z)$ について同じことをやると

$$f''(a) = \frac{2!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^2} dz \tag{2.20}$$

が得られる。以下同様にしていくと次の重要な公式がでてくる。これを**「グルサの公式」**という。

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz \quad (n = 1, 2, \cdots) \tag{2.21}$$

グルサの公式は $f(z)$ がある領域で正則であれば，何回でも微分可能，つまり n 階の微分係数が存在することを保証する。このように，複素関数は，1 回微分可能であれば，自動的に何回でも微分可能という驚くべき性質をもっている。

♣ *Q&A* ———

- K氏：昼も過ぎたのでここらで昼飯としようか。近場のレストランでうまいところがあるんだ。
- コニー：そうね，おなかもかなりすいてきたから，ご案内いただける。ご馳走させていただくわ。
- K氏：そう，それはそれは，折角だからゴチになるよ。

～　レストランで食事しながら　～

- コニー：(ニコニコしながら）なかなか解析接続のところまでたどり着かないわね。でも，いい復習になるわ。 複素積分って，本質的に線積分なのね。実関数の積分の場合は例えば関数 $f(x)$ を図示して，x 軸上の区間をとって，その間の面積というように絵で描いたりするんだけど，複素積分の場合は関数 $f(z)$ を描くことはないわね。だけど，コーシーの積分定理のおかげで大変スマートに積分ができてしまう。

- K氏：そうだね，複素積分の場合は変数 z も関数 $f(z)$ も複素数だから関数 $f(z)$ の描きようがないよね。無理すればできないこともないと思うけど，却ってややこしさが増すというか。。。まぁその辺は数をこなして慣れていくしかないだろうね。

- コニー：そういうところでしょうね。ところで正則関数の積分は経路によらずに，始点と終点だけで積分の値が決まるというのは，力学で習った保存力場というか，ニュートンポテンシャルのような性質みたいね。

- K氏：そう，なかなかいいとこを突くね。ニュートンポテンシャルはラプラスの方程式を満たす調和関数なんだね。このあたりのことは「ポテンシャル」に書いておいたから，時間のあるときにでもみればいいと思うけど，それはそれとして，複素関数の正則条件としてコーシー・リーマンの方程式があったね。ここにでてくる u や v はラプラスの方程式を満たすんだ。だから正則関数 $f(z)$ はこのラプラスの方程式を満たす関数，つまり調和関数ということになる。だから，積分値は始点と終点だけで決まる。この辺の話は，ここ「http://collie.low-temp.sci.yamaguchi-u.ac.jp/ ashida/work/」の講義ノートが参考になると思うよ。

- コニー：ありがとう，メモっとくわ。最後のお話で「グルサの公式」というのがでてきたけど，正則関数というのは何回でも微分可能という，驚くほど滑らかな，まったくツルツルの関数ということなのね。

- K氏：そうだね。そこが実関数と決定的に違うところだね。実関数の場合は 1 回微分可能であっても 2 回目が保証されることはないから。
  さて，ここのコーヒーも美味いんだ。食後のコーヒーをゆっくり味わってから，また話を進めようか。

- コニー：いよいよ第 4 コーナーにさしかかったといったところかしら。

- K氏：そうありたいけど，話の都合上まだ先が長いような。。。まっ，できるだけ要約して進めていくけどね。

- コニー：端折りすぎてわけが分からないようになるのだけはやめてね。

- K氏：了解。それじゃそろそろ戻ろうか。

- コニー：はい，それじゃお勘定済ませてくるわ。

3 テイラー展開

3.1 べき級数

数列 $\{a_n\}$ からつくられる無間個の和

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n + \cdots$$

を級数という。また，複素数 z の整数乗 z^n からつくられる級数

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_n z^n + \cdots \tag{3.1}$$

をべき級数という。係数 c_n は，一般に複素数であってよい。べき級数が収束するための条件は，n を大きくしていったときに，各項の大きさ $c_n z^n$ がだんだん小さくなっていく必要がある。つまり $n \to \infty$ の極限で

$$|\, c_n z^n \,| > |\, c_{n+1} z^{n+1} \,| \tag{3.2}$$

が満たされる必要がある。(3.2) より

$$n \to \infty : |\, c_n \,||\, z^n \,| > |\, c_{n+1} \,||\, z^n \,||\, z \,| \longrightarrow |\, z \,| < \frac{|\, c_n \,|}{|\, c_{n+1} \,|} \tag{3.3}$$

となる。そこで

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|\, c_n \,|}{|\, c_{n+1} \,|} \tag{3.4}$$

とおけば，べき級数 (3.1) の収束条件は

$$|\, z \,| < R \tag{3.5}$$

となる[11]。この R を収束半径と呼ぶ。収束半径内部の z に対して，項別に微分することも積分することも許される。

例題.11 次のべき級数の収束半径を求めよ。

$$1 + 2z + 4z^2 + 8z^3 + \cdots$$

答：上のべき級数は

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c^n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^n$$

とかけるので，収束半径 R は

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|\, 2^n \,|}{|\, 2^{n+1} \,|} = \frac{1}{2}$$

となる。したがって与式のべき級数は原点を中心とする半径 1/2 の円内 ($|\, z \,| < 1/2$) で収束する。

例題.12 指数関数 e^z の収束半径を求めよ。

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots$$

答：$c_n = 1/n!$ であるので収束半径 R は

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{c_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty} n = \infty$$

となって収束半径は $R = \infty$ となる。ということで，指数関数に対するべき級数は $|\, z \,| < \infty$ で収束（無限遠点で収束）する。つまりどんな z でも収束することになる。

例題.13 次のべき級数の収束半径を求めよ。

$$f(z) = 1 + z + 2z^2 + 3z^2 + 4z^2 + \cdots$$

答：与式は

$$f(z) = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} n z^n$$

と書ける。右辺第 2 項の級数の収束半径を求めればよいから，収束半径は $R = \lim_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$ となる。級数は $|\, z \,| < 1$ で収束する。

例題.14 べき級数 $z + z^2 + z^3 + \cdots$ の収束発散を調べよ。
答：$|\, z \,| > 1$ の場合，$|\, z \,| = 1 + h$, $(h > 0)$ とおくと $|\, z \,|^n = (1+h)^n > 1 + nh > nh$ となる。したがって，$\lim_{n\to\infty} |z|^n > \lim_{n\to\infty} > nh = \infty$ で発散する。

[11] これをダランベールの判定法と呼んでいる。

$|z| < 1$ の場合，$a = 1/|z| > 1$ として $\lim_{n\to\infty} |z|^n > \lim_{n\to\infty} > 1/a^n = 1/\infty = 0$ で収束する。

