

# 曲線と曲面

*H E N L O U*

2011年 10月 20日

これから曲線と曲面のお話を進めます。小林昭七著「曲線と曲面の微分幾何」(裳華房)はこの方面の定番テキストとのことですが、このレポートも主にこの本を参考にしました。そのほか、千葉逸人著「ベクトル解析からの幾何学入門」(現代数学社)も分かりやすく、お薦めの一冊です。

このレポートの内容は目次のとおりで、当初は微分形式を使った曲面論の話までと思っていたのですが、あまりにページ数が増えてしまうので断念し、次の機会に譲ることにしました。おかしな議論や誤植等を見つけれれば、ご一報いただければと思います。

## 目次

<b>1</b>	<b>平面</b>	<b>2</b>
1.1	平面上の曲線	2
1.1.1	曲線のパラメータ表示	2
1.1.2	平面曲線	2
	曲線の長さと接線ベクトル	2
	曲率と曲率半径, 曲率中心	4
1.2	空間曲線	10
1.2.1	空間曲線の式	10
	フルネ・セレーの公式	11
1.2.2	曲率, 捩率の一般的公式	14
1.2.3	ブーケの公式	16
<b>2</b>	<b>曲面</b>	<b>16</b>
2.1	曲面のパラメータ表示	16
2.2	接ベクトル	17
2.3	第1基本形式	18
2.4	第2基本形式	20
2.4.1	第2基本形式と法曲率	20
2.4.2	ガウス曲率と平均曲率	23
2.4.3	曲率線	29
	オイラーの公式	30

# 1 平面

## 1.1 平面上の曲線

### 1.1.1 曲線のパラメータ表示

平面上の曲線といえば,  $y = ax + b$  という直線や  $y = ax^2 + bx + c$  という 2 次曲線, あるいは  $x^2 + y^2 = r^2$  という円を表す曲線などがあり, これら直線を含む曲線の方程式は一般的に  $y = f(x)$  というような形に書けます。微分幾何<sup>1</sup>では曲線をこのような形に表さず, 変数  $x, y$  が平等に扱えるように実変数のパラメータ  $t$  を使って

$$\begin{cases} x = x(t) & (a \leq t \leq b) \\ y = y(t) \end{cases} \quad (1.1)$$

と表します。  $x(t), y(t)$  は  $t$  の連続関数で,  $t$  に関して 2, 3 回は微分可能<sup>2</sup>としておきます。たとえば  $x^2 + y^2 - a^2 = 0$  という円の場合, パラメータ表示で書くと

$$\begin{cases} x = a \cos(t) \\ y = b \sin(t) \end{cases} \quad (1.2)$$

となります。平面上の曲線に限らず, 3 次元空間での曲線は  $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$  と表すことができるし, 一般に  $n$  次元ユークリッド空間での曲線は  $x^i = x^i(t), x^2 = x^2(t), \dots, x^n = x^n(t)$  と表すことができます。  $x^i$  を  $i$  成分とするベクトル  $p$  を使うと, ユークリッド空間における曲線は

$$p = p(t) \quad (1.3)$$

と表せます。

### 1.1.2 平面曲線

曲線の長さや接線ベクトル

ある平面曲線  $p = p(t)$  を考えます。(1.3) をパラメータ  $t$  で微分したものを

$$\dot{p}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t)) \quad (1.4)$$

と書くことにします。ただし,

$$\dot{p}(t) \equiv \frac{dp}{dt} = \left( \frac{dx(t)}{dt}, \frac{dy(t)}{dt} \right)$$

$\dot{p}(t)$  は平面曲線  $p = p(t)$  の接線ベクトルとなり,  $t$  を時間とすると  $\dot{p}(t)$  は速度ベクトルになります。ベクトル  $\dot{p}(t)$  の長さを  $|\dot{p}(t)|$  とすると, ピタゴラスの定理より

$$|\dot{p}(t)| = \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} \quad (1.5)$$

で与えられます。次に, 曲線の長さ (弧長) を求めます。パラメータ  $t$  の変化に対する  $p$  の変化の割合は

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{p(t + \Delta t) - p(t)}{\Delta t}$$

<sup>1</sup> 微積分を使って曲線や曲面の性質を研究する分野を微分幾何学という。

<sup>2</sup> これを  $C^2$  級あるいは  $C^3$  級といいます。

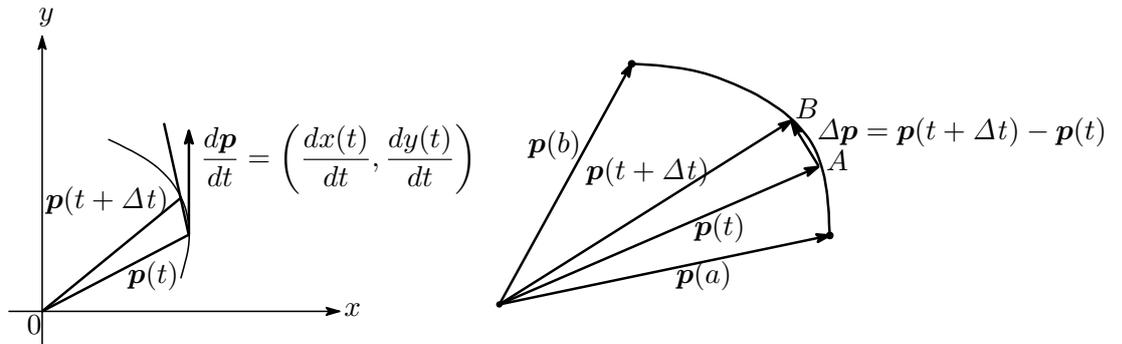
ここで  $t$  の変化を微小にすると  $p(t)$  近傍での曲線の長さ  $|dp(t)|$  を求めることができます。

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta p(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p(t + \Delta t) - p(t)}{\Delta t} = \frac{dp(t)}{dt} = \dot{p}(t)$$

$$\therefore dp(t) = \dot{p}(t) dt$$

したがって,  $t$  のとる範囲 ( $a \leq t \leq b$ ) での曲線の長さ  $s$  は

$$s = \int_a^b |dp(t)| = \int_a^b |\dot{p}(t)| dt = \int_a^b \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} dt \quad (1.6)$$



$s$  は動点  $p(t)$  が  $t = a$  から  $t = b$  の間に動いた距離です。初めの時間  $a$  を 0 に固定し,  $b$  の代わりに変数  $t$  を使って

$$s = \int_0^t |\dot{p}(t)| dt \quad (1.7)$$

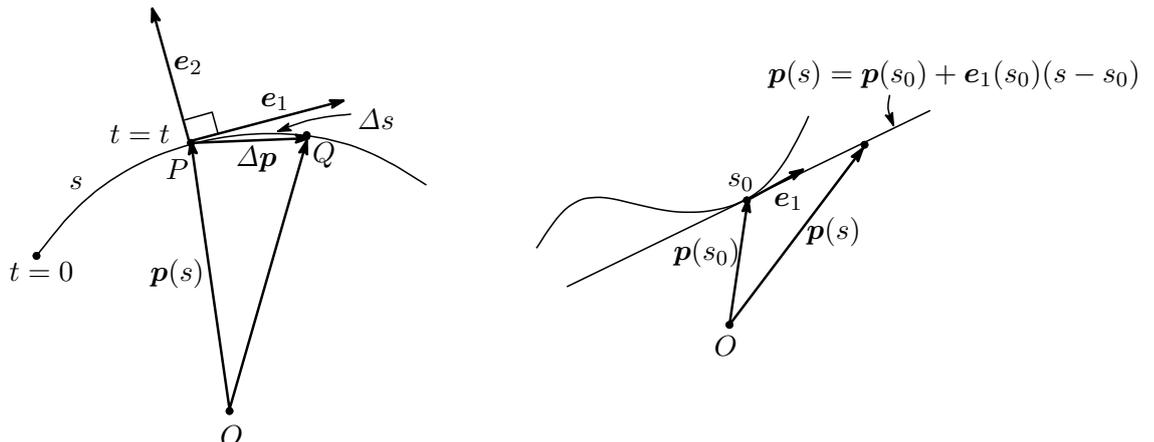
て書くと  $s$  は  $t$  の関数  $s = s(t)$  となります。これから逆に  $t$  を  $s$  の関数として表して  $t = t(s)$  とし,  $p(t)$  のパラメータ  $t$  を  $s$  に置き換えると, 曲線 (1.3) は

$$p = p(s) = (x(s), y(s)) \quad (1.8)$$

と表すことができます。(1.8) を  $s$  で微分すると

$$\frac{dp}{ds} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta p}{\Delta s} = e_1, \quad |e_1| = 1 \quad e_1 = (x'(s), y'(s)) \quad (1.9)$$

ここで  $e_1$  は点  $P$  において曲線に接し,  $s$  の増加する方向に向かう, 大きさが 1 の単位接線ベクトル (略して接線ベクトルという) となります。



$s_0$  での接線ベクトルを  $e_1(s_0)$  とすると、その点での接線の式は

$$p(s) = p(s_0) + e_1(s_0)(s - s_0) \quad (1.10)$$

あるいは成分表示で書けば

$$\begin{cases} x = x(s_0) + x'(s_0)(s - s_0) \\ y = y(s_0) + y'(s_0)(s - s_0) \end{cases} \quad (1.11)$$

と表されます。

接線ベクトル  $e_1$  と直交するベクトルは2つありますが、 $e_1$  を反時計方向に  $\pi/2$  だけ回転して得られるベクトルを  $e_2$  とし、これを単位法線ベクトルと呼びます。 $e_1, e_2$  の内積は

$$e_1 \cdot e_1 = 1, \quad e_2 \cdot e_2 = 1, \quad e_1 \cdot e_2 = 0 \quad (1.12)$$

$e_1, e_2$  とも  $s$  の関数であることに留意し、 $e_1 \cdot e_1 = 1$  を  $s$  で微分すると

$$\frac{d}{ds}(e_1 \cdot e_1) = (e_1 \cdot e_1)' = e_1' \cdot e_1 + e_1 \cdot e_1' = 0 \longrightarrow 2e_1' \cdot e_1 = 0$$

となり、 $e_1'$  は  $e_1$  と直交するベクトルであることが分かります。 $e_1'$  は  $e_2$  の何倍かであり、その倍数を  $\kappa(s)$  とすると<sup>3</sup>

$$e_1'(s) = \kappa(s)e_2 \quad (1.13)$$

と表すことができます。 $e_2$  について同様のことが成り立ち、 $e_2'$  は  $e_2$  と直交し、 $e_1$  の何倍かになります。次に、 $e_1 \cdot e_2 = 0$  を  $s$  で微分してみましょう。その結果

$$(e_1 \cdot e_2)' = e_1' \cdot e_2 + e_1 \cdot e_2' = \kappa + e_1 \cdot e_2' = 0 \longrightarrow e_2' = -\kappa e_1 \quad (1.14)$$

となって、 $e_2'$  は  $e_1$  の  $-\kappa$  倍となることが分かります。以上のことを整理すると次の行列で表すことができます<sup>4</sup>。

$$\begin{pmatrix} e_1' \\ e_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa \\ -\kappa & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} \quad (1.15)$$

この  $\kappa$  を曲線  $p(s)$  の曲率といい、正負いずれかの値をとります。 $e_1(s), e_2(s)$  は曲線  $p(s)$  上の各点で1組ずつ決まっており、 $p(s)$  を原点として  $e_1, e_2$  を基底ベクトルとする座標系を考えてこれを標構(frame)と呼んでいます。また、この座標系は曲線に沿って一緒に動くので動標構とも呼ばれます。尚、曲率の詳しい話は次のセクションでやります。

#### 曲率と曲率半径、曲率中心

曲率とは曲線上の各点においてその曲線のまがり具合を表す値で、曲率が大きな点では曲線は急に曲がり、小さな点では緩やかに曲がることとなります。したがって、直線の場合は曲率はゼロになります。また、曲がり具合を相当する円の半径の値で表したものを曲率半径、その円の中心を曲率中心と呼んでいます。

