

# 数学 Tips

～ 等角写像 (Conformal map) と流体力学への応用例 ～

KENZOU

2008 年 7 月 13 日

♣ この Tips のタイトルは「羊頭狗肉」であることをまずお断りしておきます。さて、等角写像は電磁気学をはじめ、流体力学でおなじみの手法と思います。昔、学生の頃、流体力学を勉強しはじめたとき、何が書かれてあるのかなあとテキストをパラパラとめくっていました。その時に、複雑な形状周りの流れは等角写像により簡単な流れに焼き直すことができる、というような文章に目がとまり、描かれている絵を見たとき、オォーと吃驚したと同時にかすかな感動を覚えたものでした。この Tips では、等角写像の要点をできるだけ例題を交えて進めてき、最後に、流体力学への応用について少し触れてみたいと思います。何らかのご参考にもなれば幸いです。もとより、浅学の身ですから、誤りや記述ミス等が多々あると思いますが、発見されればご自分で修正いただくか、当方にご一報いただければ嬉しいです。尚、参考テキストとして、森正武、杉原正顯「応用数学講座・複素関数論」(岩波)、矢野健太郎、石原繁「複素解析」(裳華房)、原田幸夫「基礎流体力学・水力学演習」(槇書店)、また Web 上に公開されている各種講義ノートを参照させていただきました。等角写像をさらに勉強される方は、今井功著「等角写像とその応用」(岩波書店)をお薦めします。

## 1 等角写像

### 1.1 複素関数と写像

複素変数  $z$  がとるいろいろな値に対応して複素数  $w$  が定まるとき、 $w$  を  $z$  の関数といい、

$$w = f(z) \tag{1.1}$$

であらわす。このとき、変数  $z$  が複素数であれば、関数値  $w$  が常に実数であっても複素関数という<sup>1</sup>。複素変数  $z = x + iy$  と同様に関数の値  $f(z)$  も実部と虚部からなり

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \tag{1.2}$$

で、 $u(x, y)$ 、 $v(x, y)$  は 2 つの実数  $x, y$  の実関数である。

$$\begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases} \tag{1.3}$$

また、複素数  $z$  を複素平面上の点で表したように、関数値  $w = f(z)$  をこれと異なる複素平面上の点として表すことができる。 $z$  を表す複素平面を  $z$  平面、 $w$  を表す複素平面を  $w$  平面と呼んでいる。

複素関数  $w = f(z)$  は、 $z$  平面上のある部分集合  $D$  から  $w$  平面上の部分集合  $S$  への対応と捉えることができる。これを写像といい、次の記号で表す<sup>2</sup>。

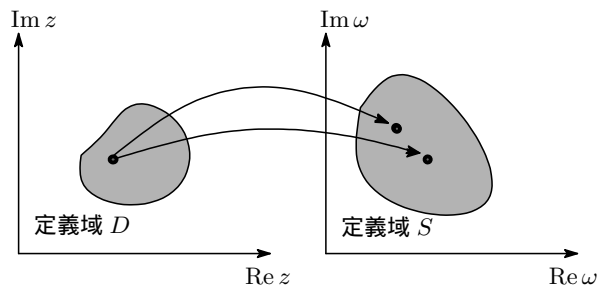
$$f: D \rightarrow S \quad z \mapsto f(z) \tag{1.4}$$

$D$  を  $f$  の定義域、 $w$  を  $z$  における  $f$  の値、 $S$  を  $f$  の値域という。点  $z = x + iy$  が  $z$  平面上の領域  $D$  を動くとき、これに対応して  $w = u + iv$  が動く  $w$  平面上の範囲が値域  $S$  である。定義域が特に指定されていない場合は、通常、考えられる最大の集合を定義域とみなす。 $D$  内の変数  $z$  の 1 つの値に対して  $S$  内の 1 つの  $w$  値が対応する関数を 1 価関数といい、変数  $z$  の 1 つの値に対して 2 つ以上の  $w$  値が対応する関数を多価関数という。

<sup>1</sup> 実変数に対して関数値も常に実数である関数を実関数という。

<sup>2</sup>  $z \in D$  に対応する  $S$  の要素のことを写像  $f$  による  $z$  の像といい、 $f(z)$  で表す。

Fig.1 : 2 値関数

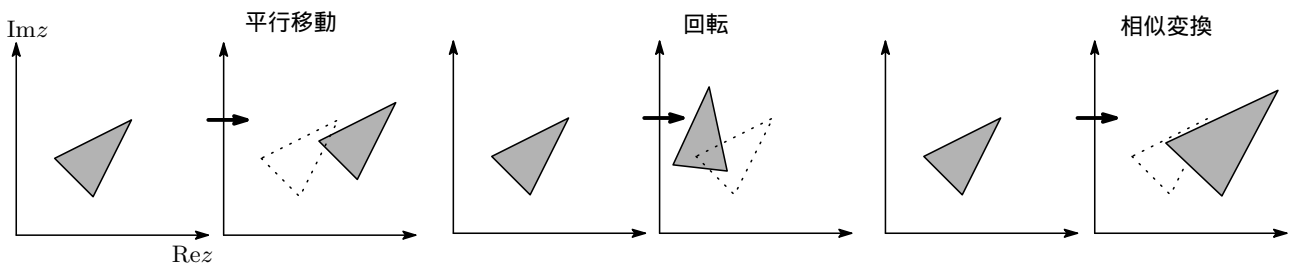


## 1.2 基本的な変換

基本的な変換として、平行移動、回転、相似変換、反転がある。

- (1) 平行移動  $w = z + \alpha$   
 $z$  平面内の図形は、 $\alpha$  だけ平行移動される。
- (2) 回転  $w = e^{i\theta_0} z = (\cos \theta_0 + i \sin \theta_0) z$   
 $z$  平面内の図形は、原点を中心として角  $\theta_0$  だけ回転される。 $\theta_0 > 0$  のとき、回転は反時計回りとなり、 $\theta_0 < 0$  のとき、時計回りとなる。
- (3) 相似変換  $w = az$   
 $z$  平面内の図形は、 $z$  の方向に相似変換される。 $a > 1$  のとき拡大、 $0 < a < 1$  のとき縮小される。
- (4) 反転  $w = 1/z$   
 この変換は少し複雑で、後ほど詳細に見るが、変数  $z$  の偏角の符号を逆転し、 $1/|z|$  の大きさをもつ複素数に移される。

Fig.2 : 基本的な変換



## 1.3 等角写像

領域  $D$  内の複素変数  $z = x + iy (z \in D)$  と領域  $S$  内の値  $w = u + iv (w \in S)$  との間に次の関数関係があるとする。

$$w = f(z) \tag{1.5}$$

ここで、 $f(z)$  は  $z = z_0$  の近傍で正則かつ  $f'(z_0) \neq 0, \infty$  とする。 $f(z)$  により、領域  $D$  ( $z$  平面) 内の点  $z$  は領域  $S$  ( $w$  平面) 内の点  $w$  に対応させられているとき、 $f(z)$  を  $D$  から  $S$  への写像ということは既に述べた。

いま、 $z$  平面上の点  $z_0$  から微小距離  $r_1$  だけ離れた点  $z$  を考え、 $z - z_0 = r_1 e^{i\theta_1}$  とし、これに対応する  $w$  平面上の 2 点間の相対位置を  $w - w_0 = r_2 e^{i\theta_2}$  で表す。そうすると

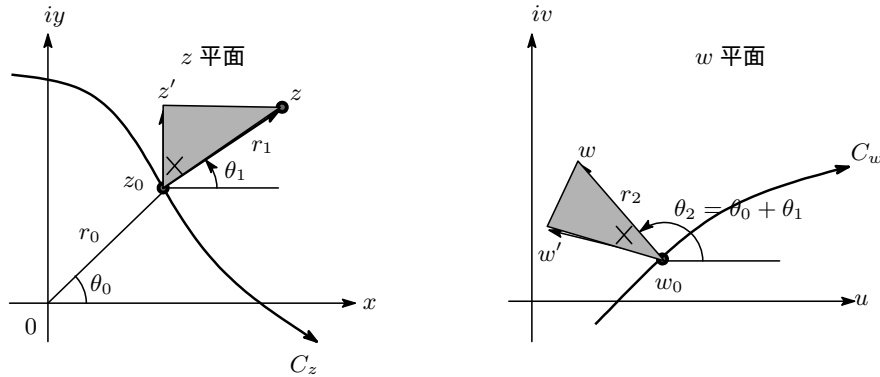
$$\frac{r_2 e^{i\theta_2}}{r_1 e^{i\theta_1}} = \frac{w - w_0}{z - z_0} = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \approx \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0) \tag{1.6}$$