$|z| = 1$ の場合，$\lim_{n\to\infty} z^n = 1$ で 1 に収束する。

例題.15 べき級数 $1 + z + z^2 + z^3 + \cdots$ は $|z| < 1$ のとき，$1/(1-z)$ に収束することを示せ。

答：部分和をとると $S_n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} = \dfrac{1-z^n}{1-z}$ となる。$|z| < 1$ の場合，z^n は 0 に収束するので，与式のべき級数は $1/(z-1)$ に収束する。

3.2 テイラー展開（級数）

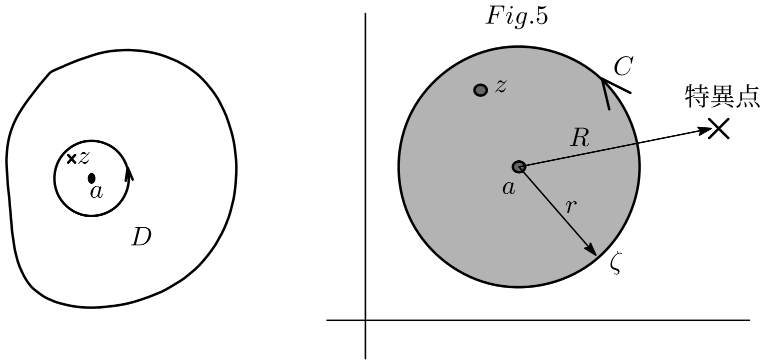
領域 D 内で正則な関数 $f(z)$ は，D 内の一点 a を中心として，D 内に含まれる円内で一意的[12]にべき級数

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n (z-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n \tag{3.6}$$

にテイラー展開することができる。この級数をテイラー級数という。展開係数は

$$A_0 = f(a)\,, \quad A_1 = f'(a)\,, \quad A_2 = \frac{1}{2}f''(a)\,, \cdots, \, A_n = \frac{1}{n!}f^{(n)}(a) \tag{3.7}$$

である。



[テイラー展開の導出]

Fig. 5 で，点 a から最も近い特異点までの距離を R とする[13]。そして a を中心に $r < R$ を満たす任意の r を半径とする円 C を描く。このとき，関数 $f(z)$ は半径 r 内の領域で正則である。

$$|z - a| \leq r < R \tag{3.8}$$

したがって，円内の任意の複素数 z に対してコーシーの積分表示（2.14）により

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta \tag{3.9}$$

が成り立つ。ただし $z \to \zeta$, $a \to z$ と書き換えた。ζ は円 C 上の点であるから

$$|\zeta - a| = r \tag{3.10}$$

z は円内の点であるから

$$|z - a| < r \tag{3.11}$$

となる。上の 2 式より

$$\frac{|z-a|}{|\zeta - z|} < 1 \tag{3.12}$$

[12] 一意的という意味はのちほど。
[13] この R がべき級数の収束半径となる。

が成り立つ。(3.9) の被積分関数の分母 $1/(\zeta - z)$ は, (3.12) と例題.16 の結果を使って

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - a - (z-a)} = \frac{1}{\zeta - a}\frac{1}{1-\frac{z-a}{\zeta-a}} = \frac{1}{\zeta - a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^n \tag{3.13}$$

と展開できるので, (3.9) は次のようになる。

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(z-a)^n \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta \tag{3.14}$$

この式の右辺の積分はグルサの公式が使えるから,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n \tag{3.15}$$

となって, テイラーの公式が導出される。収束半径は, 条件 (3.8) より, テイラー展開が領域 $|z-a| < R$ で成り立つことであったので, テイラー級数の**収束半径は R である**[14]。

例題.16 次の関数を $z=0$ のまわりでテイラー展開せよ。ま, 収束半径を求めよ。

$$f(z) = \frac{1}{z+1}$$

答: テイラー展開の係数は (3.7) より,

$$f'(z) = -\frac{1}{(1+z)^2}, \quad f''(z) = \frac{2}{(1+z)^3}, \cdots, f^{(n)}(z) = \frac{(-1)^n n!}{(1+z)^n}$$

$z=0$ とおくと $f^{(n)}(0) = (-1)^n n!$ となるので, 与式のテイラー展開は

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \cdots \tag{3.16}$$

となる。この関数は $z=-1$ に特異点をもつので, テイラー級数の収束半径 R は, $z=0$ で展開しているからそこからの距離として $R=1$ となる。

例題.17 次の関数 $f(z)$ を $z=a$ のまわりでテイラー展開せよ。また, 収束半径を求めよ。

$$f(z) = \frac{1}{z-a+b}$$

答: $z=a$ の周りで展開するから $|z-a|$ は小さいことに着目して次のように変形する。

$$f(z) = \frac{1}{z-a+b} = \frac{1}{b}\frac{1}{1+\frac{z-a}{b}}$$

そうすると

$$\frac{1}{1+\frac{z-a}{b}} = 1 - \frac{z-a}{b} + \left(\frac{z-a}{b}\right)^2 - \left(\frac{z-a}{b}\right)^3 + \cdots$$

と表せるので

$$f(z) = \frac{1}{b} - \frac{z-a}{b^2} + \frac{(z-a)^2}{b^3} - \frac{(z-a)^3}{b^4} + \cdots$$

と展開できる。この展開は $\left|\dfrac{z-a}{b}\right| < 1$ のとき成り立つので $|z-a| < |b|$ より収束半径は $|b|$ となる。

例題.18 次の関数 $f(z)$ を $z=0$ のまわりでテイラー展開せよ。また, 収束半径を 2 通りの方法で求めよ。

$$f(z) = \frac{1}{(a+z)^2}$$

[14] 収束半径は点 a から最も近い特異点までの距離ということで, 極めて明快ですね。

答：$z=0$ の周りで展開するので $|\,z\,|$ は小さいとして $f(z)=\dfrac{1}{a^2}\left(1+\dfrac{z}{a}\right)^{-2}$ とする。$|\,z/a\,|<1$ として $f(z)$ をテイラー展開すると

$$f(z)=\frac{1}{a^2}-\frac{2z}{a^3}+\frac{3z^2}{a^4}-\frac{4z^3}{a^5}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{a^n}z^n$$

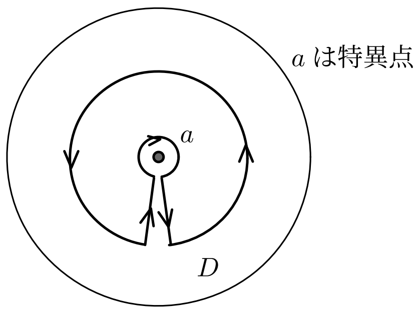
テイラー級数の一般項の係数は $c_n=(-1)^n(n+1)/a^n$ となるので収束半径 R は

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{|\,c_n\,|}{|\,c_{n+1}\,|}=\lim_{n\to\infty}|\,a\,|\frac{n+1}{n+2}=|\,a\,|$$