いま、曲線上の長さ  $s$  にある点を  $P$ 、そこから  $s + \Delta s$  わずかに進んだ曲線上の点を  $Q$  とすると、曲率は  $\Delta s$  進んでどれだけ曲線が曲がるかということですから、点  $P$  における接線ベクトルを  $e_1^P$ 、点  $Q$  における接線ベクトルを  $e_1^Q$  とし、2つの接線ベクトルのなす角を  $\Delta\theta$  とすると、点  $P$  における曲率は

$$\lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta s} = \frac{d\theta}{ds} \quad (1.16)$$

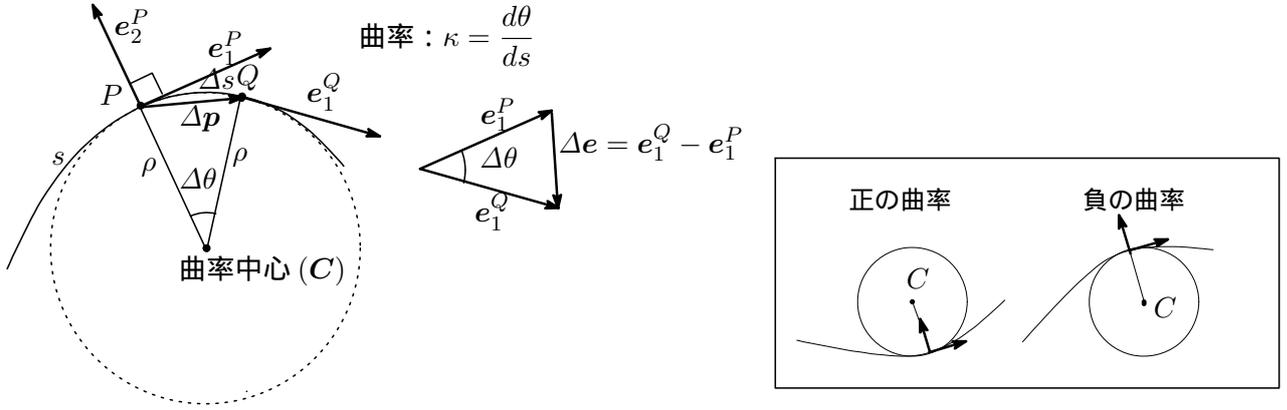
<sup>3</sup> 単位長さ  $s$  に対する接線ベクトル  $e_1$  の変化率  $e_1'(s)$  はその点での曲線の曲がり具合を表すと考えられます。

<sup>4</sup> フレネ-セレ (Frenet-Serret) の公式という。

と定義することができます。  $\Delta e = e_1^Q - e_1^P$  とおくと,  $\Delta\theta \equiv |\Delta e|$  となるので, (1.16) から

$$\lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta s} = \frac{d\theta}{ds} = \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta e}{\Delta s} \right| = \left| \frac{de_1^P}{ds} \right| = \kappa |e_2^P| = \kappa \quad (1.17)$$

が得られます。この  $\kappa$  を曲率と呼んでいます。



(1.9) と (1.16) より

$$\frac{d^2 \mathbf{p}}{ds^2} = \kappa \mathbf{e}_2 \quad (1.18)$$

曲率半径を  $\rho$  とすると  $|\Delta \mathbf{p}| \equiv \rho \Delta\theta$  とおけるので, (1.9) と (1.17) より

$$\left| \frac{d\mathbf{p}}{ds} \right| = \rho \frac{d\theta}{ds} = \rho \kappa = |e_1| = 1 \rightarrow \rho = \frac{1}{\kappa} \quad (1.19)$$

となって, 曲率半径は曲率の逆数で与えられます<sup>5</sup>。また, 曲線  $p(s)$  上の点  $p(s)$  における曲率円の中心, すなわち曲率中心を  $C(s)$  とすると

$$\mathbf{C}(s) = \mathbf{p}(s) + \rho \mathbf{e}_2(s) \quad (1.20)$$

で与えられます。

$e_1(s)$  が  $x$  軸となす角を  $\theta$  とすると (1.11), (1.13) と (1.12) より

$$\begin{aligned} e_1(s) &= (x_1'(s), y_1'(s)) = (\cos \theta, \sin \theta) \rightarrow \tan \theta = \frac{y_1'(s)}{x_1'(s)} \rightarrow \theta = \tan^{-1} \frac{y_1'(s)}{x_1'(s)} \\ e_2(s) &= (-\sin \theta, \cos \theta) = (-y_1'(s), x_1'(s)) \\ e_1'(s) &= \kappa e_2(s) \end{aligned} \quad (1.21)$$

$$e_1'(s) = \frac{de_1}{ds} = \frac{de_1}{d\theta} \frac{d\theta}{ds}$$

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{d}{ds} \left( \tan^{-1} \frac{y_1'(s)}{x_1'(s)} \right) = \frac{d}{dq} (\tan^{-1} q) \frac{dq}{ds} \quad (\text{但し } q = \frac{y_1'(s)}{x_1'(s)})$$

$$= \frac{x_1'^2 \frac{x_1' y_1'' - x_1'' y_1'}{x_1'^2}}{x_1'^2 + y_1'^2} = \frac{x_1' y_1'' - x_1'' y_1'}{x_1'^2 + y_1'^2} = x_1' y_1'' - x_1'' y_1' \quad (\because x_1'^2 + y_1'^2 = e_1^2 = 1)$$

$$\therefore \kappa(s) = x_1'(s) y_1''(s) - x_1''(s) y_1'(s), \quad \rho = \frac{1}{\kappa} = \frac{1}{x_1'(s) y_1''(s) - x_1''(s) y_1'(s)} \quad (1.22)$$

<sup>5</sup> 曲率半径も正負の値をとることに注意!

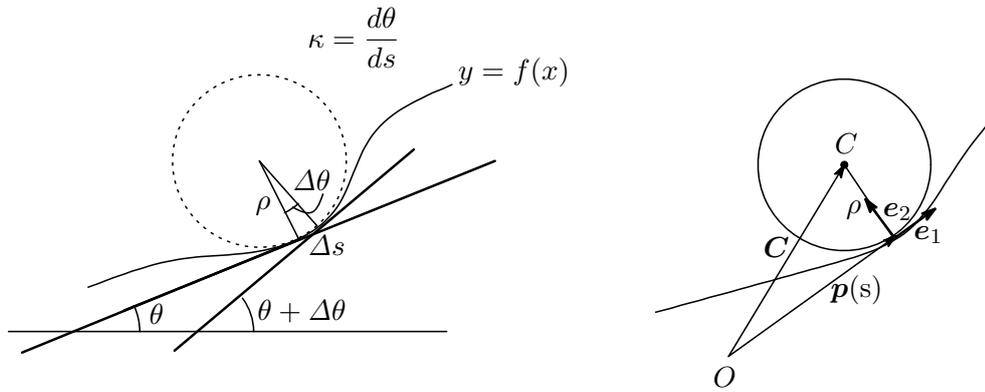


図 1: 曲率中心

曲率中心の座標を  $C(c_1, c_2)$  とすると, 曲率中心  $C(s)$  の軌跡を表す曲線の式は (1.20) より

$$C(s) = p(s) + \rho e_2(s) \quad (1.23)$$

でした。曲率中心  $C(s)$  の軌跡を表す曲線を縮閉線と呼んでいます。(1.23) を  $s$  で微分して縮閉線  $C(s)$  の接線ベクトルを求めると, (1.9) と (1.14) より

$$C'(s) = p'(s) + \rho'(s)e_2(s) + \rho(s)e_2'(s) = \rho'(s)e_2(s) \quad (1.24)$$

これから縮閉線の接線ベクトルはもとの曲線<sup>6</sup>の法線ベクトルと同じ方向であることが分かります。言い換えると, もとの曲線の法線は曲率中心 (点) においてその縮閉線に接するということになります。

さて, (1.23) を成分で表すと (1.22) を使って

$$\begin{cases} c_1(s) = x_1(s) - \frac{y_1'(s)}{x_1'(s)y_1''(s) - x_1''(s)y_1'(s)} \\ c_2(s) = y_1(s) + \frac{x_1'(s)}{x_1'(s)y_1''(s) - x_1''(s)y_1'(s)} \end{cases} \quad (1.25)$$

ここで曲線の式としてお馴染みの  $y = f(x)$  上の点  $(x, y)$  における曲率と曲率中心を求めておきましょう。(1.17) より

$$\kappa = \frac{d\theta}{ds} \quad (1.26)$$

また,  $\frac{dy}{dx} = y' = \tan \theta$  より  $\theta = \tan^{-1} y'$ 。

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx\sqrt{1 + y'^2} \rightarrow \frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + y'^2} \\ \frac{d\theta}{ds} &= \frac{d\theta}{dx} \frac{dx}{ds} = \frac{d\theta}{dy'} \frac{dy'}{dx} \frac{dx}{ds} = \frac{y''}{1 + y'^2} \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}} = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}} \\ \therefore \kappa &= \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}} \rightarrow \rho = \frac{1}{\kappa} = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''} \end{aligned} \quad (1.27)$$

接線ベクトル  $e_1$ , 法線ベクトル  $e_2$  は

$$e_1 = \left( \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}}, \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right), \quad e_2 = \left( -\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}, \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}} \right) \quad (1.28)$$

曲率中心は (1.23) と (1.27) より

$$C(c_1, c_2) \quad \dots \quad \begin{cases} c_1 = x - \rho \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = x - \frac{y'(1 + y'^2)}{y''} \\ c_2 = y + \rho \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}} = y + \frac{1 + y'^2}{y''} \end{cases} \quad (1.29)$$

<sup>6</sup> 縮閉線に対して伸開線という。

と求められます。

・例 1. 円  $x(t) = r \cos(t)$ ,  $y(t) = r \sin(t)$

(1.7) より

$$s = \int_0^t \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} dt = rt \longrightarrow t = s/r \quad (1.30)$$

元の式に入れて

$$\begin{cases} x(s) = r \cos \frac{s}{r} \\ y(s) = r \sin \frac{s}{r} \end{cases} \longrightarrow \mathbf{p}(s) = \left( r \cos \frac{s}{r}, r \sin \frac{s}{r} \right) \quad (1.31)$$

が得られます。(1.9) より

$$\frac{d\mathbf{p}}{ds} = \mathbf{e}_1(s) = \left( -\sin \frac{s}{r}, \cos \frac{s}{r} \right) \quad (1.32)$$

$\mathbf{e}_2(s)$  は  $\mathbf{e}_1(s)$  を  $90^\circ$  反時計方向に回転したものであるから

$$\mathbf{e}_2(s) = \left( -\sin \left( \frac{s}{r} + \frac{\pi}{2} \right), \cos \left( \frac{s}{r} + \frac{\pi}{2} \right) \right) = \left( -\cos \frac{s}{r}, -\sin \frac{s}{r} \right) \quad (1.33)$$

(1.13) より

$$\frac{d\mathbf{e}_1}{ds} = \frac{1}{r} \left( -\cos \frac{s}{r}, -\sin \frac{s}{r} \right) = \kappa \mathbf{e}_2(s) \longrightarrow \kappa = \frac{1}{r} \quad (1.34)$$

曲率  $\kappa$  は円周上のあらゆる点で一定, 曲率半径は  $\rho = 1/\kappa = r$  と当たり前の結果を得ます。曲率中心は (1.25) より  $(0, 0)$ 。

・例 2. 放物線  $y = ax^2$  ( $a \neq 0$ )

(1.28) より接線ベクトル, 法線ベクトルは

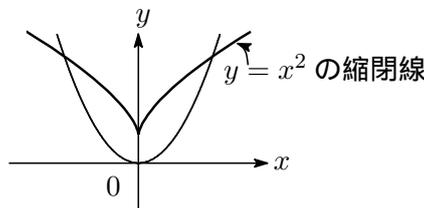
$$\begin{cases} \mathbf{e}_1 = \left( \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}, \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} \right) = \left( \frac{1}{\sqrt{1+4a^2x^2}}, \frac{2ax}{\sqrt{1+4a^2x^2}} \right) \\ \mathbf{e}_2 = \left( -\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} \right) = \left( -\frac{2ax}{\sqrt{1+4a^2x^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+4a^2x^2}} \right) \end{cases} \quad (1.35)$$