が得られる。 $f'(z_0) = r_0 e^{i\theta_0}$  とおくと

$$r_2 e^{i\theta_2} = (r_1 r_0) e^{i(\theta_1 + \theta_0)} \quad (1.7)$$

となり, これから, 写像  $f(z)$  により, 点  $z_0$  にある微小ベクトル  $z - z_0$  が点  $w_0$  にある微小ベクトル  $w - w_0$  に移る際, ベクトルの長さが  $r_0 = |f'(z_0)|$  倍となり, 偏角が  $\theta_0 = \arg f'(z_0)$  だけ反時計方向に回転することがわかる。

Fig.3: 等角写像



$r_0$  と  $\theta_0$  は, 場所  $z_0$  に固有の値であるから, Fig.3 に示す  $z$  平面上のベクトル  $\overrightarrow{z_0 z'}$  は,  $\overrightarrow{z_0 z}$  ベクトルと全く同じ伸縮と回転を受けて  $w$  平面上のベクトル  $\overrightarrow{w_0 w'}$  に写像される。したがって, それぞれこの 2 つのベクトルのなす角度は写像によって変化しない。 いい換えると,  $z$  平面上の微小図形は相似を保ちつつ (角度を保ちつつ)  $w$  平面上に写像されるということになる。このことから (1.5) の写像を等角写像または共形写像と呼ばれる<sup>3</sup>。

$z$  平面上で 2 組の曲線の群  $\{C_1\}, \{C_2\}$  があり, これらの  $w = f(z)$  による像をそれぞれ曲線の群  $\{\Gamma_1\}, \{\Gamma_2\}$  とする。このとき,  $\{C_1\}$  と  $\{C_2\}$  の各曲線が直交していれば,  $\{\Gamma_1\}$  と  $\{\Gamma_2\}$  の各曲線は直交する。

例 1 .  $w = z + A$

$z$  平面上の原点を中心とする半径  $a$  の円は  $w$  平面上にいかん写像されるか見てみよう。

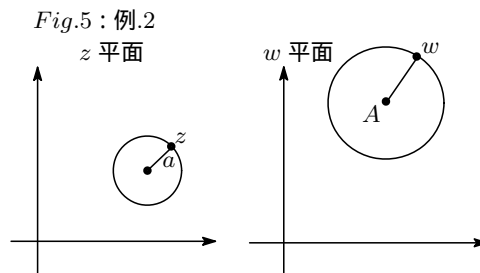
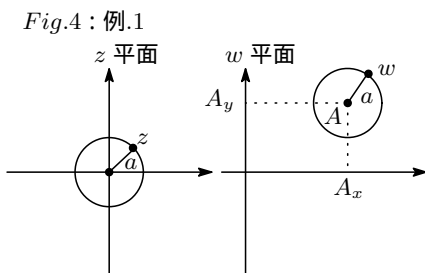
$w = u + iv, z = x + iy, A = A_x + iA_y$  として,

$$\begin{aligned} w &= u(x, y) + iv(x, y) = (x + iy) + (A_x + iA_y) = (x + A_x) + i(y + A_y) \\ \therefore x &= u - A_x, y = v - A_y \end{aligned} \quad (1.8)$$

例えば上式を円の方程式  $x^2 + y^2 = a^2$  に代入すると

$$(u - A_x)^2 + (v - A_y)^2 = a^2 \quad (1.9)$$

これから,  $z$  平面上の円は  $w$  面上では同じ半径  $a$  の円が位置を  $A$  だけ変えて写像される。



<sup>3</sup>  $z$  平面上の曲線群を  $w$  平面上に正則関数によって等角写像すると, 全体としての形は大きく変化するが, 局所的には単に図形の伸縮, 回転がおこなわれているにすぎない。尚, Fig.3 の作図で角度  $\times$  が等しくないように見えるが等しいと見做してください ( ^^ );

例 2 .  $w = Bz$

$z$  平面上の点  $A(A_x, A_y)$  を中心とする半径  $a$  の円は  $w$  平面上でいかに写像されるか見てみよう。  
 $w = u + iv, z = x + iy, B = B_x + iB_y$  として ,

$$\begin{aligned} w = Bz &= u + iv = (B_x + iB_y)(x + iy) = (B_x x - B_y y) + i(B_y x + B_x y) \\ \therefore u &= B_x x - B_y y, \quad v = B_y x + B_x y \end{aligned} \quad (1.10)$$

$$\therefore x = \frac{B_x u + B_y v}{B_x^2 + B_y^2}, \quad y = \frac{B_x v - B_y u}{B_x^2 + B_y^2} \quad (1.11)$$

上式を例えば円方程式  $(x - A_x)^2 + (y - A_y)^2 = a^2$  に代入すると

$$\begin{aligned} \left( \frac{B_x u + B_y v}{B_x^2 + B_y^2} - A_x \right)^2 + \left( \frac{B_x v - B_y u}{B_x^2 + B_y^2} - A_y \right)^2 &= a^2 \\ \therefore \{u - (A_x B_x - A_y B_y)\}^2 + \{u - (A_x B_y + A_y B_x)\}^2 &= (B_x^2 + B_y^2)a^2 \end{aligned} \quad (1.12)$$

これから ,  $z$  平面上の半径  $a$  の円は  $w$  面上では位置を変えて半径  $a(B_x^2 + B_y^2)^{1/2}$  の円に写像される。

例 3 .  $w = z^2$

$z$  平面上の点  $z$  が  $w$  平面上にいかに写像されるか見てみよう。  
 $w = u + iv, z = re^{i\theta}$  として ,

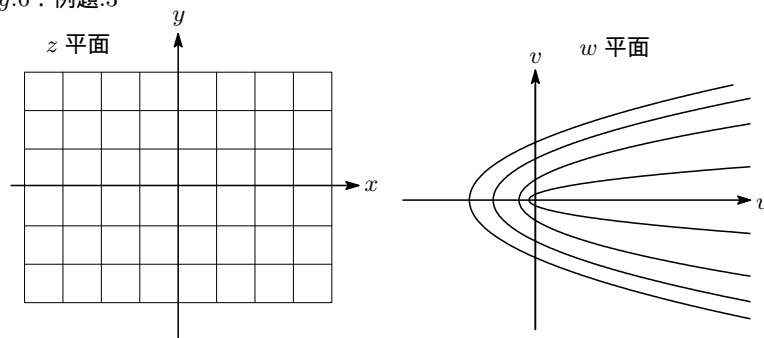
$$\begin{aligned} w = z^2 &= u + iv = r^2 e^{i2\theta} = r^2 (\cos 2\theta + i \sin 2\theta) = r^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + i 2r^2 \sin \theta \cos \theta \\ \therefore u &= r^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta), \quad v = 2r^2 \sin \theta \cos \theta \end{aligned}$$

これから  $\cos \theta$  を消去して整理すると

$$v^2 = 4(r \sin \theta)^2 \{u + (r \sin \theta)^2\} = 4p(u + p), \quad p = r^2 \sin^2 \theta$$

よって  $z$  平面上での動きは ,  $w$  平面上での準線  $u = -2p$  , 原点を焦点とする放物線に写像される。

Fig.6 : 例題.3



例 4 .  $w = \log z$

$z$  平面上の点  $z$  が  $w$  平面上でいかに写像されるか見てみよう。  
 $z$  平面上の任意の点を  $z = r e^{i\theta}$  とおくと

$$w = \log z = u + iv = \log r + i(\theta + 2n\pi) \quad (n : \text{任意の整数}) \quad (1.13)$$

これからわかるように , 対数関数  $\log z$  は 0 以外の任意の複素数  $z$  に対して可算無限個の値を対応させる無限多価関数である。  $z$  が  $z$  平面上を動くとき , 対数関数の無限個の値

$$w_n = \log r + i(\theta + 2n\pi) \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