また，$f(z)$ は $z=-a$ に特異点をもつので，これから収束半径は $R=|\,a\,|$ である。

4　ローラン展開

正則関数はテイラー展開できることがわかった。それでは正則でない関数は展開できないのかというとそうではない。正則でない関数もテイラー展開と似たような展開式をつくることができる。



関数 $f(z)$ が $z=a$ に極または真性特異点を持つが，点 a のまわりでは $f(z)$ が正則である場合，テイラー級数に負のべき乗が加わった形

$$\begin{aligned}f(z)&=A_0+A_1(z-a)+A_2(z-a)^2+\cdots+\frac{A_{-1}}{z-a}+\frac{A_2}{(z-a)^2}+\cdots\\&=\sum_{n=0}^{\infty}A_n(z-a)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_{-n}}{(z-a)^n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}A_n(z-a)^n\end{aligned}\tag{4.1}$$

で展開できる。これをローラン展開という。そして a が特異点である特長は展開の負のべき乗の部分に現れるので，この部分をローラン展開の主要部という。また，項の 係数 A_{-1} を**留数**と呼ぶ。

ローラン展開の証明は省略する (興味のある方は「[対話] ローラン展開と留数・主値積分について」を参照)。ローラン展開の場合，関数 $f(z)$ は $z=a$ で正則ではないから，微分係数 $f'(a)$ は存在しない。したがって，テイラー展開のように簡便に展開係数 A_n を求める公式は存在しない。ついでだから各係数を積分表示で書いておくと

$$A_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta\,,\quad A_{-n}=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{-n+1}}d\zeta$$

となるが，係数の計算にはこの式は使わない（積分が難しすぎる！）。通常は正則領域を利用したテイラー展開が利用される。ローラン展開の主要部で，係数が 0 でない $(z-a)$ の負の最高のべきの項が $(z-a)^{-k}$ であれば，$f(z)$ は k 位の極をもつ，あるいは $f(z)$ の特異点 $z=a$ は k 位の極であるという。主要部が無限に続くときは（無限級数となるならば），$z=a$ は $f(z)$ の真性特異点である。

例題.19　関数 $f(z)=\dfrac{1}{z(z+1)}$ を極 $z=0$ のまわりでローラン展開せよ。

答：関数 $f(z)$ は部分分数に分解でき，例題 16 の結果を使うと

$$f(z)=\frac{1}{z}-\frac{1}{z+1}=\frac{1}{z}-1+z-z^2+\cdots$$

となる。主要部は z^{-1} で，$f(z)$ は $z=0$ に 1 位の極を持つ。

5 留数と留数定理

5.1 留数

孤立特異点 a の周りのローラン展開の展開係数のうちで，特に $\underline{A_{-1}\text{ を } z=a \text{ における関数 } f(z) \text{ の留数}}$ と呼んだ。具体的には，$f(z)$ を a を中心にしてローラン展開したときの $\dfrac{1}{z-a}$ の項の係数 A_{-1} のことである。留数を表す記号としては，$Res(f,a)$ あるいは $Res(a)$ が使われる。そこで留数を求めるルーチンを以下に纏めておく。

- $z=a$ が 1 位の極の場合・・・$f(z)=\dfrac{F(z)}{z-a}$ のスタイル
  この場合の留数は
  $$Res(a)=\lim_{z\to a}(z-a)f(z) \tag{5.1}$$
  $f(z)$ をローラン展開をすれば
  $$f(z)=\frac{A_{-1}}{z-a}+\sum_{n=0}^{\infty}A_n(z-a)^n$$
  と展開される。上式の両辺に $(z-a)$ をかけ，$z\to a$ の極限をとると
  $$\lim_{z\to a}(z-a)f(z)=\lim_{z\to a}\left\{A_{-1}+\sum_{n=0}^{\infty}A_n(z-a)^{n+1}\right\}=A_{-1}$$
  したがって，留数は次の極限操作から求められる。
  $$Res(a)=\lim_{z\to a}(z-a)f(z)$$

- $z=a$ が k 位の極の場合・・・$f(z)=\dfrac{F(z)}{(z-a)^k}$ のスタイル
  この場合の留数は
  $$Res(a)=\frac{1}{(k-1)!}\lim_{z\to a}\left[\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\Big\{(z-a)^kf(z)\Big\}\right] \tag{5.2}$$
  $f(z)$ をローラン展開すれば
  $$f(z)=\frac{A_{-k}}{(z-a)^k}+\frac{A_{-k+1}}{(z-a)^{k-1}}+\cdots+\frac{A_{-1}}{(z-a)}+\sum_{n=0}^{\infty}A_n(z-a)^n$$
  と展開される。上式の両辺に $(z-a)^k$ をかけると
  $$(z-a)^kf(z)=A_{-k}+(z-a)A_{-k+1}+(z-a)^2A_{-k+2}+\cdots+(z-a)^{k-1}A_{-1}+\sum_{n=0}^{\infty}A_n(z-a)^{n+k}$$
  いま，A_{-1} が欲しいので，上式を z で $k-1$ 回微分し，$z\to a$ の極限をとると
  $$\begin{aligned}\lim_{z\to a}\left[\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\Big\{(z-a)^kf(z)\Big\}\right]&=\lim_{z\to a}\left[(k-1)!\,A_{-1}+\sum_{n=0}^{\infty}A_n(n+k)(n+k-1)\cdots(n+2)(z-a)^{n+1}\right]\\&=(k-1)!\,A_{-1}\end{aligned}$$
  したがって，留数は次の極限操作から求められる。
  $$Res(a)=\frac{1}{(k-1)!}\lim_{z\to a}\left[\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\Big\{(z-a)^kf(z)\Big\}\right]$$

- $f(z)=\dfrac{Q(z)}{P(z)}$ であって，$P(a)=0, P'(a)\neq 0$ の場合
  この場合の留数は
  $$Res(a)=\frac{Q(a)}{P'(a)} \tag{5.3}$$

$P(z)$ を $z=a$ のまわりでテイラー展開すると $P(a)=0$ であるから

$$P(z)=P'(a)(z-a)+\frac{P''(a)}{2!}(z-a)^2+\cdots$$

したがって

$$f(z)=\frac{1}{z-a}\frac{Q(z)}{P'(a)+\frac{1}{2}(z-a)P''(a)+\cdots}$$

留数は上式の両辺に $(z-a)$ をかけ，$z\to a$ の極限をとることで求められる。

$$Res(a)=\lim_{z\to a}(z-a)f(z)=\lim_{z\to a}\left\{\frac{Q(z)}{P'(a)+\frac{1}{2}(z-a)P''(a)+\cdots}\right\}=\frac{Q(a)}{P'(a)}$$