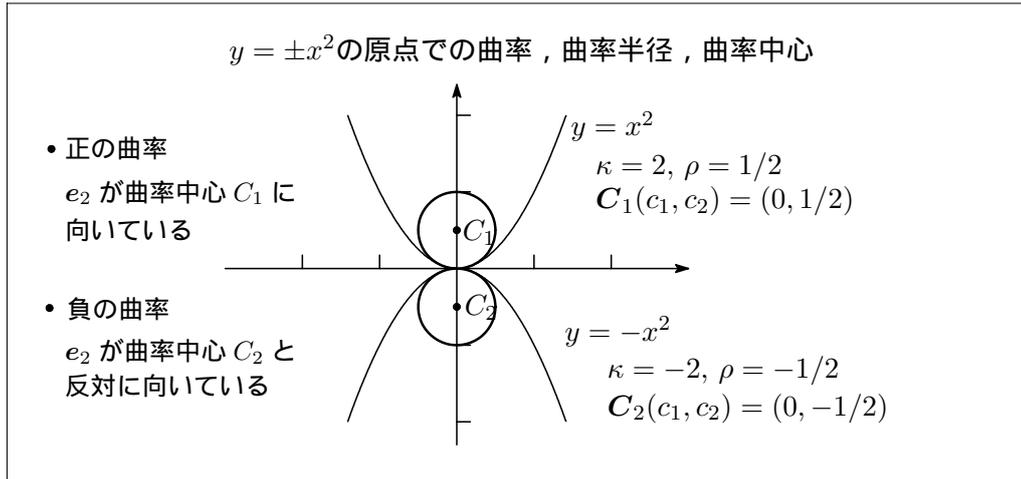
(1.27) より曲率, 曲率半径は

$$\begin{cases} \kappa = \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} = \frac{2a}{(1+4a^2x^2)^{3/2}} \\ \rho = \frac{1}{\kappa} = \frac{(1+4a^2x^2)^{3/2}}{2a} \end{cases} \quad (1.36)$$

(1.29) より曲率中心は

$$\begin{cases} c_1 = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''} = \frac{2a}{(1+4a^2x^2)^{3/2}} = -4a^2x^3 \\ c_2 = y + \frac{1+y'^2}{y''} = \frac{(1+4a^2x^2)^{3/2}}{2a} = \frac{1}{2a} + 3ax^2 \end{cases} \quad (1.37)$$





• 例 2'. 放物線  $x(t) = t, y(t) = at^2$  ( $a \neq 0$ )

$$s = \int_0^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt \rightarrow \frac{ds}{dt} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{1 + 4a^2t^2} \quad (1.38)$$

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(t, at^2) = (1, 2at)$$

接線ベクトル  $e_1$  は (1.9) より

$$e_1 = \frac{d\mathbf{p}}{ds} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \frac{dt}{ds} = \left( \frac{1}{\sqrt{1 + 4a^2t^2}}, \frac{2at}{\sqrt{1 + 4a^2t^2}} \right) \quad (1.39)$$

これと直交する法線ベクトル  $e_2$  は  $e_1 \cdot e_2 = 0, e_2^2 = 1$  より

$$e_2 = \left( -\frac{2at}{\sqrt{1 + 4a^2t^2}}, \frac{1}{\sqrt{1 + 4a^2t^2}} \right) \quad (1.40)$$

曲率  $\kappa$  と曲率半径  $\rho$  は (1.13) より

$$\begin{aligned} \frac{de_1}{ds} &= \frac{de_1}{dt} \frac{dt}{ds} = \left( -\frac{4a^2t}{(1 + 4a^2t^2)^{3/2}}, -\frac{8a^3t^2}{(1 + 4a^2t^2)^{3/2}} + \frac{2a}{\sqrt{1 + 4a^2t^2}} \right) \frac{1}{\sqrt{1 + 4a^2t^2}} \\ &= \frac{2a}{(1 + 4a^2t^2)^{3/2}} \left( -\frac{2at}{\sqrt{1 + 4a^2t^2}}, \frac{1}{\sqrt{1 + 4a^2t^2}} \right) \\ &= \kappa e_2 \end{aligned} \quad (1.41)$$

$$\therefore \kappa = \frac{2a}{(1 + 4a^2t^2)^{3/2}}, \quad \rho = \frac{1}{\kappa} = \frac{(1 + 4a^2t^2)^{3/2}}{2a}$$

• 例 3. 楕円  $x = a \cos t, y = b \sin t$  ( $a > b > 0$ )

$$s = \int_0^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt \rightarrow \frac{ds}{dt} = \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} \quad (1.42)$$

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(a \cos t, b \sin t) = (-a \sin t, b \cos t)$$

接線ベクトル  $e_1$  は (1.9) より

$$e_1 = \frac{d\mathbf{p}}{ds} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \frac{dt}{ds} = \left( \frac{-a \sin t}{\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}}, \frac{b \cos t}{\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}} \right) \quad (1.43)$$

法線ベクトル  $e_2$  は  $e_1 \cdot e_2 = 0$ ,  $e_2^2 = 1$  より

$$e_2 = \left( -\frac{b \cos t}{\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}}, -\frac{a \sin t}{\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}} \right) \quad (1.44)$$

(1.13) より曲率  $\kappa$  と曲率半径  $\rho$  は

$$\begin{aligned} \frac{de_1}{ds} &= \frac{de_1}{dt} \frac{dt}{ds} = \left( \frac{-ab^2 \cos t}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{3/2}}, \frac{-ab^2 \sin t}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{3/2}} \right) \frac{1}{\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}} \\ &= \frac{ab}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{3/2}} e_2 \\ &= \kappa e_2 \\ \therefore \kappa &= \frac{ab}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{3/2}}, \quad \rho = \frac{1}{\kappa} = \frac{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{3/2}}{ab} \end{aligned} \quad (1.45)$$

楕円の縮閉線を求めてみましょう。

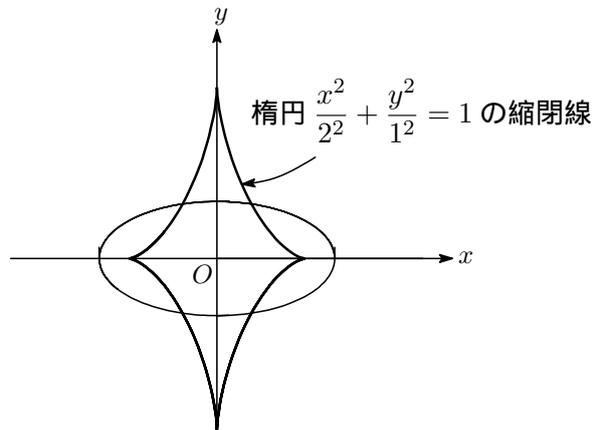
$$\begin{aligned} C &= p + \rho e_2 \\ &= (a \cos t, b \sin t) - \frac{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{3/2}}{ab} \left( \frac{b \cos t}{\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}}, \frac{a \sin t}{\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}} \right) \\ &= \left( \frac{a^2 - b^2}{a} \cos^3 t, \frac{b^2 - a^2}{b} \sin^3 t \right) \end{aligned}$$

したがって、求める縮閉線の式は  $t$  をパラメータとして

$$\therefore \begin{cases} c_1(t) = \frac{a^2 - b^2}{a} \cos^3 t \\ c_2(t) = \frac{b^2 - a^2}{b} \sin^3 t \end{cases} \quad (1.46)$$

となります。これからパラメータ  $t$  を消去すると

$$(ac_1)^{2/3} + (bc_2)^{2/3} = (a^2 - b^2)^{2/3} \quad (1.47)$$



・例 4. 曲線  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}, \quad y'' = \frac{d}{dx} \left( \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \right) \frac{dt}{dx} = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^3}$$

(1.27) より

$$\kappa = \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}y'}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} \quad (1.48)$$

なお, (1.48) は

$$\kappa = \frac{1}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} \begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} \\ \ddot{x} & \ddot{y} \end{vmatrix} = \frac{1}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} \begin{vmatrix} \dot{\mathbf{p}}(t) & \ddot{\mathbf{p}}(t) \end{vmatrix} \quad (1.49)$$

と行列式を使って書かれることもあります。

・例 5. 極座標における曲線  $r = f(\theta)$

$\theta = t$  とみなして (1.48) を使えばよい。

$$x(\theta) = r(\theta) \cos \theta, \quad y(\theta) = r(\theta) \sin \theta \longrightarrow x(t) = r(t) \cos t, \quad y(t) = r(t) \sin t$$

$$\dot{x} = \dot{r} \cos t - r \sin t, \quad \ddot{x} = \ddot{r} \cos t - 2\dot{r} \sin t - r \cos t$$

$$\dot{y} = \dot{r} \sin t + r \cos t, \quad \ddot{y} = \ddot{r} \sin t + 2\dot{r} \cos t - r \sin t$$

(1.48) に代入して

$$\kappa = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}y'}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} = \frac{r^2 + 2\dot{r}^2 - r\ddot{r}}{(r^2 + \dot{r}^2)^{3/2}} = \frac{r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - r\frac{d^2r}{d\theta^2}}{\left\{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right\}^{3/2}} \quad (1.50)$$

## 1.2 空間曲線

### 1.2.1 空間曲線の式

空間曲線の場合は, 2次元平面曲線の議論を延長していけばいいわけですが, 2次元にはなかった特長も当然でてきます。空間曲線はパラメータ  $t$  を使って平面曲線と同様に

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}(t), \quad \mathbf{p}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \quad (1.51)$$

と表せます。また,  $a \leq t \leq b$  での空間曲線の長さ (弧長)  $s$  は (1.6) を拡張して

$$s = \int_a^b \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2} dt = \int_a^b |\dot{\mathbf{p}}(t)| dt \longrightarrow s = \int_0^t |\dot{\mathbf{p}}(t)| dt \quad (1.52)$$

パラメータ  $t$  の代わりに弧長  $s$  を使って曲線を  $\mathbf{p} = \mathbf{p}(s)$  と表すと, (1.9) と同様に接線ベクトル  $\mathbf{e}_1$  が求められます。

$$\frac{d\mathbf{p}}{ds} = \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}_1(s) \cdot \mathbf{e}_1(s) = |\mathbf{e}_1| = x'(s)^2 + y'(s)^2 + z'(s)^2 = 1 \quad (1.53)$$

また,

$$(\mathbf{e}_1(s) \cdot \mathbf{e}_1(s))' = \mathbf{e}_1'(s) \cdot \mathbf{e}_1(s) + \mathbf{e}_1(s) \cdot \mathbf{e}_1'(s) = 2\mathbf{e}_1'(s) \cdot \mathbf{e}_1(s) = 0 \quad (1.54)$$

なので,  $\mathbf{e}_1'(s)$  は  $\mathbf{e}_1(s)$  に直交しています。平面曲線の場合,  $\mathbf{e}_1$  に直交するベクトルは2つしかなく,  $\mathbf{e}_1$  を反時計回りに  $\pi/2$  回転したベクトルを法線ベクトル  $\mathbf{e}_2$  と定義しましたが, 空間曲線の場合には  $\mathbf{e}_1$  に直交するベクトルは無数に存在し, また空間内では反時計回りといっても裏から見れば時計回りとなるわけなので意味がありません。ということで, 平面曲線のように  $\mathbf{e}_1(s)$

から  $e_2(s)$  をすぐに決定するわけにはいきません。そこで  $e_1(s)$  と直交する  $e'_1(s)$  を使って  $e_2(s)$  を決めることにします。  $e'_1(s)$  の“長さ”を  $\kappa(s)$  としましょう。すなわち

$$\kappa(s) = |e'_1(s)| = \sqrt{e'_1(s) \cdot e'_1(s)} = \sqrt{x''(s)^2 + y''(s)^2 + z''(s)^2} \quad (1.55)$$