が  $w$  平面上をどのように動くか見てみよう。偏角  $\theta$  は  $-\pi < \theta \leq \pi$  をとるものとする<sup>4</sup>。まず、 $z$  が原点を始点とする一定偏角  $\theta$  の半直線  $\arg z = \theta$  上を動くとき、 $w_n$  は実軸に平行な直線  $\text{Im } w = \theta + 2n\pi$  の上を動く。次に、 $z$  が一定半径  $r$  の円周上を動くとき、 $w_n$  は虚軸に平行な直線  $\text{Re } w = r$ ,  $-\pi + 2n\pi < \text{Im } w \leq \pi + 2n\pi$  の上を動く。したがって、 $z$  が  $z \neq 0$  の範囲、つまり原点を除く  $z$  平面  $\{z | z = re^{i\theta}, 0 < r, -\pi < \theta \leq \pi\}$  を動くとき、 $w_n$  は  $w$  平面の区域  $\{w | w = u + iv, -\infty < u < \infty, -\pi + 2n\pi < v \leq \pi + 2n\pi\}$  を動く。 $w$  平面上で  $\theta = \text{一定}$  とすると上式より原点を通る放射線となり、 $u = \text{一定}$  とすると原点を中心とする円となる。

例 5.  $w = e^z$

$e^z$  は周期  $2\pi i$  の周期関数である<sup>5</sup>。指数関数  $e^z$  によって  $z$  平面上の実軸、虚軸に平行な直線群が  $w$  平面上にどのように写像されるか見てみよう。 $w = Re^{i\phi}$ ,  $z = x + iy$  とおくと

$$w = Re^{i\phi} = e^z = e^x \cdot e^{iy}$$

$$\therefore R = e^x, \phi = y \quad (1.14)$$

指数関数は周期  $2\pi i$  の周期関数であるから、 $z$  平面の  $\text{Im } z$  が  $2\pi$  の幅の帯状の区域として主値  $-\pi < \text{Im } z \leq \pi$  を考えればよい。これから、 $\phi = \text{一定}$  とすると、 $z$  平面上の虚軸に平行な直線  $x = a$  は  $w$  平面上の原点  $0$  を中心とする円  $|w| = R = e^a$  に写像され、 $x = \text{一定}$  とすると  $z$  平面上の実軸に平行な直線  $y = b$  は、 $w$  平面上の原点  $0$  から出る半直線  $\arg w = \phi = b$  に写像される。とくに、 $z$  平面の虚軸は  $w$  平面の単位円  $|w| = R = 1$  に写像され、 $z$  平面の左半平面 ( $\text{Re } z < 0$ )、右半平面 ( $\text{Re } z > 0$ ) はそれぞれ単位円の内部  $|w| < 1$ 、単位円の外部  $|w| > 1$  に写像される。これは例.3 でとりあげた対数関数による写像とちょうど逆の関係になっている。

Fig.7: 例.4

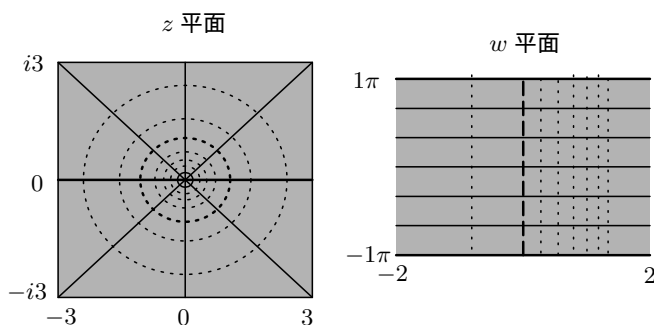
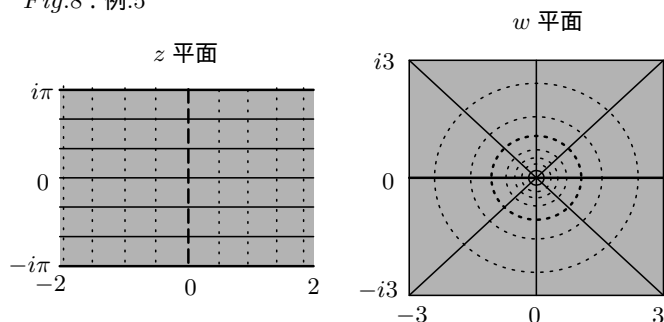


Fig.8: 例.5



例 6.  $w = k \log(z - c) - k \log(z + c)$  ( $c, k$  は正の実数)

$w = u + iv$  とおけば

$$w = k \log \left( \frac{z - c}{z + c} \right) = k \log Z \quad \text{ただし, } Z = \frac{z - c}{z + c}$$

$Z = Re^{i\Theta}$  とおくと  $R = |Z|$ ,  $\Theta = \arg(Z)$  であるので

$$u = R = |Z| = k \log \left| \frac{z - c}{z + c} \right|, \quad v = k \arg \left( \frac{z - c}{z + c} \right)$$

が得られる。 $w$  平面上の動きから  $z$  平面上の動きをみてみよう。 $w$  平面上で実軸に平行な直線  $u = a$  (一定) 上を動かすと

$$\left| \frac{z - c}{z + c} \right| = a = \text{一定}$$

<sup>4</sup> この代表的な区域を主値と呼んでいる。

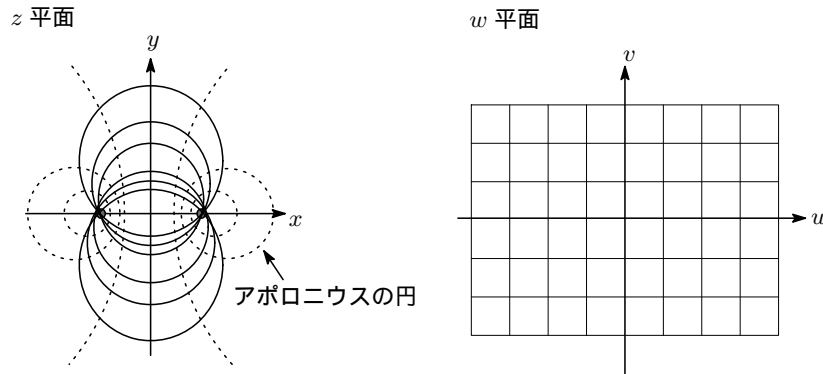
<sup>5</sup>  $e^z = e^x \cdot e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$ ,  $e^{z+2\pi i} = e^z \cdot e^{2\pi i} = e^z$

で、これは2点  $z = c$  と  $z = -c$  からの距離の比が一定の点の軌跡となり、これは円である<sup>6</sup>。また、 $w$  平面の虚軸に平行な直線  $v = b$  (一定) 上を動かすと

$$\arg\left(\frac{z-c}{z+c}\right) = \arg(z-c) - \arg(z+c) = \text{一定}$$

で、これは2点  $z = c$  と  $z = -c$  を通る円の軌跡となる。

Fig.9 : 例題.6



## 1.4 1次分数変換

### 1次分数関数

$$w = \frac{az + b}{cz + d} \quad (ad - bc \neq 0) \quad (1.15)$$

を複素関数論では1次関数というが(1.15)を  $z$  平面から  $w$  平面への写像とみなすとき ( $w$  は  $cz + d \neq 0$  で正則で、 $w' \neq 0$  である<sup>7</sup>)、通常これを1次分数変換という。 $c \neq 0$  ならば(1.15)の分母分子を  $c$  で割ると

$$\begin{aligned} w &= \frac{\frac{a}{c}z + \frac{b}{c}}{z + \frac{d}{c}} = \frac{a}{c} + \frac{\frac{b}{c} - \frac{ad}{c^2}}{z + \frac{d}{c}} = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c^2} \frac{1}{z + \frac{d}{c}} \\ &= \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c^2} w_1 \quad \left( w_1 = \frac{1}{w_2}, \quad w_2 = z + \frac{d}{c} \right) \end{aligned}$$