例題.20 関数 $f(z)=e^{1/z}$ の留数を求めよ。

答：関数 $f(z)$ は $z=0$ で真性特異点を持つ（したがって無限級数で表されることになる)。この特異点まわりで $f(z)$ をローラン展開すると

$$f(z)=e^{1/z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{1}{z^n}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!}\frac{1}{z^2}+\cdots$$

となる。負のべき A_{-1} は 1 であるからこの関数の留数は $Res(0)=1$ となる。

例題.21 関数 $\dfrac{z^3+5}{z(z-1)^3}$ の極 0, 1 における留数を求めよ。

答：$z=0$ は 1 位の極であるから $Res(0)=\lim_{z\to 0}zf(z)=-5$

$z=1$ は 3 位の極であるから $Res(1)=\lim_{z\to 1}\dfrac{1}{2!}\dfrac{d^2}{dz^2}\{(z-1)^3f(z)\}=6$

5.2 留数定理

関数 $f(z)$ が 1 個の特異点 $z=a$ をもっている場合を考える。ローラン展開

$$f(z)=A_0+A_1(z-a)+A_2(z-a)^2+\cdots+\frac{A_{-1}}{z-a}+\frac{A_2}{(z-a)^2}+\cdots \tag{5.4}$$

において，$z=a$ の向きを生に回る閉曲線 C に対して，例題.9 の公式

$$\oint_C(z-a)^n dz=\begin{cases}2\pi i & n=-1\\ 0 & n\neq -1\end{cases} \tag{5.5}$$

に留意すると,（5.4）の $z=a$ を中心に閉曲線 C の反時計回りの周回積分の値は

$$\begin{aligned}\oint_C f(z)dz&=\oint_C\left\{A_0+A_1(z-a)+A_2(z-a)^2+\cdots+\frac{A_{-1}}{z-a}+\frac{A_2}{(z-a)^2}+\cdots\right\}dz\\ &=2\pi iA_{-1}=2\pi i\times Res(a)\end{aligned} \tag{5.6}$$

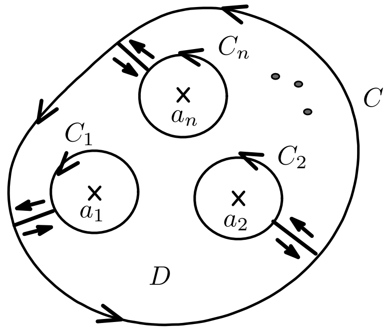
となる。つまり，留数を含む項だけが残って，他の項はすべて消える。留数という名前はここからきている。

さて，特異点が多数個ある場合はどうなるか。結論からいうと，それらの特異点の留数をすべて足しあわせればよい，ということになる。一般に，関数 $f(z)$ が有限個の孤立特異点 a_k $(k=1,2,\cdots,n)$ を除く領域 D で正則な関数とすると，

$$\oint_C f(z)dz=\sum_{k=1}^{n}\oint_{C_k}f(z)dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n}Res(a_k) \tag{5.7}$$

が成り立つ。これを**留数定理**という。積分経路が左回りであればプラス，右回りであればマイナスの符号が（5.7）につくということに留意しておこう。

Fig.6



5.2.1 留数の定理の応用例

留数の定理は実関数の積分にその威力を発揮している。その威力を示す具体的な例は「［対話］ローラン展開と留数・主値積分について」に載っているので，ここではそこから代表的な例を 1 つ取り上げて，少し詳しく説明してみよう。

● **Ex-1：** 次の積分を計算せよ。

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^2+a^2}dx \quad (a>0)$$

○ **Ans：**積分区間が ∞ となっているが，これは一旦，積分区間を有限にとり，あとで無限大にするというやり方をする。また，積分変数 x は複素数 $z=x+iy$ の実部と考えられるから，与式の積分は複素平面上の実軸上での積分と考えて複素積分に持ち込む。ということで与式は

$$I=\lim_{r\to\infty}\int_{-r}^{r}\frac{1}{x^2+a^2}dx=\lim_{r\to\infty}\int_{C_0}\frac{1}{z^2+a^2}dz=\lim_{r\to\infty}\int_{C_0}f(z)dz \tag{5.8}$$

と書ける。

Fig.7

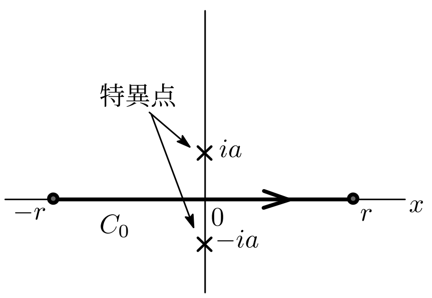


Fig.8

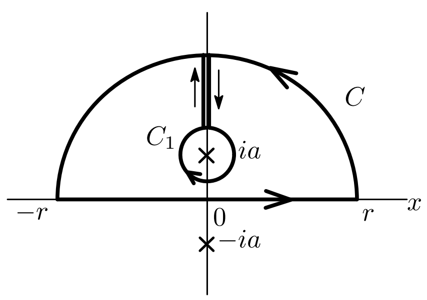
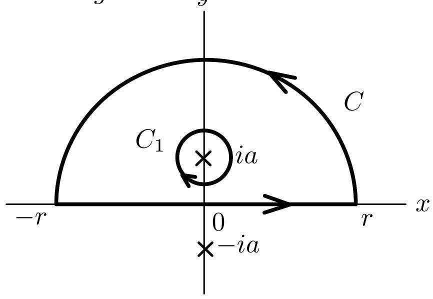


Fig.9



（C_0 は実軸上の経路→特異点を迂回する経路を考える：$C+C_1$）

ところで，被積分関数 $f(z)=1/(z^2+a^2)$ は

$$f(z)=\frac{1}{z^2+a^2}=\frac{1}{(z-ia)(z+ia)} \tag{5.9}$$

と展開され複素平面上に 1 位の極 $z=\pm ia$ の特異点をもつことが分かる。関数 $f(z)$ はこの極を除いた領域で正則となるから，積分経路として Fig.8 のように極を迂回する経路を考える[15]。このとき y 軸上の経路部分の積分は上向きと下向きが重なるのでその経路の積分値は行き帰りで打ち消しあいゼロになる。結局，Fig.9 の経路となる。ということで（5.8）は

$$I=I_1+I_2=\lim_{r\to\infty}\oint_C f(z)dz+\oint_{C_1}f(z)dz \tag{5.10}$$

[15] ゴムを引き伸ばした感じ。。。

という周回積分になる。(5.10) の右辺第 2 項は留数定理を使うと

$$I_2 = \oint_{C_1} f(z)dz = 2\pi i Res(ia)$$

1 位の極の留数は

$$Res(ia) = \lim_{z \to ia}(z - ia)f(z) = \lim_{z \to ia} \frac{1}{z + ia} = \frac{1}{2ia}$$