$\kappa(s)$  は平面曲線の場合と異なり  $\kappa(s) \geq 0$  と正の値となります。そこで法線ベクトル  $e_2(s)$  を  $e'_1(s) = \kappa(s)e_2(s)$  という関係より次式で定義します。

$$e_2(s) = \frac{1}{\kappa(s)} e'_1(s), \quad (\text{但し } \kappa(s) \neq 0) \quad (1.56)$$

尚,  $\kappa(s) = 0$  の場合は  $e_2(s)$  を一意的に決めることはできません。

以下,  $\kappa(s) > 0$  として話を進めます。接線ベクトル  $e_1$ , 法線ベクトル  $e_2$  と直交するもう一つ単位ベクトル  $e_3$  を

$$e_3 = e_1 \times e_2, \quad |e_3| = 1 \quad (1.57)$$

で定義し<sup>7</sup>, これを従法線ベクトルと呼びます。  $e_3$  の成分は (1.57) より

$$e_3(s) = \frac{1}{\kappa} (y'z'' - z'y'', z'x'' - x'z'', x'y'' - y'x'') \quad (1.58)$$

こうして選ばれた  $e_1, e_2, e_3$  をフルネ標構(Frenet Frame)と呼びます。各単位ベクトルは互いに直交するので

$$e_i \cdot e_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (1.59)$$

フルネ・セレーの公式

すでに平面曲線のところででてきましたが<sup>8</sup>, ここで改めてとりあげておきます。(1.59) を  $s$  で微分すると

$$e'_i \cdot e_j + e_i \cdot e'_j = 0 \quad (1.60)$$

これから

$$e'_1 \cdot e_2 + e_1 \cdot e'_2 = \kappa + e_1 \cdot e'_2 = 0 \quad (1.61)$$

また,  $i = 2, j = 2$  として

$$e_2 \cdot e'_2 = 0 \quad (1.62)$$

$e'_2$  は  $e_2$  に直交するベクトルなので  $e'_2$  は  $e_1$  と  $e_3$  の一次結合  $e'_2 = \alpha e_1 + \beta e_3$  と表せます。(1.61) より  $\alpha = -\kappa$  となるので

$$e'_2 = -\kappa e_1 + \beta e_3 \quad (1.63)$$

次に  $i = 1, j = 3$  とすると

$$e'_1 \cdot e_3 + e_1 \cdot e'_3 = e_1 \cdot e'_3 = 0 \quad (1.64)$$

$i = 2, j = 3$  とすると

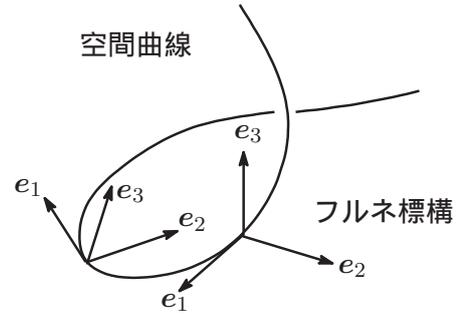
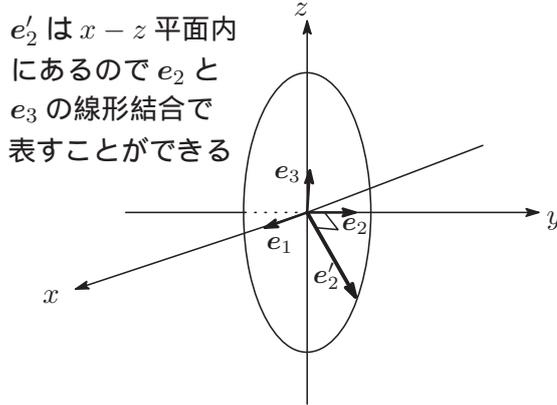
$$\begin{aligned} e'_2 \cdot e_3 + e_2 \cdot e'_3 &= (-\kappa e_1 + \beta e_3) \cdot e_3 + e_2 \cdot e'_3 = \beta + e_2 \cdot e'_3 = 0 \\ \therefore e'_3 &= -\beta e_2 \end{aligned} \quad (1.65)$$

$i = j = 3$  とすると

$$2e'_3 \cdot e_3 = 0 \quad (1.66)$$

<sup>7</sup> これらの単位ベクトルは右手系をなす。

<sup>8</sup> (1.15)



以上をまとめると,  $\beta$  を  $\tau$  に書き換えて

$$\begin{cases} e'_1 = \kappa e_2 \\ e'_2 = -\kappa e_1 + \tau e_3 \\ e'_3 = -\tau e_2 \end{cases} \quad (1.67)$$

行列で表すと

$$\frac{d}{ds} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e'_1 \\ e'_2 \\ e'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} \quad (1.68)$$

となります。(1.68) を空間曲線のフルネ・セレーの公式<sup>れいりつ</sup>といい,  $\tau$  を捩率,  $\rho_2 = 1/\tau$  を捩率半径といいます。フルネ・セレーの公式は1階の(連立)常微分方程式で, 曲率  $\kappa(s)$  と捩率  $\tau(s)$  と初期条件を与えれば解  $e_1(s), e_2(s), e_3(s)$  が一意に決まる, つまり, 曲率  $\kappa(s)$  と捩率  $\tau(s)$  と初期条件さえ与えれば, 微分方程式を解いて曲線  $p(s)$  を求めることができる曲線の基礎方程式であることを意味しています。そこで具体的に  $\kappa, \tau$  を一定とした場合のフルネ・セレーの微分方程式を解いて見ましょう。(1.67) より

$$e''_1(s) = -(\kappa^2 + \tau^2)e_1 + \kappa\tau C \quad (C: \text{定数ベクトル})$$

2階線形微分方程式の解<sup>9</sup>は

$$\begin{aligned} e_1(s) &= C_1 e^{is\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} + C_2 e^{-is\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} + C \frac{\kappa\tau}{\kappa^2 + \tau^2} \\ &= A \cos \sqrt{\kappa^2 + \tau^2} s - B \sin \sqrt{\kappa^2 + \tau^2} s + C \frac{\kappa\tau}{\kappa^2 + \tau^2} \\ \therefore p(s) &= \int e_1(s) ds \\ &= \frac{A}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} \sin \sqrt{\kappa^2 + \tau^2} s + \frac{B}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} \cos \sqrt{\kappa^2 + \tau^2} s + C \frac{\kappa\tau}{\kappa^2 + \tau^2} + D \end{aligned}$$

定数ベクトル  $A, B, C, D$  は  $|e_i| = 1$  の正規直交ベクトルとなるように決めます。これで曲線  $p(s)$  が求められました。

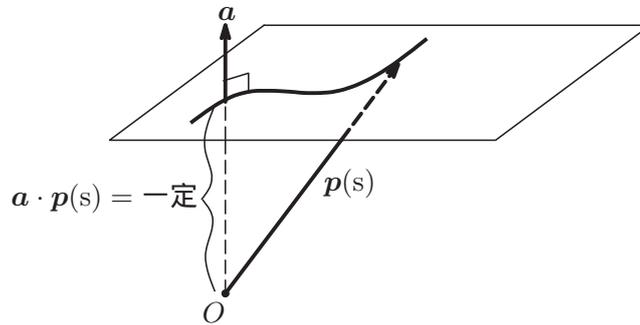
さて,  $|\tau|$  は(1.65)より  $e'_3$  の大きさに等しいことが分かります。捩率の意味を調べるために平面曲線の場合と比較してみましょう。

$$\text{平面曲線} \begin{cases} e'_1 = \kappa e_2 \\ e'_2 = -\kappa e_1 \end{cases} \longleftrightarrow \text{空間曲線} \begin{cases} e'_1 = \kappa e_2 \\ e'_2 = -\kappa e_1 + \tau e_3 \\ e'_3 = -\tau e_2 \end{cases} \quad (1.69)$$

<sup>9</sup> 対話・非線形振動その1を参照。

平面曲線の場合，図 1 から分かるように曲率半径  $\rho$  の円は  $e_1$  と  $e_2$  で張られる平面上にありましたが，空間曲線の場合は  $e_3$  が混ざることによってこの平面が少し<sup>ね</sup>捻じられることになります。つまり， $\tau$  は  $e_1$  と  $e_2$  で張られる平面が空間曲線上を単位長さだけ進んだときにどのくらい捻じられるかを表わす量ということになります。

いま，曲線  $p(s)$  がある平面の上に乗っているとしましょう。平面に垂直なベクトルを  $a$  とす



ると，曲線  $p(s)$  は次式を満たします。

$$a \cdot p(s) = c \quad (\text{一定}) \quad (1.70)$$

これを  $s$  で微分すると

$$a \cdot p'(s) = a \cdot e_1 = 0 \quad (1.71)$$

もう一度  $s$  で微分すると

$$a \cdot e_1' = a \cdot \kappa e_2 = 0 \quad (1.72)$$

$\kappa \neq 0$  としているので  $a \cdot e_2 = 0$  で， $a$  は  $e_1, e_2$  に直角。 $a \cdot e_2 = 0$  を  $s$  で微分すると

$$a \cdot e_2' = a \cdot (-\kappa e_1 + \tau e_3) = 0 \longrightarrow a \cdot \tau e_3 = 0 \quad (1.73)$$

$a$  は  $e_1, e_2$  に直角なので  $e_3$  に対して直角でありえません。したがって，空間曲線がある平面上にある場合には  $\tau = 0$  となります。逆に曲線  $p(s)$  の  $\tau$  が 0 とすると (1.69) より  $e_3' = 0$  となって  $e_3$  は  $s$  によらない一定のベクトルとなります。 $e_3$  と  $p(s)$  の内積をとりそれを  $s$  で微分すると

$$\begin{aligned} (e_3 \cdot p(s))' &= e_3 \cdot p'(s) = e_3 \cdot e_1(s) = 0 \\ \therefore e_3 \cdot p(s) &= c \quad (\text{一定}) \end{aligned} \quad (1.74)$$

つまり，曲線  $p(s)$  は平面  $e_3 \cdot p(s) = c$  上に載っていることとなります<sup>10</sup>。

・例 6. 常螺旋 (helix) の  $\tau$  を求めます。常螺旋は

$$p(t) = (a \cos t, a \sin t, bt) \quad (a, b > 0) \quad (1.75)$$

で与えられます。(1.7) より

$$\begin{aligned} s &= \int_0^t |\dot{p}(t)| dt = \int_0^t \sqrt{a^2 + b^2} dt = \sqrt{a^2 + b^2} t, \quad \therefore t = \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{s}{c} \quad (c = \sqrt{a^2 + b^2}) \\ \therefore p(s) &= \left( a \cos \frac{s}{c}, a \sin \frac{s}{c}, \frac{b}{c} s \right) \end{aligned} \quad (1.76)$$

<sup>10</sup> 平面上にない空間曲線は“曲がり”且つ“捻じれ”ている。遊園地のジェットコースターに乗るとそのあたりのことが体感できますね。

$s$  で微分して

$$\begin{aligned}
 \mathbf{p}'(s) &= \left( -\frac{a}{c} \sin \frac{s}{c}, \frac{a}{c} \cos \frac{s}{c}, \frac{b}{c} \right) = \mathbf{e}_1(s) \\
 \mathbf{e}'_1(s) &= \left( -\frac{a}{c^2} \cos \frac{s}{c}, -\frac{a}{c^2} \sin \frac{s}{c}, 0 \right) = \kappa \mathbf{e}_2(s), \quad \kappa = \sqrt{\mathbf{e}'_1 \cdot \mathbf{e}'_1} = \frac{a}{c^2} \\
 \mathbf{e}_2(s) &= \left( -\cos \frac{s}{c}, -\sin \frac{s}{c}, 0 \right) \\
 \mathbf{e}_3(s) &= \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \left( \frac{b}{c} \sin \frac{s}{c}, -\frac{b}{c} \cos \frac{s}{c}, \frac{a}{c} \right) \\
 \mathbf{e}'_2(s) &= \left( \frac{1}{c} \sin \frac{s}{c}, -\frac{1}{c} \cos \frac{s}{c}, 0 \right) = -\frac{a}{c^2} \mathbf{e}_1 + \frac{b}{c^2} \mathbf{e}_3 = -\kappa \mathbf{e}_1 + \tau \mathbf{e}_3
 \end{aligned} \tag{1.77}$$