となるから、1次変換は、反転と対称変換の合成である  $w_1 = 1/w_2$  と相似変換を重ねたものであることが分かる。また(1.15)で  $c = 0$  の場合は

$$w = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$$

となって、相似変換と平行移動となる。以上、整理すると、1次分数変換はセクション1.2で述べた4つの変換

- (1) 平行移動  $w = z + \alpha$
- (2) 回転  $w = e^{i\theta_0} z = (\cos \theta_0 + i \sin \theta_0) z$
- (3) 相似変換  $w = a z$
- (4) 反転  $w = 1/z$

で成り立っていることになる。

<sup>6</sup> アポロニウスの円：2点からの距離の比が一定な点の軌跡。

<sup>7</sup>  $w' = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2}$  より、 $ad - bc \neq 0$  は等角写像になるための条件である。

### 1.4.1 1次分数変換の基本的な性質

1次分数変換(1.15)を $z$ について解くと

$$z = \frac{-dw + b}{cw - a} \quad (1.16)$$

となって、1次分数変換の逆も1次分数変換である。

また、もう一つの1次分数変換を

$$\eta = \frac{a'w + b'}{c'w + d'} \quad (1.17)$$

として(1.15)と(1.17)の合成を考えると

$$\eta = \frac{(a'a + b'c)z + (a'b + b'd)}{(c'a + d'c)z + (c'b + d'd)} \quad (1.18)$$

となるから、1次分数変換の合成もやはり1次分数変換である。

1次分数変換(1.15)に対して

$$z = \frac{az + b}{cz + d} \longrightarrow cz^2 - (a - d)z - b = 0 \quad (1.19)$$

を満たす $z$ 、つまり、写像により像点がもとの点と同じ複素数となる時、この点を1次分数変換の不動点という。 $c \neq 0$ であれば(1.19)は $z$ の2次方程式となり、不動点は2個存在する。また、 $c = 0, a \neq d$ であれば1次方程式となり、不動点は1個存在する。

**【問題】** 次の関数 $f(z)$ について、 $f(z) = z$ となる点(不動点)を求めよ。

(1)  $f(z) = (iz - 3)/(z + 3i)$  (2)  $f(z) = (5 - 2iz)(z + 2i)$

**【答え】** (1)  $z = (iz - 3)/(z + 3i)$  より  $z = i$ , (2)  $z = (5 - 2iz)(z + 2i)$  より  $z = \pm 1 - 2i$

### 1.4.2 円円対応

$z$ 平面で次の方程式

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0 \quad (B^2 + C^2 > 4AD) \quad (1.20)$$

は、 $A \neq 0$ ならば円を表し、 $A = 0$ ならば直線を表す。ここで、直線を半径無限大の円と考え、直線は円の特別なものと考えることができる。そこで円または直線を広義の円ということにすれば、

「1次分数変換は、複素平面上の円を円に移す」

ということになる。

[証明]  $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ として(1.20)に入れると

$$Ar^2 + Br \cos \theta + Cr \sin \theta + D = 0$$

これを变形して

$$D \left( \frac{1}{r^2} \right) + B \frac{1}{r} \cos \theta + C \frac{1}{r} \sin \theta + A = 0 \quad (1.21)$$

さて、 $w = 1/z = u + iv$ を考えると、

$$\begin{aligned} w = u + iv &= \frac{1}{r}(\cos \theta - i \sin \theta) \\ \therefore u &= \frac{1}{r} \cos \theta \quad v = \frac{1}{r} \sin \theta \end{aligned}$$

これを(1.21)に入れると

$$D(u^2 + v^2) + Bu - Cv + A = 0 \quad (1.22)$$

が得られる。 $D = 0$ のとき、 $w$ 平面上の直線(広義の円)を表し、 $D \neq 0$ のときは円を表す。したがって、1次分数変換 $w = 1/z$ は広義の円を広義の円に移す<sup>8</sup>。

<sup>8</sup>  $z = 0$ の反転による像は無限遠点(拡張した複素平面)とする。相似変換が広義の円を広義の円に移すことは明らかである。

例 7.  $w = \frac{1}{z}$

$z$  平面の虚軸に平行な直線  $x = a$  の像上の任意の点  $w$  が満たすべき方程式を求めてみよう。

$$\begin{aligned} z = a, \bar{z} = a \text{ より } \frac{z + \bar{z}}{2} &= a \\ w = \frac{1}{z} \text{ より } \frac{1}{2} \left( \frac{1}{w} + \frac{1}{\bar{w}} \right) &= a \end{aligned} \quad (1.23)$$

(1.23) より

$$2a|w|^2 - w - \bar{w} = 0 \quad (1.24)$$

が得られる。この方程式が示す図形は

(1)  $a = 0$  ( $z$  平面上の虚軸) のとき,  $-w - \bar{w} = -2\operatorname{Re} w = 0$ .  $\operatorname{Re} w = 0$  で  $w$  平面上の虚軸を表す。

(2)  $a \neq 0$  のとき,  $w = u + iv$  とおくと (1.24) は

$$2a(u^2 + v^2) - 2u = 0 \quad \longrightarrow \quad \left(u - \frac{1}{2a}\right)^2 + v^2 = \left(\frac{1}{2a}\right)^2$$

となって,  $w$  平面上で中心  $\operatorname{Re} w = 1/2a$ ,  $\operatorname{Im} w = 0$ , 半径  $1/2a$  の円となる。これは  $a$  の値をパラメータとした点  $0$  で接する円群を与える。

次に,  $z$  平面の実軸に平行な直線  $y = b$  の像上の任意の点  $w$  が満たすべき方程式を求めてみよう。

$$\begin{aligned} z = x + ib, \bar{z} = x - ib \text{ より } \frac{z - \bar{z}}{2i} &= b \\ w = \frac{1}{z} \text{ より } \frac{1}{2i} \left( \frac{1}{w} - \frac{1}{\bar{w}} \right) &= b \end{aligned} \quad (1.25)$$

これから

$$2b|w|^2 - iw + i\bar{w} = 0 \quad (1.26)$$

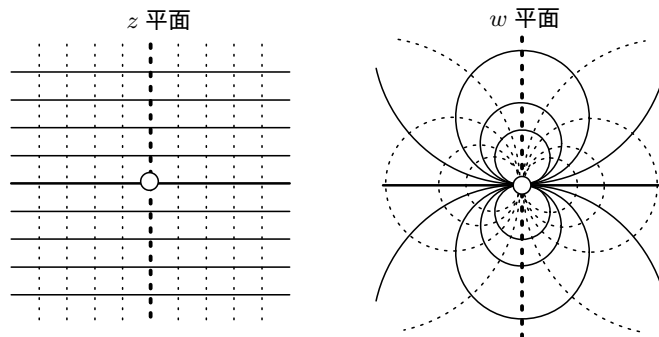
(1)  $b = 0$  のとき,  $-iw + i\bar{w} = 2\operatorname{Im} w = 0$ .  $\operatorname{Im} w = 0$  の直線を表す。

(2)  $b \neq 0$  のとき,  $w = u + iv$  とおくと (1.26) は

$$2b(u^2 + v^2) + 2v = 0 \quad \longrightarrow \quad u^2 + \left(v + \frac{1}{2b}\right)^2 = \left(\frac{1}{2b}\right)^2 \quad (1.27)$$

となって,  $w$  平面上で中心  $\operatorname{Re} w = 0$ ,  $\operatorname{Im} w = -1/2b$ , 半径  $1/2b$  の円となる。これは  $b$  の値をパラメータとした点  $0$  で接する円群を与える。尚,  $z = 0$  では関数値が定義できず, また  $w = 0$  ではそれに対応する  $z$  の値が存在しないので, それぞれ白丸でしめす。

Fig.10 例.7



例 8.  $w = z + (a^2/z)$  ( $a > 0$ )

これはジューコフスキー (Joukowski) 変換とよばれる。与式を  $z$  で微分すると

$$\frac{dw}{dz} = 1 - \frac{a^2}{z^2}$$



となり,  $z = 0$  を除いて与式は正則関数である。つまり,  $z \longleftrightarrow w$  で等角写像される (念のための確認)。  
 $z$  平面上の任意の点を  $z = re^{i\theta}$ ,  $w$  平面上の対応する点を  $w = u + iv$  とすると

$$u + iv = re^{i\theta} + \frac{a^2}{r}e^{-i\theta} = \left(r + \frac{a^2}{r}\right)\cos\theta + i\left(r - \frac{a^2}{r}\right)\sin\theta$$

$$\therefore u = \left(r + \frac{a^2}{r}\right)\cos\theta \quad v = \left(r - \frac{a^2}{r}\right)\sin\theta \quad (1.28)$$