であるから

$$I_2 = \frac{\pi}{a}$$

次に I_1 を求めよう。例によって極形式を使う。

$$z = re^{i\theta} \quad (0 \le \theta \le \pi)$$

とすると

$$I_1 = \lim_{r \to \infty} \oint_C f(z)dz = \lim_{r \to \infty} \oint_C \frac{1}{z^2 + a^2} dz = \lim_{r \to \infty} \int_0^\pi \frac{rie^{i\theta}}{r^2 e^{2i\theta} + a^2} d\theta$$

これは不定形の極限となるので，ロピタルの定理[16]が使えて，

$$I_1 = \int_0^\pi d\theta \left\{ \lim_{r \to \infty} \frac{ie^{-i\theta}}{2r} \right\} = 0$$

となる。つまり，半円からの寄与はうまい具合にゼロとなる。つまり実軸上の積分となるわけである。求める答えは

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + a^2} dx = I_1 + I_2 = \frac{\pi}{a} \tag{5.11}$$

♣ *Q&A* ———

- K氏：え〜っと，ここらでティータイムとしよう。テイラー展開からローラン展開，留数定理と見てきたわけだけど質問か感想でもある？

- コニー：そうね，食事後だったのでテイラー展開のところは少しウトウトしちゃったけど，正則関数は実関数の場合と同じようにテイラー展開することができる。もし，関数が複素平面上に特異点をもつ場合，テイラー級数の収束半径は展開の中心点から特異点までの距離となる，逆に言えば，収束半径内で関数は正則ということね。ところで，注目している領域に特異点がある場合は，関数は正則でなくなる。残念ながらテイラー展開はできない。どうしようといったところで登場するのがローラン展開ということね。デザイナーにイヴ・サンローランがいるけど，ローランというのはフランスでは一般的な名前かしら。

- K氏：それはよく知らないけど，ローラン展開のローランはピエール・アルフォンス・ローランという名前のフランスの数学者で，コーシーが亡くなる 14 年前の 1843 年にローラン展開を発表したらしいね。

- コニー：そうなの。ところで，複素関数論のテキストでローラン展開の項をみると，展開係数はこうなると積分で書かれているわね。だけど例題を見るとそんな積分は一切使われずにテイラー展開でことが済まされている。テイラー展開は正則関数にのみ適用できるのでは，あれっ，どういうことって悩んだりしたけど，Kさんの例のレポートを読んで納得したわ。つまり，テイラー展開ができるように特異点の周りを周回して正則領域を確保するのね。この特異点周りの周回積分を展開したものが負のべき級数，つまりローラン級数の主要部になるというわけね。

- K氏：そうだね。ローラン展開の負のべきの最初の係数 A_{-1} を留数といったけど，欲しいのはこいつなんだな。というのは既に話したように関数 $f(z)$ をぐるっと一回りして積分すると残るのは留数だけということだからね。

[16] http://www.osakac.ac.jp/labs/mandai/writings/Bi1-01m3.pdf

- コニー：留数って最初のころは ”とめすう ”というのかなと思っていたけど,「りゅう数」の方が聞こえがいいわね。ところで留数定理を応用すると実積分が簡単に計算できるということだけど，この計算は量子力学なんかで時々目にすることがあるわ。

- K氏：うん，そうか。ところで，冷コーをはやく飲まないとがぬるくなっちゃうよ。

- コニー：忘れていました，昼食時の帰りに買ってきたケーキがあるんだった，ご馳走するわね。

- K氏：ありがたい，早速いただくよ。おいしいねぇ，このケーキ。いよいよ次がお待ちかねの解析接続の話だけど，その前にゆっくりケーキを味あわせてね。

- コニー：美味しいわね，ほんとうにこのケーキ。

6　解析接続

6.1　零点

複素関数 $f(z)$ の値が 0 となるような点 z を関数 $f(z)$ の**零点**という。関数 $f(z)$ が領域 D で正則とする。D 内の点で

$$f(a) = f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0\,, \quad f^{(n)}(a) \neq 0 \tag{6.1}$$

のとき，a は n **位の零点**であるという。また n を零点 a の**位数**という。関数 $f(z)$ をテイラー展開すると

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n \tag{6.2}$$

a を n 位の零点であるとすると，上のテイラー展開は $f^{(n-1)}(a)$ までの項はすべてゼロになり，残る項を集めると

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(z-a)^{n+1} + \frac{f^{(n+2)}(a)}{(n+2)!}(z-a)^{n+2} + \cdots \\ &= (z-a)^n \left\{ \frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(z-a) + \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+2)!}(z-a)^2 + \cdots \right\} \\ &= (z-a)^n\, g(z) \end{aligned} \tag{6.3}$$

と書ける。

6.2　一致の定理

一致の定理とは「複素平面上のある領域 D において，2 つの正則な関数 $f_1(z)$ とが $f_2(z)$ があるとする。D の内部にある領域を D_0 とし，もし，領域 D_0 において $f_1(z) = f_2(z)$ であるならば，領域 D において $f_1(z) = f_2(z)$ である。」というもの。もう少し詳しくいうと，領域 D 内のほんのわずかな領域ー面状領域であってもよいし，線状の領域であってもよいーで $f_1(z) = f_2(z)$ が成り立てば，領域 D 全体で $f_1(z) = f_2(z)$ が成り立つ。一致の定理の有り難味を要約して言うと，次のようになる。
「ある領域 D で正則であって，D の部分領域 D_0 で与えられた関数 $f(z)$ に等しくなるような関数があるとすれば，それは一致の定理によりただ一つに限られる」。もっというと，**「２つの関数は恒等的に等しい」**，つまり $f_1(z) = f_2(z)$ は恒等式として成り立つ」ということを言っている。

証明：領域 D で正則な関数 $f(z)$ が D 内の点 a を n 位の零点としているとき,

$$f(z) = (z-a)^n\, g(z)$$

と表せた。

$$|g(z)| = |g(a) + g(z) - g(a)| \geq |g(z)| - |g(z) - g(a)|$$

といえるから，z を限りなく a に近づけていけば，$|g(z)-g(a)|$ はいくらでも小さくすることができる。いま，十分に小さい ϵ に対して

$$|g(z)| > |g(a)| - \epsilon > 0$$

が成り立つから，$g(z) \neq 0$ となり，a の近傍では z は零点とならない，つまり z が a よりほんのわずかでもずれていると $g(z)$ は 0 とはならない[17]。逆にいうと，点 a が零点であれば，a の十分近くには他の零点はないということである。したがって，$f(a)=0$ かつ a の近傍でも $f(z)=0$ となるのは，D 内で $f(z)$ が恒等的にゼロになるときのみとなる。つまり，D 内のある領域で $f(z)=0$ ならば，D 内のすべての点で $f(z)=0$ となる。いま，$f(z)=f_1(z)-f_2(z)$ とおくと，$f(z)$ は正則であるので $f_1(z), f_2(z)$ も正則である。領域 D で正則な関数 $f_1(z)$, $f_2(z)$ が領域 D のある部分領域で $f_1(z)=f_2(z)$ ならば，D 内のすべての点で $f_1(z)=f_2(z)$ である。　(終)