これから

$$\kappa = \frac{a}{a^2 + b^2}, \quad \tau = \frac{b}{a^2 + b^2} \tag{1.78}$$

と求まり，常螺旋の場合は，曲率  $\kappa$  も捩率  $\tau$  も共に定数となります<sup>11</sup>。



### 1.2.2 曲率，捩率の一般的公式

空間曲線が  $\mathbf{p} = \mathbf{p}(t)$  で与えられた場合，曲率  $\kappa$  と捩率  $\tau$  を与える一般的な公式は

$$\kappa = \frac{|\dot{\mathbf{p}} \times \ddot{\mathbf{p}}|}{|\dot{\mathbf{p}}|^3} \tag{1.79}$$

$$\tau = \frac{\begin{vmatrix} \dot{\mathbf{p}} & \ddot{\mathbf{p}} & \dddot{\mathbf{p}} \end{vmatrix}}{|\dot{\mathbf{p}} \times \ddot{\mathbf{p}}|^2} \tag{1.80}$$

と表されます。ただし， $\begin{vmatrix} \dot{\mathbf{p}} & \ddot{\mathbf{p}} & \dddot{\mathbf{p}} \end{vmatrix}$  は3つのベクトル  $\dot{\mathbf{p}}, \ddot{\mathbf{p}}, \dddot{\mathbf{p}}$  の成分を並べてできる次の3次の行列式を表すものとします。

$$\begin{vmatrix} \dot{\mathbf{p}} & \ddot{\mathbf{p}} & \dddot{\mathbf{p}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dot{x}(t) & \dot{y}(t) & \dot{z}(t) \\ \ddot{x}(t) & \ddot{y}(t) & \ddot{z}(t) \\ \dddot{x}(t) & \dddot{y}(t) & \dddot{z}(t) \end{vmatrix} \tag{1.81}$$

証明は (1.68) のフルネ・セレーの公式を使います。

<sup>11</sup> 下記写真はココより拝借 <http://www.enpitu.ne.jp/usr5/57444/diary.html>

(1.79) の証明

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{p}} &= \frac{d\mathbf{p}}{ds} \frac{ds}{dt} = \mathbf{p}' \frac{ds}{dt}, \quad |\dot{\mathbf{p}}| = |\mathbf{e}_1| \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dt} \\
 \ddot{\mathbf{p}} &= \mathbf{p}'' \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 + \mathbf{p}' \frac{d^2s}{dt^2} \\
 \dot{\mathbf{p}} \times \ddot{\mathbf{p}} &= \mathbf{p}' \frac{ds}{dt} \times \left\{ \mathbf{p}'' \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 + \mathbf{p}' \frac{d^2s}{dt^2} \right\} = \left( \frac{ds}{dt} \right)^3 (\mathbf{p}' \times \mathbf{p}'') = |\dot{\mathbf{p}}|^3 (\mathbf{p}' \times \mathbf{p}'') \\
 \mathbf{p}' \times \mathbf{p}'' &= \mathbf{e}_1 \times \kappa \mathbf{e}_2 = \kappa \mathbf{e}_3, \quad |\mathbf{p}' \times \mathbf{p}''| = \kappa, \quad \therefore |\dot{\mathbf{p}} \times \ddot{\mathbf{p}}| = \kappa |\dot{\mathbf{p}}|^3 \\
 \therefore \kappa &= \frac{|\dot{\mathbf{p}} \times \ddot{\mathbf{p}}|}{|\dot{\mathbf{p}}|^3}
 \end{aligned}$$

(1.80) の証明

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{p}} &= \mathbf{p}' \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dt} \mathbf{e}_1, \quad \ddot{\mathbf{p}} = \frac{d^2s}{dt^2} \mathbf{e}_1 + \kappa \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 \mathbf{e}_2 \quad (\because \mathbf{e}' = \kappa \mathbf{e}_2) \\
 \ddot{\mathbf{p}} &= \left\{ \frac{d^3s}{dt^3} - \kappa^2 \left( \frac{ds}{dt} \right)^3 \right\} \mathbf{e}_1 + \left\{ \kappa' \left( \frac{ds}{dt} \right)^3 + 3\kappa \frac{ds}{dt} \frac{d^2s}{dt^2} \right\} \mathbf{e}_2 + \kappa \tau \left( \frac{ds}{dt} \right)^3 \mathbf{e}_3 \\
 &= \alpha \mathbf{e}_1 + \beta \mathbf{e}_2 + \kappa \tau \left( \frac{ds}{dt} \right)^3 \mathbf{e}_3 \quad (\because \mathbf{e}'_2 = -\kappa \mathbf{e}_1 + \tau \mathbf{e}_3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \left| \begin{array}{ccc} \dot{\mathbf{p}} & \ddot{\mathbf{p}} & \ddot{\mathbf{p}} \end{array} \right| &= \left| \begin{array}{ccc} \frac{ds}{dt} & 0 & 0 \\ \frac{d^2s}{dt^2} & \kappa \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 & 0 \\ \alpha & \beta & \kappa \tau \left( \frac{ds}{dt} \right)^3 \end{array} \right| = \kappa^2 \tau \left( \frac{ds}{dt} \right)^6 \\
 |\dot{\mathbf{p}} \times \ddot{\mathbf{p}}|^2 &= \kappa^2 |\dot{\mathbf{p}}|^6 = \kappa^2 \left( \frac{ds}{dt} \right)^6 \\
 \therefore \tau &= \frac{\left| \begin{array}{ccc} \dot{\mathbf{p}} & \ddot{\mathbf{p}} & \ddot{\mathbf{p}} \end{array} \right|}{|\dot{\mathbf{p}} \times \ddot{\mathbf{p}}|^2}
 \end{aligned}$$

ここではやりませんが, (1.80) の公式を使えば例題 6. 常螺旋の曲率や捩率はすぐに求めることができますのでぜひ試してみてください。ついでに, 曲線が  $\mathbf{p} = \mathbf{p}(s)$  で与えられた場合, その捩率は次式で与えられることを示しておきます。

$$\tau = \frac{1}{\kappa^2} \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{p}' & \mathbf{p}'' & \mathbf{p}''' \end{array} \right| \quad (1.82)$$

(1.82) の証明

フルネ・セレーの公式より

$$\begin{aligned}
 \mathbf{p}' &= \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{p}'' = \kappa \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{p}''' = (\kappa \mathbf{e}_2)' = \kappa' \mathbf{e}_2 + \kappa \mathbf{e}'_2 = -\kappa^2 \mathbf{e}_1 + \kappa' \mathbf{e}_2 + \kappa \tau \mathbf{e}_3 \\
 \therefore \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{p}' & \mathbf{p}'' & \mathbf{p}''' \end{array} \right| &= \left| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa^2 & \kappa' & \kappa \tau \end{array} \right| = \kappa^2 \tau \\
 \therefore \tau &= \frac{1}{\kappa^2} \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{p}' & \mathbf{p}'' & \mathbf{p}''' \end{array} \right|
 \end{aligned}$$

### 1.2.3 ブーケの公式

空間曲線  $p(s)$  を  $s = 0$  で Taylor 展開すると

$$p(s) = p(s_0) + sp'(0) + \frac{s^2}{2!}p''(0) + \frac{s^3}{3!}p'''(0) + \dots \quad (1.83)$$

が得られます。フルネ・セレーの公式より

$$p'(s) = e_1, \quad p''(s) = \kappa e_2, \quad p'''(s) = -\kappa^2 e_1 + \kappa' e_2 + \kappa \tau e_3 \quad (1.84)$$

これを (1.83) に代入し,  $s$  の 3 次の項までとると

$$p(s) = p(0) + \left(s - \frac{1}{6}\kappa^2 s^3 + \dots\right) e_1(0) + \left(\frac{1}{2}\kappa s^2 + \frac{1}{6}\kappa' s^3 + \dots\right) e_2(0) + \left(\frac{1}{6}\kappa \tau s^3 + \dots\right) e_3(0) + \dots$$

$$\rightarrow p(0) + x(s)e_1(0) + y(s)e_2(0) + z(s)e_3(0)$$

ただし,

$$x(s) = s - \frac{1}{6}\kappa^2 s^3, \quad y(s) = \frac{1}{2}\kappa s^2 + \frac{1}{6}\kappa' s^3, \quad z(s) = \frac{1}{6}\kappa \tau s^3 \quad (1.85)$$

これより曲線の局所的な形状は曲率  $\kappa$  と撓率  $\tau$  で表すことができます。これをブーケの公式といいます。

## 2 曲面

### 2.1 曲面のパラメータ表示

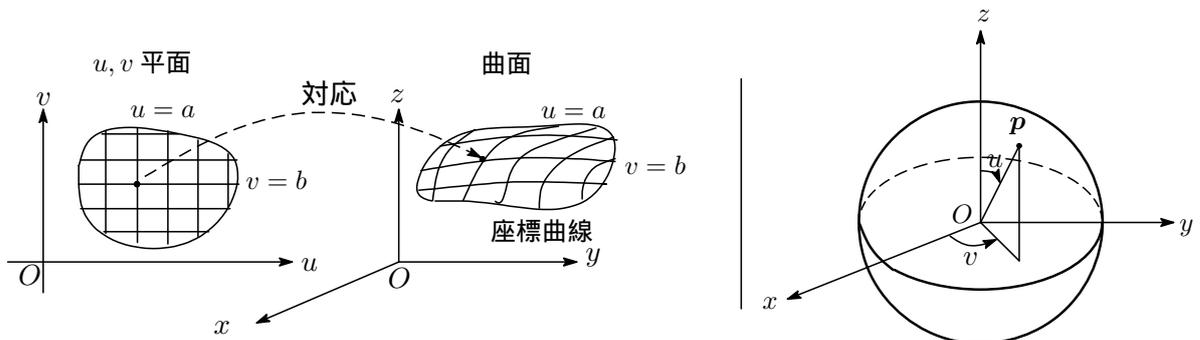
平面上の点  $P(u, v)$  に空間の点  $Q(x, y, z)$  が対応しているとします。

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v) \quad (2.1)$$

点  $P(u, v)$  が平面上を動くとき, 点  $Q(x, y, z)$  によって描かれる空間図形を曲面といいます。曲面の式を 2 つのパラメータ  $u, v$  を使って書くと

$$p(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \quad (2.2)$$

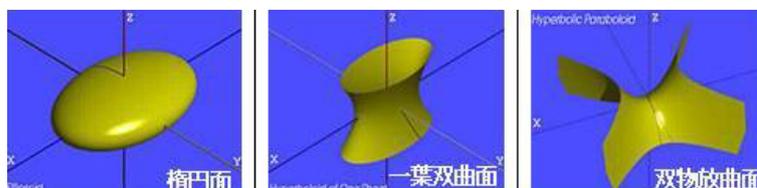
パラメータ  $v$  を  $v_0$  と固定し,  $u$  だけを変えると曲面上にある 1 つの曲線  $p(u, v_0)$  を描きます。この曲線を  $u$  座標曲線, または  $u$  曲線といいます。  $u$  を固定した  $v$  座標曲線 ( $v$  曲線) も同様に定義され,  $u$  曲線,  $v$  曲線を曲面  $p(u, v)$  の座標曲線といいます<sup>12</sup>。