- (1)  $z$  平面上の半径  $r$  の円:  $z$  平面上の半径  $r$  の円が  $w$  平面上にどのように写像されるか見てみる。  
 ・  $r = a$  のとき (1.28) より

$$u = 2a \cos\theta \quad v = 0$$

点  $z$  が  $z$  平面上で半径  $a$  の円周を  $\theta = 0$  から  $2\pi$  に 1 周すると,  $w$  平面上では点  $w$  が  $-2a, 2a$  を両端とする直線を 1 周する。すなわち,  $z$  平面上で半径  $a$  の円は,  $w$  平面上では長さ  $4a$  の線分に写像されることがわかる。

・  $r > a$  のとき (1.28) の  $\theta$  を消去すると

$$\frac{u^2}{(r + a^2/r)^2} + \frac{v^2}{(r - a^2/r)^2} = 1 \quad (1.29)$$

が得られる。(1.29) は, 原点に中心があり,  $u$  軸を長軸として, 長径  $(r + a^2/r)$ , 短径  $(r - a^2/r)$  の楕円の方程式である<sup>9</sup>。すなわち,  $z$  平面上の  $r > a$  の円は,  $w$  平面上の楕円に写像される。

・  $r < a$  のとき … ややこしいので略 (笑い)。

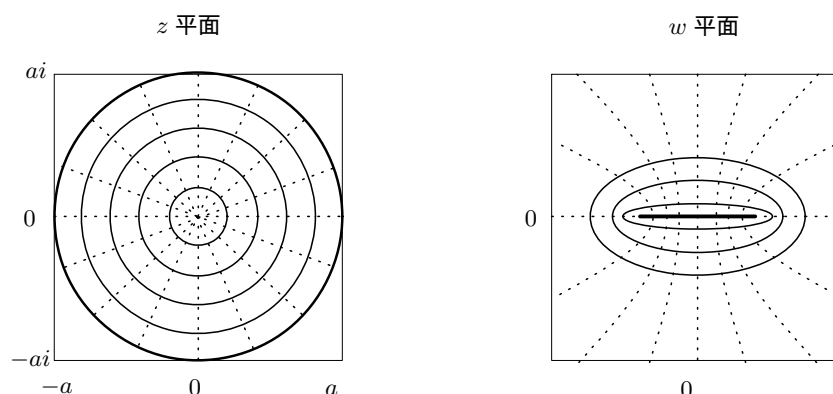
- (2)  $z$  平面上の原点から放射状にでる半直線群:  $z$  平面上の原点から放射状にでる半直線群 (偏角一定) が  $w$  平面上にどのように写像されるか見てみる。

(1.28) から  $r$  を消去すると

$$\frac{u^2}{(\sqrt{2}a \cos\theta)^2} - \frac{v^2}{(\sqrt{2}a \sin\theta)^2} = 1 \quad (1.30)$$

が得られる。これは,  $(2a, 0), (-2a, 0)$  を焦点とする双曲線の方程式である。

Fig.11 例 8



### 例 9. ジューコフスキー翼

$z$  平面で, Fig.12 に示すように原点近くの 1 点  $M(x, y)$  (いずれの軸上にもない<sup>10</sup>) を中心とする円が例 8 のジューコフスキー変換により  $w$  平面上でどのように写像されるかを見てみよう。

$$w = z + \frac{a^2}{z} \quad (1.31)$$

<sup>9</sup>  $r < a$  であれば短径が負となり楕円の方程式とはならない。

<sup>10</sup> 点  $M$  が原点にくれば例.8-1 と同じで  $w$  平面上では実軸上の半直線となる。

ただし、円と  $x$  軸の正の部分は  $x = a$  で交わるとする。

$z$  平面の円周上に点  $z$  をとり、 $\overline{Oz}$  と  $x$  軸のなす角を  $\theta$  とし、同じ角度で  $x$  軸に対して  $\overline{Oz}$  と反対側に  $\overline{Oz'}$  を引き、

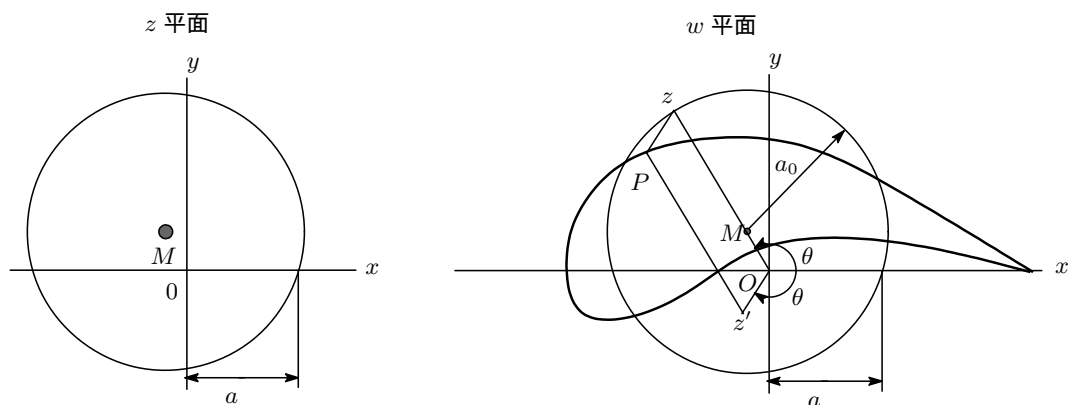
$$\overline{Oz} \times \overline{Oz'} = a^2$$

となるように  $z'$  をとれば、

$$z' = \overline{Oz'} e^{-i\theta} = \frac{a^2}{\overline{Oz}} e^{-i\theta} = \frac{a^2}{Oz e^{i\theta}} = \frac{a^2}{z}$$

となって、 $z'$  はジューコフスキー変換の第 2 項となるから、 $\overline{Oz}$  と  $\overline{Oz'}$  との合成ベクトル  $\overline{OP}$  を示す点は  $z$  点に対応する  $w$  点で翼形を形成する点となる。この翼形をジューコフスキー翼という。尚、円の中心  $M$  の位置の選び方により多様な形が得られる。

Fig.12 例 9



例 10 . 円  $|z - 1| = 1$  と直線  $y = 1$  は  $w = 1/z$  の写像でどんな曲線に移るか見てみよう<sup>11</sup>。

$$w = u + iv$$

とおく。円  $|z - 1| = 1$  の写像は

$$|z - 1| = \left| \frac{1}{w} - 1 \right| = \left( \frac{1}{w} - 1 \right) \left( \frac{1}{\bar{w}} - 1 \right) = \left( \frac{1 - w - \bar{w} + w\bar{w}}{w\bar{w}} \right) = 1$$

$$\therefore w + \bar{w} = 1$$

となるから、 $u = 1/2$  の直線に写像される。次に直線  $y = 1$  の写像を求めよう。 $z = i, \bar{z} = -i$  であるから

$$\frac{1}{2}(z - \bar{z}) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{w} - \frac{1}{\bar{w}} \right) = i$$

これから

$$u^2 + \left( v - \frac{1}{2} \right)^2 = \left( \frac{1}{2} \right)^2$$

が得られる。この方程式は  $w$  平面上で中心  $(0, i/2)$ 、半径  $1/2$  の円 ( $|w - i/2| = 1/2$ ) である。

## 2 流体力学への応用

いきなり流体力学といっても戸惑ってしまうので、簡単に復習しておこう。

<sup>11</sup> 例 7. も参照されたし。

## 2.1 流力の復習

流体力学への等角写像の応用を見るにあたって、知識として必要になるベルヌイの方程式、速度ポテンシャル、流れの関数、複素ポテンシャル等について、かいまつまんで簡単に復習しておこう。