一致の定理の具体例：具体例で見るのが一番手っ取り早い。例えば実数で定義された三角関数は

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n!} x^{2n} \tag{6.4}$$

と展開できた。普通この展開を複素変数 z にまで拡張して涼しい顔 (？) をしている。

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n!} z^{2n} \tag{6.5}$$

これは一致の定理により，涼しい顔をしてよいのである。というのは，$\cos z$ は複素平面上で正則で[18]，複素平面の実軸上では（6.4）に一致するからということになる。本来,（6.5）は複素変数 z に対して成り立つかどうか,キチンとした証明が必要だが，幸いにも一致の定理は，そういう証明はしなくてもいいのですよと語ってくれている。

$$\cos x = \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) \Longrightarrow \cos z = sin\left(z+\frac{\pi}{2}\right)$$
$$\cos^2 x + \sin^2(x) = 1 \Longrightarrow \cos^2 z + \sin^2(z) = 1$$

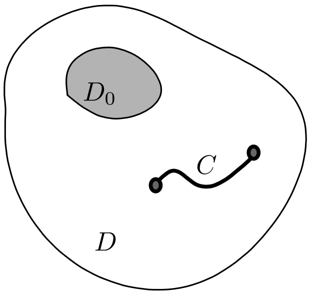
などが成り立つことは，上で述べた事情から明らかだろう。

6.3　解析接続

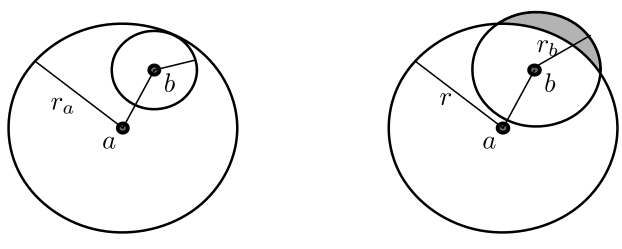
　領域 D_0 において関数 $f(z_0)$ が定義されている。このとき，$D_0(or\ C)$ を含む広い領域 D において，正則かつ $D_0(or\ C)$ において

$$f(z) = f_0(z)$$

を満たす関数 $f(z)$ を 何らかの手段により構成 できたとする。このような関数は一致の定理によりただ一つしか存在し得ない（当然，そのような関数が存在しない場合もあり得る。あれば，それはただ一つしかない)。このようにして D ($or\ C$) において確定する正則な関数 $f(z)$ を，領域 D への $f_0(z)$ の**解析接続**という。また，このような手続きそのものも解析接続と呼ぶ。



(A)　　$Fig.7$　　(B)



[17] 零点孤立の原理といわれる。
[18] $\cos z$ は無限遠点 $z=\infty$ に特異点（真性特異点）をもつが，それ以外の複素平面全体では特異点は持たない。そこで領域 D を複素平面全体とする。

問題は，どうやって関数 $f(z)$ を見いだすか，何らかの手段で見いだす作業はユーザーの手に委ねられる。ここが解析接続を近寄りがたいものにしている大きな要因と思う。ただ，一致の定理で見たように，実軸上での定義済みの関数は，x のところを z に書き換えるだけで，複素平面へ解析接続される。そして，その関数が実数 x に対して持っていた種々の性質は，多くの場合，そのまま複素数に対しても保持される，ということになる。

6.3.1 テイラー展開により解析接続

関数 $P(z:a)$ を点 a のまわりのテイラー級数

$$P(z:a)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n(z-a)^n \tag{6.6}$$

で与えられ，収束半径は r_a とする（$|z-a|<r_a$）。その収束半径内に任意の一点 b を選び，関数 $P(z:a)$ を点イラー b のまわりで展開すると，

$$Q(z:a)=\sum_{n=0}^{\infty}B_n(z-b)^n \quad (B_n=f^{(n)}(b)/n!) \tag{6.7}$$

となる。点 b での展開の収束半径を r_b とする（$|z-b|<r_b$）。(6.7）の展開は，Fig.7（A) での点 b を中心とした小円領域内 ($|z-b|<r_a-|b-a|$) で少なくとも成立するが，図 (B) のように収束半径 r_b は $r_a-|b-a|$ より大きい場合，この場合は，2 つの円の共通領域で

$$P(z:a)=Q(z:b)$$

であるから，$Q(z:b)$ は $P(z:a)$ の $|z-b|<r_b$ への解析接続である。この手続きにより，$|z-a|<R$ の外部の点（図 (B) の影の部分）へ $P(z)$ を関数を延長または接続したことになる。このような手続きで，関数の正則域を拡張していくことができる。以上はテイラー展開を利用した解析接続の手続きを説明したが，実際はいちいちテイラー展開なんか使わずに，もっと簡便に解析接続がおこなわれる。

例題.22 解析関数[19]

$$f(z)=\frac{1}{2i}\log\frac{1+iz}{1-iz} \quad と \tag{6.8}$$

$$g(z)=\tan^{-1}z \tag{6.9}$$

は $z=\pm i$ を除いた点で解析接続できることを証明せよ。

答： $f(z)$ は $=\pm i$ を除いた複素平面上で正則関数であるから，実関数と同じように z で微分できる（ただし $z=\pm i$ を除く)。その結果

$$f'(z)=\frac{1}{1+z^2}$$

を得る。また，$g(z)=\tan^{-1}z$ は複素平面上で正則関数であり（無限遠点を除く）,$g(z)$ の微分は

$$g'(z)=\frac{1}{1+z^2}$$

となる。$f(0)=g(0)=1$ であるので，2 つの関数をテイラー展開すれば同じテイラー級数となる。このことから，$f(z)$ は $g(z)$ へ解析接続される。

例題.23 べき級数により定義された関数

$$f_0(z)=1+z+z^2+z^3+\cdots \tag{6.10}$$

を領域 $D_0=\{z:|z-1|<1\}$ の外へ解析接続せよ。

答： このべき級数は，原点を中心とする半径 1 の円内 ($|z|<1$) で収束する。この領域を D_0 とする。この関数

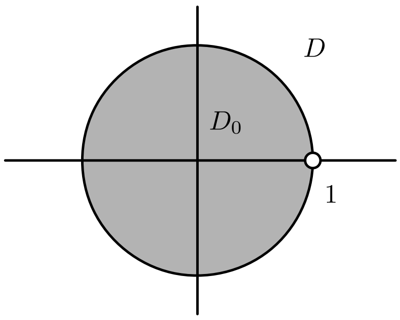
[19] 解析関数とは、関数が複素平面上の点 z_0 のまわりに展開でき、かつ収束半径が∞である関数。従って、解析関数は無限回連続微分可能である。つまり正則関数と同じ。