具体的に代表的な曲面の形状とパラメータを使った曲面の式を以下に載せておきます。

<sup>12</sup>  $uv$  平面上のゴムでできた方眼紙を 3 次元空間の曲面にピッタリと貼り付けたイメージ。

曲面の種類	式	パラメータ表示
球面	$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$	$x = a \sin u \cos v, y = a \sin u \sin v, z = a \cos u$
楕円面	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$	$x = a \sin u \cos v, y = b \sin u \sin v, z = c \cos u$
一葉双曲面	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$	$x = a \sinh u \cos v, y = b \sinh u \sin v, z = c \cosh u$
双曲放物面	$z = -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$	$x = u, y = v, z = -\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2}$

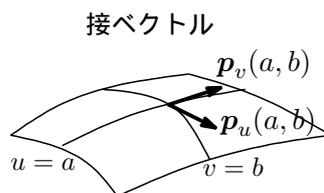


## 2.2 接ベクトル

曲面  $p(u, v)$  に対して,  $v = b$  (一定) として  $u$  だけ動かすと  $p(u, b)$  は曲面上にある曲線を描きます。同様に  $u = a$  (一定) として  $v$  だけを動かすと  $p(a, v)$  は曲面上にある曲線を描きます。それぞれの曲線の点  $p(a, b)$  における接ベクトルは

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_u(a, b) &= \frac{\partial \mathbf{p}(a, b)}{\partial u} = \left( \frac{\partial x(a, b)}{\partial u}, \frac{\partial y(a, b)}{\partial u}, \frac{\partial z(a, b)}{\partial u} \right) \\ \mathbf{p}_v(a, b) &= \frac{\partial \mathbf{p}(a, b)}{\partial v} = \left( \frac{\partial x(a, b)}{\partial v}, \frac{\partial y(a, b)}{\partial v}, \frac{\partial z(a, b)}{\partial v} \right) \end{aligned} \quad (2.3)$$

で与えられます<sup>13</sup>。



いま, 曲面上の各点において 2 つの接ベクトル  $\mathbf{p}_u$  と  $\mathbf{p}_v$  は 1 次独立である<sup>14</sup>と仮定します ( $\mathbf{p}_u, \mathbf{p}_v$  は一般に直交するベクトルではない)。そうすると曲面上の点  $p(a, b)$  において,  $\mathbf{p}_u(a, b)$  と  $\mathbf{p}_v(a, b)$  が張る平面 (接平面) 内にある任意のベクトル  $\mathbf{X}$  は  $\mathbf{p}_u$  と  $\mathbf{p}_v$  の 1 次結合で表せ, このベクトルも接ベクトルとなります。ということで, 曲面上の点  $p(a, b)$  におけるあらゆる方向の接ベクトルは  $\mathbf{p}_u$  と  $\mathbf{p}_v$  の 1 次結合の形で書け, その全体を  $\{\mathbf{X}\}$  とすると

$$\{\mathbf{X}\} = \{\xi \mathbf{p}_u(a, b) + \eta \mathbf{p}_v(a, b) \mid \xi, \eta: \text{実数}\} \quad (2.4)$$

と表すことができます<sup>15</sup>。接ベクトル  $\mathbf{X}$  の行列表記は次のようになります。

$$\mathbf{X} = \xi \mathbf{p}_u(a, b) + \eta \mathbf{p}_v(a, b) = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_u & \mathbf{p}_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

<sup>13</sup> パラメータ  $u, v$  は曲面上のある曲線の弧長ではないことに注意!

<sup>14</sup>  $c_1 \mathbf{a}_1 + c_2 \mathbf{a}_2 + \dots, c_n \mathbf{a}_n = 0$  が実数係数  $c_1 = c_2 = \dots, c_n = 0$  のときのみ成り立つとき, ベクトル  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$  は 1 次独立であるといえます。平面上の 2 つのベクトル  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$  が 1 次独立であるとき, この平面上の任意のベクトルは  $\mathbf{p}$  は  $\mathbf{p} = c_1 \mathbf{a}_1 + c_2 \mathbf{a}_2$  の形に表せ, 実数  $c_1, c_2$  の組はただ 1 通りに決まります。

<sup>15</sup> 接ベクトル全体の集合からなるベクトル空間のことを接ベクトル空間といえます。

### 2.3 第1基本形式

接ベクトル  $X$  の長さの2乗を求めてみましょう。これは  $X$  の内積で求まります。 $X^t$  を  $X$  の転置行列<sup>16</sup>として

$$\begin{aligned} X \cdot X &= |X|^2 = X^t \cdot X = \begin{pmatrix} \xi & \eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{p}_u \\ \mathbf{p}_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{p}_u & \mathbf{p}_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \xi & \eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{p}_u \cdot \mathbf{p}_u & \mathbf{p}_u \cdot \mathbf{p}_v \\ \mathbf{p}_v \cdot \mathbf{p}_u & \mathbf{p}_v \cdot \mathbf{p}_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi & \eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \\ &= E\xi^2 + 2F\xi\eta + G\eta^2 \end{aligned} \quad (2.6)$$

と  $E, F, G$  を係数行列とした2次形式<sup>17</sup>で表せます。ただし,

$$E = \mathbf{p}_u \cdot \mathbf{p}_u, \quad F = \mathbf{p}_u \cdot \mathbf{p}_v, \quad G = \mathbf{p}_v \cdot \mathbf{p}_v \quad (2.7)$$

この  $E, F, G$  を曲面  $p(u, v)$  の第1基本量と呼んでいます。 $E = |\mathbf{p}_u|^2 > 0, G = |\mathbf{p}_v|^2 > 0$  で、第1基本量の行列式は、シュワルツの不等式<sup>18</sup>を適用すると

$$\begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix} = EG - F^2 = |\mathbf{p}_u|^2 |\mathbf{p}_v|^2 - (\mathbf{p}_u \cdot \mathbf{p}_v)^2 \geq 0$$

ここで等号が成立するのは  $\mathbf{p}_u // \mathbf{p}_v$  か、ともにゼロベクトルのときのみ。いま、 $\mathbf{p}_u$  と  $\mathbf{p}_v$  は1次独立なので

$$\begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix} > 0 \quad (2.8)$$

となります。2つの接ベクトル  $X_1 = \xi_1 \mathbf{p}_u + \eta_1 \mathbf{p}_v, X_2 = \xi_2 \mathbf{p}_u + \eta_2 \mathbf{p}_v$  の内積は

$$X_1 \cdot X_2 = \begin{pmatrix} \xi_1 & \eta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_2 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = E\xi_1\xi_2 + F(\xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1) + G\eta_1\eta_2 \quad (2.9)$$

$X_1, X_2$  のなす角  $\theta$  は

$$\begin{aligned} X_1 \cdot X_2 &= |X_1| |X_2| \cos \theta \\ \therefore \cos \theta &= \frac{X_1 \cdot X_2}{|X_1| |X_2|} = \frac{E\xi_1\xi_2 + F(\xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1) + G\eta_1\eta_2}{\sqrt{E\xi_1^2 + 2F\xi_1\eta_1 + G\eta_1^2} \sqrt{E\xi_2^2 + 2F\xi_2\eta_2 + G\eta_2^2}} \end{aligned} \quad (2.10)$$

で与えられます。 $E\xi_1\xi_2 + F(\xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1) + G\eta_1\eta_2 = 0$  であれば、 $X_1 \perp X_2$  となります。

以上、接ベクトルの長さや2つの接ベクトルのなす角  $\theta$  は第1基本量によって求めることができます。

さて、曲面上の一点  $p(u, v)$  を始点とし、それに近い点  $p(u + du, v + dv)$  を終点とするベクトルを  $dp$  とすると

$$dp = \left( \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u} \right) du + \left( \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial v} \right) dv = \mathbf{p}_u du + \mathbf{p}_v dv = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_u & \mathbf{p}_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

<sup>16</sup> 行と列を入れ替えたもの。ベクトル  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  の内積  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a}^t \mathbf{b}$ ,  $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^t = \mathbf{b}^t \mathbf{a}^t$ ,  $t$ : transpose(転置) の意。

<sup>17</sup> 一般に  $n$  個の変数  $x_1, x_2, \dots, x_n$  に関する2次同次式  $\sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j$  は係数行列を  $A$  として  $\mathbf{x}^t A \mathbf{x}$  と表すことができます。これを2次形式といいます。ただし、 $A$  は対称行列で  $a_{ij} = a_{ji}$ ,  $\mathbf{x}^t = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)$ 。

<sup>18</sup>  $|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}|^2 \leq |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2$

となり<sup>19</sup>，これは (2.5) で  $\xi = du, \eta = dv$  とおいた曲面上の点  $(u, v)$  における接ベクトルにあたります。接ベクトルの長さ  $|d\mathbf{p}|$  の 2 乗は，2 点間の曲線の長さ  $ds$  の 2 乗に当たり，

$$\begin{aligned} I &= |d\mathbf{p}|^2 = d\mathbf{p} \cdot d\mathbf{p} = (ds)^2 \\ &= E(du)^2 + 2Fdudv + G(dv)^2 = \begin{pmatrix} du & dv \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.12)$$

となります。これを曲面  $\mathbf{p}(u, v)$  の第 1 基本形式と呼んでいます。

曲面  $\mathbf{p}(u, v)$  上に 4 点  $P, Q, R, T$  をとり，4 点で囲まれた図形を平行四辺形とみなし，その面積を  $dS$  とします。

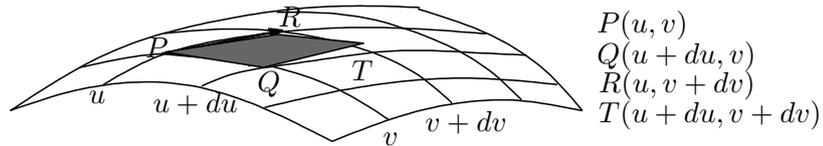


図 2: 曲面の面積

$\overrightarrow{PQ} \doteq \mathbf{p}_u du, \overrightarrow{PR} \doteq \mathbf{p}_v dv$  と近似できるので，これを 2 辺とする微小平行四辺形の面積は

$$dS = |\mathbf{p}_u \times \mathbf{p}_v| dudv \quad (2.13)$$

ベクトル解析の公式  $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})$  を使って

$$\begin{aligned} |\mathbf{p}_u \times \mathbf{p}_v|^2 &= (\mathbf{p}_u \cdot \mathbf{p}_u)(\mathbf{p}_v \cdot \mathbf{p}_v) - (\mathbf{p}_u \cdot \mathbf{p}_v)^2 = EG - F^2 \\ \therefore |\mathbf{p}_u \times \mathbf{p}_v| &= \sqrt{EG - F^2} \end{aligned} \quad (2.14)$$

となるので (2.13) は

$$dS = \sqrt{EG - F^2} dudv \quad (2.15)$$

$dS$  を面積要素といいます。曲面の面積要素は第 1 基本量で表すことができます。

・例.7 球面の表面積  $S$  を求めます。

$$\mathbf{p}(u, v) = (r \sin u \cos v, r \sin u \sin v, r \cos u),$$

$$\mathbf{p}_u = (r \cos u \cos v, r \cos u \sin v, -r \sin u), \mathbf{p}_v = (-r \sin u \sin v, r \sin u \cos v, 0)$$

$$E = \mathbf{p}_u \cdot \mathbf{p}_u = r^2, \quad F = \mathbf{p}_u \cdot \mathbf{p}_v = 0, \quad G = \mathbf{p}_v \cdot \mathbf{p}_v = r^2 \sin^2 u, \quad \sqrt{EG - F^2} = r^2 \sin u$$

$$S = \iint dS = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi r^2 \sin u dudv = 4\pi r^2$$

・例.8 トーラスの全表面積  $S$  を求めます。

トーラスは， $xz$  平面上の円  $C: (x - R)^2 + z^2 = r^2$  を  $z$  軸の周りで回転することによって得られ，その式は

$$(\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 + z^2 = r^2$$

<sup>19</sup> 厳密には  $\mathbf{p}(u + du, v + dv) - \mathbf{p}(u, v) = \left( du \frac{\partial}{\partial u} + dv \frac{\partial}{\partial v} \right) \mathbf{p} + \frac{1}{2!} \left( du \frac{\partial}{\partial u} + dv \frac{\partial}{\partial v} \right)^2 \mathbf{p} + \dots$  の 1 次近似を取っています。