### 2.1.1 ベルヌイの方程式

理想流体<sup>12</sup>が単位質量あたり  $U$  の外力ポテンシャル ( $X = -\partial U/\partial x, Y = -\partial U/\partial y$ ) のもとに定常流れをしている場合、流れの任意の 1 点において次のベルヌイの方程式が成立する。

$$\frac{1}{2}\rho q^2 + p + \rho U = C(\text{一定}) \quad (2.1)$$

ここで、 $q, p$  は任意の 1 点における流速と静圧とする。外力として重力のみが作用する場合は、比重量として  $\gamma = \rho g$  とおくと、上式は

$$\frac{\gamma}{2g}q^2 + p + \gamma z = C(\text{一定}) \quad (2.2)$$

となる。ベルヌイの方程式は、運動エネルギー、圧力として蓄えられるエネルギー、位置エネルギーの総和が一定ということを表しており、これは流線に沿った流体のエネルギー保存の式である。

### 2.1.2 速度ポテンシャルと流れの関数

非圧縮性・渦なし 2 次元流体において、流体内の任意の点における  $x, y$  軸方向の速度成分（分速度）をそれぞれ  $u, v$  とすると

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (2.3)$$

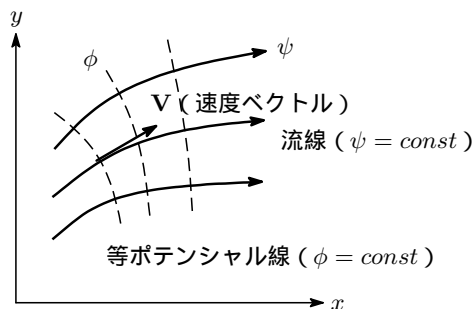
を満足する関数  $\phi(x, y)$  が必ず存在する。この  $\phi(x, y)$  を速度ポテンシャルと呼ぶ。 $\phi = const$  で示される曲線を等ポテンシャル線という。速度ポテンシャルとある方向 ( $s$  方向) の流速  $q$  の関係は、次式で与えられる<sup>13</sup>

$$q = \frac{\partial \phi}{\partial s} \quad (2.4)$$

また、任意の点における  $x, y$  軸方向の分速度をそれぞれ  $u, v$  とすると

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (2.5)$$

を満足する関数  $\psi(x, y)$  が必ず存在する。この  $\psi(x, y)$  を流れの関数という<sup>14</sup>。そして  $\psi(x, y) = const$  で示される曲線は流線を表す<sup>15</sup>。等ポテンシャル線  $\phi = const$  と流線  $\psi = const$  とは互いに直交し、速度ベクトルは流れの関数の接線になっている。



非圧縮性流体の渦なし 2 次元流体では (2.3) と (2.5) からコーシー・リーマンの方程式<sup>16</sup>

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (2.6)$$

<sup>12</sup> 理想流体の定義は「非圧縮性非粘性流体」あるいは「非粘性流体（圧縮性はあってもよい）」と 2 通りあるようです。

<sup>13</sup> ポテンシャルの傾きが速度。これが速度ポテンシャルと呼ばれる所以。

<sup>14</sup> 2 次元圧縮渦なし流れの場合には速度ポテンシャルと流れ関数の双方が存在する。渦があれば速度ポテンシャルは存在しない。

<sup>15</sup> この曲線上のどの部分をとっても、その両端に対する流れの関数の差はゼロになり、つまりその部分を横切る流れはない。

<sup>16</sup> 複素関数  $f(z) = u + iv$  の正則条件は  $\partial u/\partial x = \partial v/\partial y, \partial u/\partial y = -\partial v/\partial x$

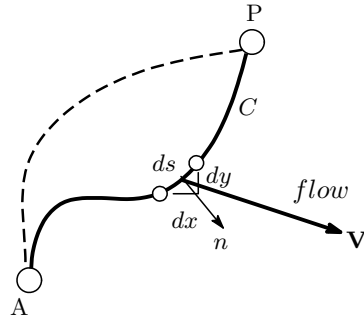
ならびにラプラスの方程式

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \quad (2.7)$$

が成り立ち、等ポテンシャル線 ( $\phi = \text{const}$ ) と流線 ( $\psi = \text{const}$ ) はつねに必ず直交する。

流れの中の任意の 2 点  $A, B$  間を通過する流量  $Q$  を求めてみると、

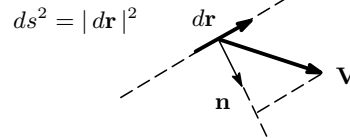
Fig.13



$C$  への接線方向成分:  $dx/ds = (dx/ds, dy/ds)$

これを時計回りに 90 度回転させると法線方向成分が求まる

法線方向成分  $n = (dy/ds, -dx/ds)$



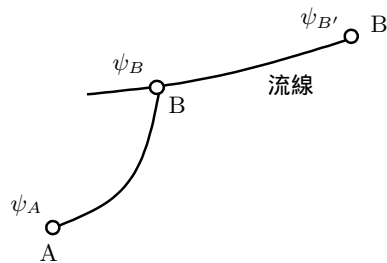
$ds$  間で左から右に流れる流量は、紙面に垂直に流れの厚さを 1 として

$$\int_A^P \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} ds = \int_A^P (V_x n_x + V_y n_y) ds = \int_A^P \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{dx}{ds} \right) ds = \int_A^P d\psi = \psi_P - \psi_A$$

となつて、 $Q = \psi_P - \psi_A$  で曲線  $AP$  を横切る流量は  $A$  と  $P$  を結ぶ経路に無関係で  $A, P$  点における  $\psi$  の値にのみ関係することがわかる。

問: 流れの関数が  $\psi = \text{const}$  で示される曲線は流線を表すことを示せ。

答: 点  $A, B, B'$  での流れの関数をそれぞれ  $\psi_A, \psi_B, \psi_{B'}$  とし、 $B, B'$  を通る曲線を流線とする。



曲線  $AB, ABB'$  を通る流量をそれぞれ  $Q, Q'$  とすると

$$Q = \psi_B - \psi_A, \quad Q' = \psi_{B'} - \psi_A \quad (2.8)$$

となるが、 $BB'$  は流線であるので  $BB'$  を横切る流量はない。したがって、 $AB$  を通る流量  $Q$  は  $ABB'$  をとおる流量  $Q'$  に等しくなるので

$$Q = Q', \quad \psi_B - \psi_A = \psi_{B'} - \psi_A, \quad \therefore \psi_B = \psi_{B'}$$

となつて、 $\psi = \text{const}$  の示す曲線は流線を表す。

### 2.1.3 複素ポテンシャル

一つの物理量である速度ポテンシャル  $\phi(x, y)$  を複素関数  $w(z)$  の実部に対応させ、もう一つの物理量である流れ関数  $\psi(x, y)$  を  $w(z)$  の虚部に対応させて、これらをまとめて

$$w(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y) \quad (z = x + iy) \quad (2.9)$$

と書けば、 $\phi$  と  $\psi$  はコーシー・リーマンの方程式を満たすことは既に見た。また、実部  $\phi(x, y)$  と虚部  $\psi(x, y)$  はそれぞれラプラスの方程式を満たし、 $w(z)$  は正則関数となる。この  $w(z)$  を複素ポテンシャル（複素速度ポテンシャル）と呼んでいる。

$z$  平面上の任意の点における  $x, y$  方向の分速度をそれぞれ  $u, v$  とすると、複素ポテンシャル  $w$  との間には次の関係式が成立する<sup>17</sup>。

$$\frac{dw}{dz} = u - iv \quad (2.10)$$

$u + iv$  を複素速度といい、 $u - iv$  を共役複素速度という。

問1：複素ポテンシャルが  $w = (u_0 - iv_0)z$ , ( $u_0, v_0 > 0$ ) で表される場合の流れの状態を求めよ。

答： $dw/dz = u_0 - iv_0$  となるので、 $x, y$  軸の正の方向にそれぞれ  $u_0, v_0$  の分速度を有する一様な流れを表す。