を D_0 の外へ解析接続するには，何らかの関数 $f(z)$ を**「思いつく」**必要がある。そこで，べき級数の和をとると，公比 z であるので

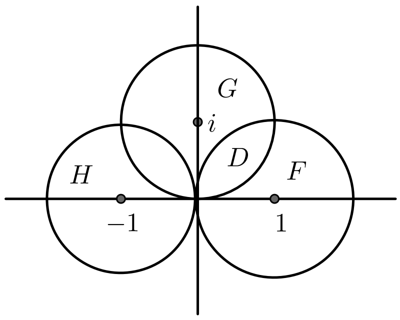
$$f_1(z) = \frac{1}{1-z} \tag{6.11}$$

という関数が得られる。

例題.22



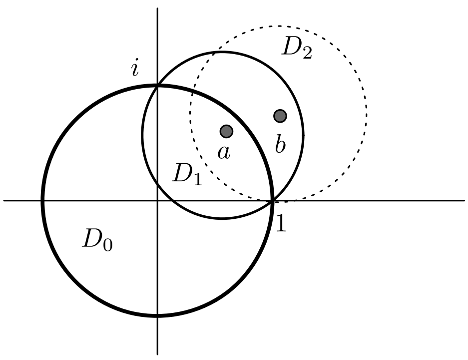
例題.23



この関数は $z=1$ に 1 位の極をもつが，それ以外では複素平面全体で正則となっている（つまり，定義領域が広がる）。領域 D は $z=1$ を除く複素平面全体（無限遠点も含めてよい）にとれる。これらのことから，領域領域 D_0 で定義された関数（6.10）から領域 D で定義された関数（6.11）への解析接続がなされた。

[※**補足**]

級数の和をとって $f(z)$ という関数を見つけだし，この関数は $z \neq 1$ の複素平面で正則であるから解析接続された，というロジックはなにか狐につままれたような感じを受けませんか[20]?。というのは，$|z|<1$ という条件はどこに行ったのかという点なんですが，そのあたりをスッキリしておきましょう。



関数 $f(z)$ を次のように変形して $f_1(z)$ とします[21]。

$$f_1(z) = \frac{1}{1-a} \cdot \frac{1}{1-\frac{z-1}{1-a}} = \frac{1}{1-a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{1-a}\right)^n \quad (\,|z-a|/|1-a|<1\,) \tag{6.12}$$

$f_1(z)$ は中心 a，半径 $|1-a|$ の円の内部で定義された関数です。（6.10）と（6.12）は，ともに $1/(z-1)$ に収束しますが，定義域が異なるのでまったく別の関数ということになります。しかし，関数 $1/(z-1)$ は，1 位の極 $z=1$ を除く複素平面上のすべての点で定義できるはずです。$f_0(z)$ の定義域を D_0，$f_1(z)$ の定義域を D_1 とします。$f_1(z)$ の点 a が D_0 の内部にあるとき，領域 D_0 と D_1 の共通領域 $D \cap D_1$ が存在し，その領域では $f_0(z) = f_1(z)$ です。このとき，$f(z)$ を

$$f(z) = \begin{cases} f_0(z) & (\,|\,z\,|<1\,) \\ f_1(z) & (\,|\,z-a\,|<|\,1-a\,|\,) \end{cases}$$

[20] 私はポカンとしましたが。。。

[21] $1/(1-x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^2 \ \ (|x|<1)$

で定義すると，$f(z)$ は，定義域が $D \cap D_1$ である関数 $f(z) = 1/(1-z)$ になります。つまり $f_0(z)$ の定義域を拡張した関数 $f(z)$ が得られます。この $f(z)$ を $f_0(x)$ の解析接続といいます。同様にして，領域 D_2 の内部に点 b をとって

$$f_2(z) = \frac{1}{1-b}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-b}{1-b}\right)^n \quad （|z-b|/|1-b| < 1）$$

とすると，領域 $D_0 \cap D_1 \cap D_2$ で定義された関数 $f(z)$ を考えることができます。このように，次々と解析接続することにより定義域をどんどん拡張していくことができます。定義域を可能な限り大きくたとき $f(z)$ を解析関数といいます。補足説明は，テイラー展開を武器として解析接続をおこなったのですが，このあたりの手続きをすっ飛ばしたのが上の答ということになります。

おまけの例題をあげておく

例題.24 , 次の無限級数により定義された関数の定義域を示し，解析接続せよ。

$$f_0(z) = 1 - 2z^2 + 4z^4 - 8z^6 + 16z^8 - + \cdots$$

答：与式は

$$f_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n z^{2n}$$

このべき級数の一般項は $c_n = (-2)^n z^{2n}$ であるから，この級数の収束半径は（3.3）より

$$n \to \infty : |c_n||z^{2n}| > |c_{n+1}||z^{2(n+1)}| \longrightarrow |z^2| < \frac{1}{2} \longrightarrow |z| < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

より，$R = 1/\sqrt{2}$ である。したがって，定義域 D_0 は $|z| < 1/\sqrt{2}$ である。（6.13）は公比 $-2z^2$ の無限等比級数であるので，例によって級数の和をとると

$$f_1(z) = \frac{1}{1+2z^2} = \frac{1}{(1-i\sqrt{2}z)(1+i\sqrt{2}z)} \tag{6.13}$$

が得られる。この関数は $z = \pm i/\sqrt{2}$ に 1 位の極を持つが，それ以外では複素平面全体で正則である。よって，問題の無限級数はこの極を除く複素平面全体で定義された関数（6.13）に解析接続される。

例題.25

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(1-z)^n, \quad F\{z; |z-1| < 1\}$$
$$g(z) = -i\sum_{n=0}^{\infty}(1+iz)^n, \quad G\{z; |z-i| < 1\}$$

とおくとき

(1) $g(z)$ は $f(z)$ の G への解析接続であることを証明せよ。

(2) $H = \{z; |z+1| < 1\}$ とおくと，H で正則な関数 $h(z)$ が $g(z)$ の H への解析接続であるとき，$h(z)$ を求めよ。

答：(1)$z \in F$ のとき，$|z-1| < 1$ より

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(1-z)^n = 1 + (1-z) + (1-z)^2 + \cdots + (1-z)^n + \cdots = \frac{1}{1-(1-z)} = \frac{1}{z}$$