で与えられます。右図に示すパラメータ  $\theta, \phi$  ( $0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq 2\pi$ ) を使うと

$$\begin{cases} x(\theta, \phi) = R \cos \theta + r \cos \phi \cos \theta \\ y(\theta, \phi) = R \sin \theta + r \cos \phi \sin \theta \\ z(\theta, \phi) = r \sin \phi \end{cases}$$

曲面  $p(\theta, \phi)$  は

$$p(\theta, \phi) = (R \cos \theta + r \cos \phi \cos \theta, R \sin \theta + r \cos \phi \sin \theta, r \sin \phi)$$

となります。これから

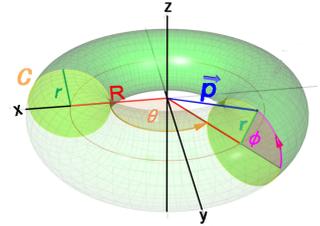
$$p_\theta = (-(R + r \cos \phi) \sin \theta, (R + r \cos \phi) \cos \theta, 0)$$

$$p_\phi = (-r \cos \theta \sin \phi, -r \sin \theta \sin \phi, r \cos \phi)$$

$$E = p_\theta \cdot p_\theta = (R + r \cos \phi)^2, F = p_\theta \cdot p_\phi = 0, G = p_\phi \cdot p_\phi = r^2$$

$$\therefore EG - F^2 = r^2(R + r \cos \phi)^2$$

$$S = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sqrt{EG - F^2} d\theta d\phi = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} r(R + r \cos \phi) d\theta d\phi = 4\pi^2 r R$$

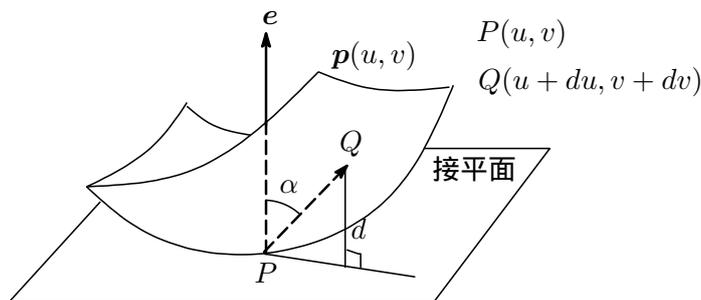


## 2.4 第2基本形式

### 2.4.1 第2基本形式と法曲率

曲面の曲がり具合を調べるために、曲面の曲率を定義していきましょう。曲面上の点  $P(u, v)$  で接ベクトル  $p_u, p_v$  で張られる接平面に垂直な大きさ1の法単位ベクトルを次式で定義します。

$$e = \frac{p_u \times p_v}{|p_u \times p_v|} \quad (2.16)$$



点  $P(u, v)$  の近くに点  $Q(u + du, v + dv)$  をとります。ベクトル  $\overrightarrow{PQ}$  の法単位ベクトルへの正射影の長さを  $d$  とすると、 $d$  は  $e$  と  $\overrightarrow{PQ}$  の内積で与えられるので

$$d = e \cdot \overrightarrow{PQ} \quad (2.17)$$

で、これは接平面から点  $Q$  までの長さで、 $d$  は点  $P$  近傍での曲面の曲がり具合の大きさを示していると考えられます。 $d$  は法単位ベクトル  $e$  とベクトル  $\overrightarrow{PQ}$  のなす角  $\alpha$  が鋭角であれば  $d > 0$ 、鈍角であれば  $d < 0$  になります。ベクトル  $\overrightarrow{PQ}$  は

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PQ} &= p(u + du, v + dv) - p(u, v) \\ &= \left( du \frac{\partial}{\partial u} + dv \frac{\partial}{\partial v} \right) p + \frac{1}{2!} \left( du \frac{\partial}{\partial u} + dv \frac{\partial}{\partial v} \right)^2 p + \dots \\ &\doteq p_u du + p_v dv + \frac{1}{2} \{ p_{uu} (du)^2 + 2p_{uv} dudv + p_{vv} (dv)^2 \} \end{aligned} \quad (2.18)$$

と表せ, これを (2.17) に入れ,  $e$  と  $p_u, p_v$  は直交することを考慮すると

$$\begin{aligned} d &= \frac{1}{2} \{ p_{uu} \cdot e (du)^2 + 2p_{uv} \cdot e (dudv) + p_{vv} \cdot e (dv)^2 \} \\ &= \frac{1}{2} \{ L(du)^2 + 2M(dudv) + N(dv)^2 \} \end{aligned} \quad (2.19)$$

を得ます。ここで

$$L = p_{uu} \cdot e, \quad M = p_{uv} \cdot e, \quad N = p_{vv} \cdot e \quad (2.20)$$

とおきました。  $L, M, N$  を第 2 基本量といいます。そして (2.19) の  $\{ \}$  内の式

$$II = L(du)^2 + 2M(dudv) + N(dv)^2 \quad (2.21)$$

を第 2 基本形式と呼んでいます。  $e$  は  $p_u, p_v$  と直交しているので  $p_u \cdot e = 0, p_v \cdot e = 0$ 。この式をそれぞれ  $u, v$  について偏微分すると

$$\begin{aligned} p_{uu} \cdot e + p_u \cdot e_u &= 0 & p_{uv} \cdot e + p_u \cdot e_v &= 0 \\ p_{vu} \cdot e + p_v \cdot e_u &= 0 & p_{vv} \cdot e + p_v \cdot e_v &= 0 \end{aligned} \quad (2.22)$$

を得ます。したがって関数  $L, M, N$  を

$$\begin{cases} L = p_{uu} \cdot e = -p_u \cdot e_u \\ M = p_{uv} \cdot e = -p_u \cdot e_v \\ M = p_{vu} \cdot e = -p_v \cdot e_u \\ N = p_{vv} \cdot e = -p_v \cdot e_v \end{cases} \quad (2.23)$$

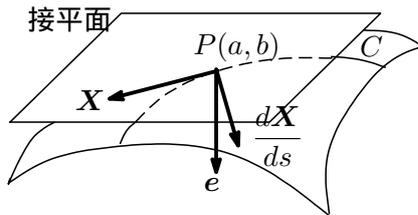
と定義することもできます。

いま, 曲面上の 1 点  $P(a, b)$  を通るある曲線  $C$  の弧長を  $s$  とし,  $C$  に沿って  $u, v$  は  $s$  の関数で  $u = u(s), v = v(s)$  と表せるとすると, 曲線  $C$  の式は

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}(u(s), v(s)) \quad (2.24)$$

となります。  $C$  に沿った接単位ベクトル  $X$  は

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \frac{d\mathbf{p}}{ds} = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u} \frac{du}{ds} + \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial v} \frac{dv}{ds} = \mathbf{p}_u \frac{du}{ds} + \mathbf{p}_v \frac{dv}{ds} \\ |\mathbf{X}| &= E\xi^2 + 2F\xi\eta + G\eta^2 = 1 \quad \left( \text{但し } \xi = \frac{du}{ds}, \quad \eta = \frac{dv}{ds} \right) \end{aligned} \quad (2.25)$$



$X' (= dX/ds)$  の法単位ベクトル  $e$  方向への正射影の長さを  $\kappa(X)$  とすると,  $\frac{d}{ds} \left( \mathbf{p}_u \frac{du}{ds} \right) =$

$\mathbf{p}_{uu} \frac{du}{ds} + \mathbf{p}_{uv} \frac{dv}{ds}$  となること等に注意して

$$\begin{aligned}
 \kappa(\mathbf{X}) &= \mathbf{X}' \cdot \mathbf{e} = \mathbf{p}_{uu} \cdot \mathbf{e} \left( \frac{du}{ds} \right)^2 + 2\mathbf{p}_{uv} \cdot \mathbf{e} \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + \mathbf{p}_{vv} \cdot \mathbf{e} \left( \frac{dv}{ds} \right)^2 \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{du}{ds} & \frac{dv}{ds} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{p}_{uu} \cdot \mathbf{e} & \mathbf{p}_{uv} \cdot \mathbf{e} \\ \mathbf{p}_{uv} \cdot \mathbf{e} & \mathbf{p}_{vv} \cdot \mathbf{e} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{du}{ds} \\ \frac{dv}{ds} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{du}{ds} & \frac{dv}{ds} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{du}{ds} \\ \frac{dv}{ds} \end{pmatrix} \\
 &= L \left( \frac{du}{ds} \right)^2 + 2M \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + N \left( \frac{dv}{ds} \right)^2 = L\xi^2 + 2M\xi\eta + N\eta^2
 \end{aligned} \tag{2.26}$$

を得ます<sup>20</sup>。この  $\kappa(\mathbf{X})$  を接単位ベクトル  $\mathbf{X} = \xi\mathbf{p}_u + \eta\mathbf{p}_v$  が定める方向の法曲率といい、この向きまで考えたベクトルを法曲率ベクトルといいます。  $\kappa$  の符号は  $\mathbf{X}'$  と  $\mathbf{e}$  のなす角によって正負いずれかとなります。曲面上の点  $P$  における法曲率は方向が変われば変化します。法曲率の最大値、最小値を主曲率、主曲率を与える方向を主方向といい、主曲率の逆数を主曲率半径といいます。

第1基本形式は  $I = d\mathbf{p} \cdot d\mathbf{p}$  と定式化されましたが、これに相当する第2基本形式は

$$II = -d\mathbf{p} \cdot d\mathbf{e} \tag{2.27}$$

と定式化できます。

$$\begin{aligned}
 II &= -d\mathbf{p} \cdot d\mathbf{e} = -(\mathbf{p}_u du + \mathbf{p}_v dv) \cdot (\mathbf{e}_u du + \mathbf{e}_v dv) \\
 &= L(du)^2 + 2Mdudv + N(dv)^2 \\
 &= \begin{pmatrix} du & dv \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.28}$$

$\mathbf{X}$  を大きさ1の接単位ベクトルに限定するのではなく、接ベクトルとした場合 ( $|\mathbf{X}| \neq 1$ ) は  $\mathbf{X} \cdot \mathbf{e} = 0$  なので

$$(\mathbf{X} \cdot \mathbf{e})' = \mathbf{X}' \cdot \mathbf{e} + \mathbf{X} \cdot \mathbf{e}' = 0 \longrightarrow \mathbf{X}' \cdot \mathbf{e} = -\mathbf{X} \cdot \mathbf{e}' \tag{2.29}$$

より

$$\begin{aligned}
 \kappa &= \frac{d\mathbf{X}}{ds} \cdot \mathbf{e} = -\mathbf{X} \cdot \frac{d\mathbf{e}}{ds} = -\frac{d\mathbf{p}}{ds} \cdot \frac{d\mathbf{e}}{ds} = -\frac{d\mathbf{p} \cdot d\mathbf{e}}{(ds)^2} \\
 &= \frac{L(du)^2 + 2Mdudv + N(dv)^2}{E(du)^2 + 2Fdudv + G(dv)^2} = \frac{II}{I}
 \end{aligned} \tag{2.30}$$

で与えられ、曲面の法曲率は第1基本形式と第2基本形式で完全に決まることが分かります<sup>21</sup>。

さて、曲面上の1点  $P(a, b)$  を固定し、その点での法単位ベクトルを  $\mathbf{e}$  として関数  $h(u, v)$  を

$$h(u, v) = \{\mathbf{p}(u, v) - \mathbf{p}(a, b)\} \cdot \mathbf{e}(a, b) \tag{2.31}$$

で定義します。そうすると点  $P(a, b)$  で

$$\begin{aligned}
 dh(a, b) &= h_u(a, b)du + h_v(a, b)dv \\
 &= \mathbf{p}_u(a, b) \cdot \mathbf{e}(a, b)du + \mathbf{p}_v(a, b) \cdot \mathbf{e}(a, b)dv \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