問2： $x, y$  方向の分速度がそれぞれ  $u = u_0x, v = -u_0y$  で表される流れの複素ポテンシャルを求めよ。

答： $dw/dz = u - iv = u_0(x + iy) = u_0z$  より、 $w = u_0z^2/2$  となる。

問3：複素ポテンシャルが  $w = aze^{-i\alpha}$ , ( $a > 0$ ) で表される流れの状態を求めよ。

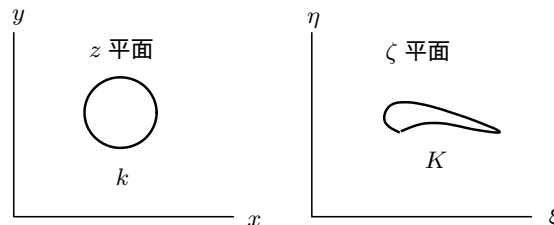
答： $dw/dz = u - iv = ae^{-i\alpha} = a \cos \alpha - ia \sin \alpha$  より、 $u = a \cos \alpha, v = a \sin \alpha$  となる。したがって流れの速度は大きさ  $q = \sqrt{u^2 + v^2} = a$ 、方向は  $x$  軸とのなす角を  $\theta$  とすると  $\tan \theta = v/u = \tan \alpha$  から、角  $\alpha$  をなす一様な流れである。

## 2.2 等角写像の応用について

以上で流体力学の大まかな復習をしたので、等角写像がどのように利用されるのかについて少し見てみよう。いま、

$$\zeta = f(z) \quad (2.11)$$

という関係で、 $z$  平面上の  $k$  という境界が  $\zeta$  平面上の  $K$  という境界に写像されるとする。



具体的には、 $z$  平面での  $k$  を境界とする流れが  $\zeta$  平面の  $K$  という境界に写像されたとしよう。 $z$  平面の  $k$  を境界とする流れが、複素ポテンシャル

$$w = \phi + i\psi = F(z)$$

で表されるとした場合、これに (2.11) の関係を入れて

$$w = \phi' + i\psi' = G(\zeta) \quad (2.12)$$

となったとすれば、 $G(\zeta)$  は  $\zeta$  平面において  $K$  を境界とする複素ポテンシャルとなる。したがって、 $\zeta$  平面での  $K$  を境界とする流れの状態が複雑で直接的に求められなくても、 $z$  平面における  $k$  を境界とする流れの状態が簡単に求められる場合は、 $dw/dz, dz/d\zeta$  を求めておき

$$\frac{dw}{d\zeta} = \frac{dw}{dz} \cdot \frac{dz}{d\zeta}$$

の関係を使って、 $dw/d\zeta$  を知ることができる。

<sup>17</sup>  $\partial w / \partial x = dw/dz \cdot \partial z / \partial x = dw/dz, \quad \partial w / \partial z = \partial w / \partial x = \partial(\phi + i\psi) / \partial x = u - iv$

### 2.2.1 等角写像の応用例

それでは、等角写像の流体力学への応用を例題で見てみることにしよう。

例 11 . 速度  $u_0$  の一様な流れの中に半径  $a$  の円柱がある場合の複素速度ポテンシャルは

$$w = u_0 \left( z + \frac{a^2}{z} \right) \quad (2.13)$$

で与えられることを示せ。

(2.13) より

$$\begin{aligned} w &= u_0 \left( z + \frac{a^2}{z} \right) = u_0 \left( x + iy + \frac{a^2}{x + iy} \right) = u_0 \left\{ x + \frac{a^2 x}{x^2 + y^2} + i \left( y - \frac{a^2 y}{x^2 + y^2} \right) \right\} \\ &= \phi + i\psi \end{aligned}$$

これから

$$\psi = u_0 y \left( 1 - \frac{a^2}{x^2 + y^2} \right) = u_0 \left( r - \frac{a^2}{r} \right) \sin \theta$$

が得られる。流線は  $\psi = C$  (一定) で与えられるから、

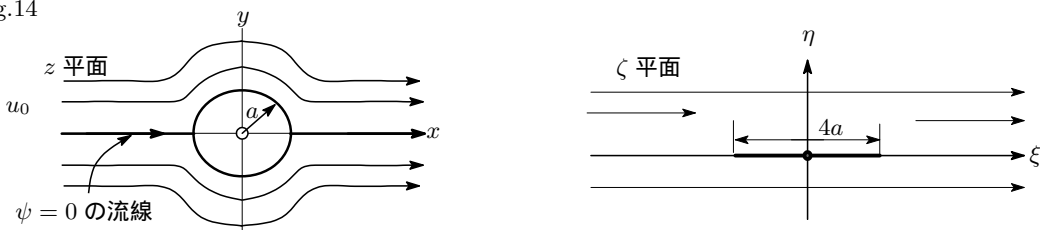
$$u_0 \left( r - \frac{a^2}{r} \right) \sin \theta = C$$

とくに  $C = 0$  とすると  $r = a$ ,  $\theta = k\pi$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) が得られる。 $r = a$  は半径  $a$  の円周を表すから、 $x$  軸および原点を中心とする半径  $a$  の円が流線になる。 $C$  をいろいろ変えて (2.14) の曲線を描くと<sup>18</sup>, 半径  $a$  の円柱をその軸に垂直によぎる定常流の流線が得られる (Fig.14 参照)。原点より十分遠方のところでは (2.13) の右辺の第 2 項を無視することができるので、速度  $u_0$  の一様な流れとなる。ということで、(2.13) は一様な流れの中に円柱がある場合の複素ポテンシャルを表している。

例 12 .  $z$  平面で速度  $u_0$  の一様な流れの中に、原点を中心とする半径  $a$  の円柱がおかれた流れの状態より (2.14) の関係で  $\zeta$  平面の平板周りの流れの複素ポテンシャルを求めよ<sup>19</sup>。

$$\zeta = z + \frac{a^2}{z} \quad (2.14)$$

Fig.14



$z$  平面の円柱の周りの複素ポテンシャルは、例 11 . より

$$w = u_0 \left( z + \frac{a^2}{z} \right) \quad (2.15)$$

で与えられる。これに (2.14) を入れると

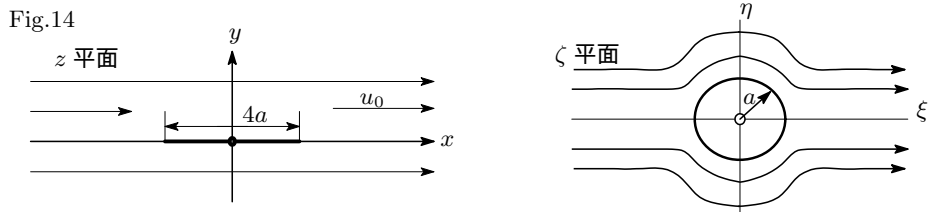
$$w = u_0 \zeta \quad (2.16)$$

となり、平板の周りは平面に平行な速度  $u_0$  の一様な流れとなる。

<sup>18</sup> <http://hp.vector.co.jp/authors/VA028062/subpage11chg.html> に BASIC のプログラムが掲載されている。

<sup>19</sup>  $w$  や  $\zeta$  の記号に混乱しないように (老婆心 ;; )

例 13 . 速度  $u_0$  の一様な流れの中にこれに平行して長さ  $4a$  の平板がおかれた状態より, 同じく速度  $u_0$  の一様な流れの中に, 円柱がおかれた場合の円柱周りの複素ポテンシャルを求めてみよ。



複素ポテンシャルは

$$w = \phi + i\psi = u_0(x + iy) = u_0z \quad (2.17)$$

で与えられる。ところで, 平板は例 8 でみたように, ジューコフスキー変換

$$z = \zeta + \left(\frac{a^2}{\zeta}\right) \quad (2.18)$$

で Fig.14 に示す円柱に写像される。したがって (2.18) を (2.17) に入れると求める複素ポテンシャルが得られる。

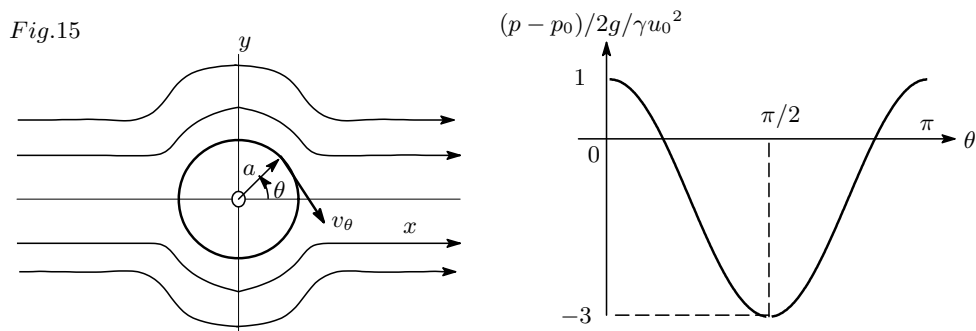
$$w = u_0 \left( \zeta + \frac{a^2}{\zeta} \right) \quad (2.19)$$