一方，$z \in G$ では

$$|1+iz| = |i(-i+z)| = |z-i| < 1$$

であるから整級数 $g(z)$ の和は

$$g(z) = -i\sum_{n=0}^{\infty}(1+iz)^n \ 1 + (1+iz) + (1+iz)^2 + \cdots + (1+iz)^n + \cdots = \frac{-i}{1-(1+iz)} = \frac{1}{z}$$

したがって，$f(z)$ と $g(z)$ は共通領域 $D = F \cap G$ の各点で $f(z) = g(z)$ となり，$g(z)$ は $f(z)$ の解析接続である。
(2)$h(z)$ が $g(z)$ の解析接続であるから，G, H の双方に含まれる領域,」または，曲線の各点で

$$h(z) = g(z) = \frac{1}{z}$$

となる。したがって，一致の定理により H 全体で恒等的に $h(z) = \dfrac{1}{z}$ となる。

例題.26 領域 D_0 として，複素平面の右半分 $Re(z) \geq 0$ を考える。三角関数 $f_0(z) = \sin z$ が D_0 だけで定義されているものとする。 このとき，$f_0(z)$ を左半面へ解析接続せよ。
答：与式の三角関数は複素平面の右半分で定義されているので

$$f_0(z) = \sin z \quad (Re(z) \geq 0)$$

これを左半面へ解析接続するわけであるが，まず，$f_0(z)$ は z の正則関数である。そして，三角関数の周期性より，右半面（$Re(z) \geq 0$）では

$$f_0(z) = \sin z = sin(z + 2\pi)$$

が成立している。これから

$$f_1(z) = \sin(z + 2\pi) \tag{6.14}$$

をつくると，

$$-2\pi \leq Re(z) < +\infty$$

という領域 D_1 で（6.14）は正則となる。しかも，$f_1(z)$ は $Re(z) \geq 0$ の領域で $f_0(z)$ に一致する。したがって，（6.14）で定義される $f_1(z)$ は，$f_0(z)$ の解析接続である，ということになる。同様にして，$f_2(z)$ を

$$f_2(z) = \sin(z + 4\pi)$$

とする。そうすると, 次の領域 D_1

$$-4\pi \leq Re(z) < +\infty$$

で正則となる。また，$Re(z + 2\pi)$ の領域で $f_1(z)$ と一致するから，$f_2(z)$ は $f_1(z)$ の解析接続である。以下同じことを繰り返すことで，最終的に左半面全域にわたって解析接続がなされることになる。

例題.27 実数 x について定義された関数 $f(x) = |x|$ を解析接続せよ。

答：

$$f(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

関数 $f(x)$ の定義領域を D_0: 実軸 とし，これを複素平面全体の領域 D へ解析接続できるかどうかを調べる。まず $x \geq 0$ の領域の領域から複素平面へ解析接続すれば z という関数が得られる（実軸が複素平面の部分領域となっている)。一方，$x < 0$ の領域から解析接続すれば $-z$ という関数が得られる。ところでこれら 2 つの関数は複素平面上では異なる関数であり，求める一つの正則関数は存在しない。ということで，解析接続はできない。

6.3.2 ガンマ関数

ガンマ関数 $\Gamma(z)$ は

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt \tag{6.15}$$

により定義される関数で，この積分が発散しないためには

$$Re(z) > 0 \tag{6.16}$$

が必要である。つまり,（refeq-230）で定義されたガンマ関数の定義域 D_0 は（6.16）である。（6.15）の両辺に z をかけて部分積分すると

$$
\begin{aligned}
z\Gamma(z) &= \int_0^\infty z\,t^{z-1}e^{-t}dt = \int_0^\infty (t^z)' \cdot e^{-t}dt = \Big[t^z \cdot e^{-t}\Big]_0^\infty + \int_0^\infty t^z \cdot e^{-t}dt = \int_0^\infty t^z \cdot e^{-t}dt \\
&= \Gamma(x+1) \qquad (6.17)
\end{aligned}
$$

が得られる（$t \to \infty : t^z\, e^{-t} \to 0$)。この関係は $Re(z) > 0$ の領域でのみ成り立つ関係であるが，この関係を

$$
\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z} \qquad (6.18)
$$

とおくことにより，$-1 < Re(z)$ への領域へ $\Gamma(z)$ を解析接続することができる。例題.26 のように何度もこの操作を繰り返すと最終的には複素平面の左半分全体にガンマ関数を解析接続することができる。
$\Gamma(1) = 1$ であるので，n を正の整数とすると（6.18）より

$$
\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = n(n-1)(n-2)\cdots 1 \cdot \Gamma(1) = n!
$$

が得られる。このようにガンマ関数は，階乗の複素数への拡張[22]と見ることができる。

♣ *Q&A* ———

- K氏：以上で今日の話は終わりだ。疲れたね。
- コニー：ありがとう，お疲れ様でした。しっかりノートをとったから，また読み返してみるわ。もう外はとっぷりと暮れたようね。ところで,「一致の定理」というのは互いに正則関数だからそのようなことをいえるのね。$f_1(z) = f_2(z)$ は恒等式である，というところが凄いわ。
- K氏：うん，この定理が解析接続の核心となっているんだね。
- コニー：これで複素変数の三角関数も実関数の場合と同じように取り扱うことができるというのは，つっかえが取れてスッキリした感じ。解析接続というと，テキストには台風の進路のようにいくつも円が描いてあって，領域がどうとこうとかいろいろに書かれているけど，あの絵を見ただけで今までスルーしていたんだけど，今日，K さんから説明を聞いて，そういうことなんだと分かり，収穫があったわ。
- K氏：それはよかった。そういってもらえるとこちらも甲斐があるよ。
- コニー：解析接続っていうのは，正則関数によって関数の定義域をより広大な領域へ拡大するで，しかも一意的に拡大されるという。これも正則関数のもつ素晴らしい特長ね。
- K氏：そうだね。くどいようだけど関数に「正則」という条件がついていることがポイントなんだね。「一を聞いて十を知る」というか，正則関数というのはほんの一部が分かればその全貌がつかめるという感じだね。この正則性を保持しながら定義域を拡大していくのが解析接続のエッセンスということなんだね。もっとも，現実にはいろいろあの手この手で関数を見つけなけりゃならないけど。。。
- コニー：しかし，そのような関数が存在しない場合もあるわけね。
- K氏：そうなんだ。あと，分岐点や多価関数，リーマン面の話が残っているけど，これらはまた別の機会に譲ろう。
- コニー：そうね，ひとまずここまでの話をよく読み返してみるわ。今日は本当にありがとう。そろそろ失礼しなくっちゃ。
- K氏：そう，そとは暗くなったから気をつけてね。
- コニー：はい，またお邪魔しま〜す。それじゃさようなら〜。

[22] ガンマ関数は階乗の複素数への拡張としてオイラーにより考案されたとのことである。