$\zeta$  平面上での速度を調べてみよう。(2.19) を  $\zeta$  で微分して  $|\zeta| \rightarrow \infty$  の極限をとると

$$\lim_{|\zeta| \rightarrow \infty} \frac{dw}{d\zeta} = \lim_{|\zeta| \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{a^2}{\zeta^2} \right) = 1 \quad (2.20)$$

となるので, この流れは十分遠方では実軸方向に速度 1 の流れを表していることがわかる。

例 14 . 速度  $u_0$  の一様な流れに半径  $a$  の円柱がおかれた場合の複素ポテンシャル  $w = u_0 \left( z + \frac{a^2}{z} \right)$  において, この円周上の流速並びに静圧を求めよ。ただし, 円柱より十分はなれた流れにおける静圧は  $P_0$  とする。



複素ポテンシャルを極座標表示すると (2.14) より

$$w = u_0 \left( z + \frac{a^2}{z} \right) = u_0 \left\{ r(\cos \theta + i \sin \theta) + \frac{a^2}{r(\cos \theta + i \sin \theta)} \right\} = u_0 \left( r + \frac{a^2}{r} \right) \cos \theta + i u_0 \left( r - \frac{a^2}{r} \right) \sin \theta$$

$$\therefore \phi = u_0 \left( r + \frac{a^2}{r} \right) \cos \theta$$

これから円周上の流速  $v_r, v_\theta$  は

$$v_r = \left. \frac{\partial \phi}{\partial r} \right|_{r=a} = \left. u_0 \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \cos \theta \right|_{r=a} = 0$$

$$v_\theta = \left. \frac{\partial \phi}{r \partial \theta} \right|_{r=a} = \left. u_0 \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} \right) (-\sin \theta) \right|_{r=a} = 2u_0 \sin \theta$$

が得られ、円周上の周速度<sup>20</sup>は大きさ  $2u_0 \sin \theta$  で Fig.15 に示した向きに流れ、円柱の上下 ( $\theta = \pm\pi/2$ ) で流速が 2 倍になっていることがわかる。次に、ベルヌイの式を使って静圧を求める。円周上と十分はなれた位置 ( $z = \infty$  のところでは流速は  $u = u_0$  のみとなる) について考えると

$$p + \frac{\gamma}{2g} (2u_0 \sin \theta)^2 = p_0 + \frac{\gamma}{2g} u_0^2$$

$$\therefore p = p_0 + \frac{\gamma}{2g} u_0^2 (1 - 4 \sin^2 \theta)$$

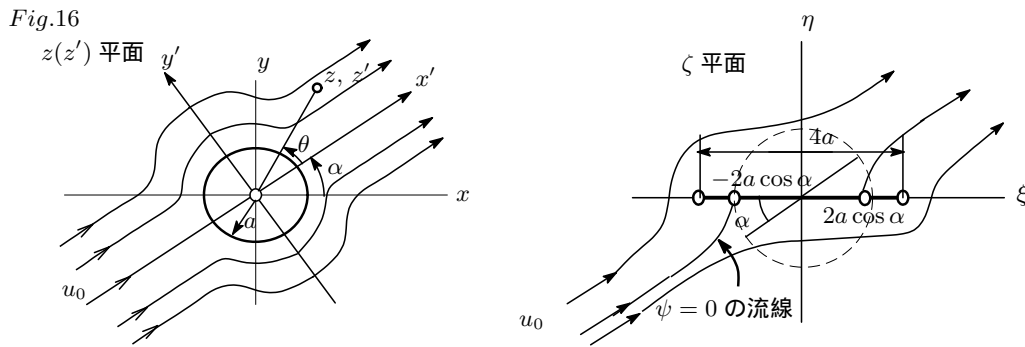
を得る。円柱が受ける圧力は、Fig.15 より、円柱上下端で圧力は最小値を取り、円柱前縁と後縁で圧力は最大値を取る (円柱物体による圧力の損失は 0 で、完全に圧力が回復する)、円柱中心縦軸を中心にして左右 (物体前後) 線対称 となることがわかる。

例 15 . Fig.16 に示すように  $z$  平面の  $x$  軸と傾き  $\alpha$  をなす速度  $u_0$  の一様な流れが半径  $a$  の円柱に当たる場合の状態より、長さ  $4a$  の平板に傾き  $\alpha$  をなす速度  $u_0$  の一様な流れがあたる場合の流れの状態を求めよ。

$z'$  方向に速度  $u_0$  の一様な流れの中に円柱がある場合の複素ポテンシャルは  $z'$  平面座標系で考えて

$$w = u_0 \left( z' + \frac{a^2}{z'} \right) \quad (2.21)$$

となる。



$z'$  平面と  $z$  平面とは  $\alpha$  の角をなしているので

$$z = r e^{i(\alpha+\theta)} = r e^{i\theta} e^{i\alpha} = z' e^{i\alpha} \quad \rightarrow \quad z' = z e^{-i\alpha}$$

$z$  平面での複素ポテンシャルは、したがって

$$w = u_0 \left( z e^{-i\alpha} + \frac{a^2 e^{i\alpha}}{z} \right) \quad (2.22)$$

さて、 $z$  平面上の円柱は、例 11 . より

$$\zeta = z + \left( \frac{a^2}{z} \right) \quad (2.23)$$

<sup>20</sup>  $v_s = \partial \phi / \partial s$ , 微小円周長  $ds = r d\theta$



$z$  について解くと

$$z = \pm \frac{1}{2}(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 4a^2}) \quad (2.24)$$

が得られる。いま  $z$  は半径  $a$  の円周上または円の外側の領域にあり、 $|\zeta| \rightarrow \infty$  に対して  $|z| \rightarrow \infty$  が対応するので (2.24) の右辺の符号はプラスをとることとする。(2.22) の変換により、 $z$  面上の円柱は  $\zeta$  平面上の長さ  $4a$  の平板に写像されるから、 $\zeta$  面状での流れは (2.24) を (2.22) に入れて

$$w = u_0 \left( \frac{\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 4a^2}}{2} e^{-i\alpha} + \frac{2a^2}{\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 4a^2}} e^{i\alpha} \right) = u_0(\zeta \cos \alpha - i\sqrt{\zeta^2 - 4a^2} \sin \alpha) \quad (2.25)$$

$$\therefore \phi = u_0 \zeta \cos \alpha \quad \psi = -u_0(\sqrt{\zeta^2 - 4a^2} \sin \alpha) \quad (2.26)$$

この様な流れを図示すると Fig.16 のようになる<sup>21</sup>。流線は  $\zeta$  が十分大きなところでは  $\psi = -u_0 \zeta \sin \alpha$  となるので、 $\xi$  軸と  $\alpha$  の傾きをなす速度  $u_0$  の一様な流れとなる。流れが平板に当たって速度がゼロになる点(岐点)は  $dw/d\zeta = dw/dz \cdot dz/d\zeta = 0$  より、 $dw/dz = 0$  として求められるから (2.22) より

$$\frac{dw}{dz} = u_0 \left( e^{-i\alpha} - \frac{a^2 e^{i\alpha}}{z^2} \right) = 0$$

$$\therefore z = \pm a e^{i\alpha} \quad (2.27)$$

得られた  $z$  を (2.23) に入れて

$$\zeta = z + a^2/z = \pm a(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}) = \pm 2a \cos \alpha \quad (2.28)$$

したがって、 $\psi = 0$  の流線は  $\xi = -2a \cos \alpha$  にて平板に達し、 $\xi = 2a \cos \alpha$  で平板から離れることになる。

(了)

<sup>21</sup> グラフィックソフトでこのような絵を描きたいが、まだ出来ていません。調査中です。ご存知の方が居られれば一報いただければ嬉しいですが。