<sup>20</sup> 点  $P(a, b)$  で  $C$  も接平面に接しているので  $\mathbf{e}$  と  $\mathbf{X}'$  は同じ方向を向くという風に誤解しないように！

<sup>21</sup> 実は第1基本量だけで決まることが次回の話で分かってきますが、それは今後のお楽しみ。

で点  $P(a, b)$  は関数  $h$  の停留点となるので，その点近傍での様子は関数  $h$  のヘッセ行列  $H$  を調べることで分かります。

$$H = \begin{pmatrix} h_{uu} & h_{uv} \\ h_{vu} & h_{vv} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_{uu} \cdot \mathbf{e} & \mathbf{p}_{uv} \cdot \mathbf{e} \\ \mathbf{p}_{vu} \cdot \mathbf{e} & \mathbf{p}_{vv} \cdot \mathbf{e} \end{pmatrix} \quad (2.32)$$

$$\therefore H(a, b) = \begin{pmatrix} L(a, b) & M(a, b) \\ M(a, b) & N(a, b) \end{pmatrix}, \quad \det H = LN - M^2$$

行列式  $\det H(a, b)$  の正負で関数  $h$  の様子が判定できます。それを通して曲面の曲がり具合を診ると次のようになります。

1.  $\det H > 0$

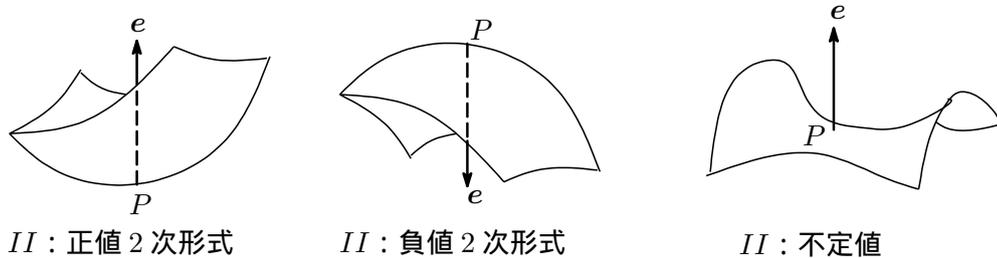
第2基本形式  $II$  が正(負)値2次形式<sup>22</sup>になる点では， $LN - M^2 > 0$  で曲面  $p$  の曲がり具合は点  $P(a, b)$  において法線  $e$  方向に凹(凸)となります。

2.  $\det H < 0$

" 極値判定できない

第2基本形式  $II$  が不定値となる点では， $LN - M^2 < 0$  で，曲面  $p$  の曲がり具合は点  $P(a, b)$  において鞍状となります。

ところで，法単位ベクトル  $e$  を  $-e$  にすると  $II$  の符号も変わるので，第2基本形式が正值になる場合と負値になる場合は本質的な違いがありません(下図参照)。



#### 2.4.2 ガウス曲率と平均曲率

曲面の注目しているある1点の近傍がどの方向に最も大きく曲がっているかを調べるために法曲率の最大値と最小値を計算します。これは(2.25)の

$$E\xi^2 + 2F\xi\eta + G\eta^2 = 1 \quad (2.33)$$

という束縛条件下での(2.26)

$$\kappa(\mathbf{X}) = L\xi^2 + 2M\xi\eta + N\eta^2 \quad (2.34)$$

の最大値・最小値(極値)を求める問題となり，ラグランジュの未定乗数法( )を使って求めることができます。

$$G(\xi, \eta, \lambda) = L\xi^2 + 2M\xi\eta + N\eta^2 - \lambda(E\xi^2 + 2F\xi\eta + G\eta^2 - 1) \quad (2.35)$$

<sup>22</sup> (2.28) の2次形式の値が正(負)の場合を正(負)値2次形式といい，0の場合は不定2次形式といいます。正(負)値2次形式の場合には，対称行列の固有値は正(負)値をとります。対称行列はある直交行列で対角化可能で，固有値が対角要素となります。したがって正(負)値2次形式の場合，行列式の値は固有値の積で常に正となります。

とにおいて、極値を与える  $\xi, \eta$  は束縛条件の式 (2.33) と次の連立方程式を満たす解として求められます。

$$\begin{cases} \frac{\partial G}{\partial \xi} = L\xi + M\eta - \lambda(E\xi + F\eta) = 0 \\ \frac{\partial G}{\partial \eta} = M\xi + N\eta - \lambda(F\xi + G\eta) = 0 \end{cases} \quad (2.36)$$

主方向を与える接単位ベクトル  $X$  は、得られた解  $\xi, \eta$  を用いて  $X = \xi p_u + \eta p_v$  で求められます。

(2.36) の連立方程式を

$$\begin{pmatrix} L - \lambda E & M - \lambda F \\ M - \lambda F & N - \lambda G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = 0 \quad (2.37)$$

と表すと、この連立方程式が  $(\xi, \eta) \neq (0, 0)$  の解を持つための条件は、係数行列の行列式が 0 となることで、次の  $\lambda$  に関する 2 次方程式が得られます。

$$\begin{vmatrix} L - \lambda E & M - \lambda F \\ M - \lambda F & N - \lambda G \end{vmatrix} = (EG - F^2)\lambda^2 - (EN + GL - 2FM)\lambda + LN - M^2 = 0 \quad (2.38)$$

この判別式は、 $EG - F^2 > 0$  を考慮すると

$$\begin{aligned} D &= (EN - 2FM + GL)^2 - 4(EG - F^2)(LN - M^2) \\ &= 4 \left( \frac{EG - F^2}{E^2} \right) (EM - FL)^2 + \left( EN - GL - \frac{2F}{E}(EM - FL) \right)^2 \geq 0 \end{aligned} \quad (2.39)$$

となるので、 $\lambda$  は 2 実根  $\lambda_1, \lambda_2$  ( $\lambda_1 \leq \lambda_2$ ) を持ちます。 $\lambda_1$  を束縛条件の式 (2.33) と連立方程式 (2.37) に代入して  $\xi, \eta$  について解いた解を  $\xi_1, \eta_1$  とすると、 $\xi_1, \eta_1$  は次式を満たします。

$$\begin{aligned} E\xi_1^2 + 2F\xi_1\eta_1 + G\eta_1^2 &= 1 \\ \begin{cases} (L - \lambda_1 E)\xi_1 + (M - \lambda_1 F)\eta_1 = 0 \rightarrow (L - \lambda_1 E)\xi_1^2 + (M - \lambda_1 F)\xi_1\eta_1 = 0 \\ (M - \lambda_1 F)\xi_1 + (N - \lambda_1 G)\eta_1 = 0 \rightarrow (M - \lambda_1 F)\xi_1\eta_1 + (N - \lambda_1 G)\eta_1^2 = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.40)$$

この 2 つの式を足し合わせて整理すると

$$\begin{aligned} (L\xi_1^2 + 2M\xi_1\eta_1 + N\eta_1^2) - \lambda_1(E\xi_1^2 + 2F\xi_1\eta_1 + G\eta_1^2) &= 0 \\ \therefore \lambda_1 = L\xi_1^2 + 2M\xi_1\eta_1 + N\eta_1^2 = \kappa_1(\xi_1, \eta_1) \end{aligned} \quad (2.41)$$

全く同様にして  $\lambda_2 = \kappa_2(\xi_2, \eta_2)$  が得られ、法曲率の最大値と最小値は (2.38) の 2 次方程式の解として得られます。2 つの解を  $\kappa_1, \kappa_2$  とすると解と係数の関係から

$$K \equiv \kappa_1\kappa_2 = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \quad (2.42)$$

$$H \equiv \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2) = \frac{EN + GL - 2FM}{2(EG - F^2)} \quad (2.43)$$

$K$  をガウス曲率または全曲率、 $H$  を平均曲率、 $\kappa_1, \kappa_2$  を主曲率といいます。主曲率  $\kappa_1, \kappa_2$  に対応する主方向を与える接単位ベクトルは  $X_1 = \xi_1 p_u + \eta_1 p_v$ 、 $X_2 = \xi_2 p_u + \eta_2 p_v$  と表されます。

(2.8) より  $EG - F^2 > 0$  なので、 $K$  の符号は  $LN - M^2$  と同じ符号を持ち、符号によって次のように分類されます<sup>23</sup>。

<sup>23</sup> 2 次曲線  $ax^2 + 2bxy + cy^2 + d = 0$  (但し、 $a, b, c$  は同時に 0 にならないものとする) は次の様に分類されます

$$\begin{cases} \cdot ac - b^2 > 0 & \text{楕円型 (楕円, 円, 点の場合を含む)} \\ \cdot ac - b^2 < 0 & \text{双曲型 (双曲線, 交わる 2 直線の場合を含む)} \\ \cdot ac - b^2 = 0 & \text{放物型 (放物線, 平行な 2 直線の場合を含む)} \end{cases}$$

- $K > 0$  となる点は楕円点<sup>24</sup>と呼ばれ，凹凸の曲面の点に対応します。
- $K < 0$  となる点は双曲点と呼ばれ，鞍状の曲面の点に対応します。
- $K = 0$  となる点は放物点と呼ばれ，平面，円柱面，円錐面の曲面の点に対応します。

(2.42), (2.43) より 2 つの主曲率

$$\kappa_{1,2} = H \pm \sqrt{H^2 - K} \quad (2.44)$$

が得られます。2 次方程式 (2.38) が重根を持つ場合，判別式  $D = 0$  より

$$\begin{cases} EG = F^2 \\ EM = FL \\ EN = GL \end{cases} \longrightarrow \frac{L}{E} = \frac{M}{F} = \frac{N}{G} \quad (2.45)$$

このときは  $\kappa_1 = \kappa_2$  となり，この点では曲面があらゆる方向に同じように曲がっていることになります。この点を<sup>せい</sup>臍点といいます。臍点のうち， $\kappa = 0$  すなわち  $L = M = N = 0$  である点を平坦点といいます。

2 つの主曲率に対応する主方向は互いに直交します。このことは以下のようにして確認できます。(2.36) より

$$\begin{cases} L\xi_1 + M\eta_1 - \kappa_1(E\xi_1 + F\eta_2) = (L - \kappa_1 E)\xi_1 + (M - \kappa_1 F)\eta_1 = 0 \\ M\xi_1 + N\eta_1 - \kappa_1(F\xi_1 + G\eta_1) = (M - \kappa_1 F)\xi_1 + (N - \kappa_1 G)\eta_1 = 0 \\ L\xi_2 + M\eta_2 - \kappa_2(E\xi_2 + F\eta_2) = (L - \kappa_2 E)\xi_2 + (M - \kappa_2 F)\eta_2 = 0 \\ M\xi_2 + N\eta_2 - \kappa_2(F\xi_2 + G\eta_2) = (M - \kappa_2 F)\xi_2 + (N - \kappa_2 G)\eta_2 = 0 \end{cases} \quad (2.46)$$

第 1 式，第 2 式にそれぞれ  $\xi_2, \eta_2$  を掛けて足しあわすと

$$(L - \kappa_1 E)\xi_1\xi_2 + (M - \kappa_1 F)(\xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1) + (N - \kappa_1 G)\eta_1\eta_2 = 0 \quad (2.47)$$

第 3 式，第 4 式にそれぞれ  $\xi_1, \eta_1$  を掛けて足しあわすと

$$(L - \kappa_2 E)\xi_1\xi_2 + (M - \kappa_2 F)(\xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1) + (N - \kappa_2 G)\eta_1\eta_2 = 0 \quad (2.48)$$

これら 2 式を差し引くと

$$(\kappa_1 - \kappa_2)(E\xi_1\xi_2 + F(\xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1) + G\eta_1\eta_2) = 0 \quad (2.49)$$

$\kappa_1 \neq \kappa_2$  なので，(2.9) より

$$E\xi_1\xi_2 + F(\xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1) + G\eta_1\eta_2 = \mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{X}_2 = 0 \quad (2.50)$$

となって，2 つの主方向は互いに直交することが分かります。

・例.9 半径  $a$  の球面の曲率。

$$\mathbf{p} = (a \sin u \cos v, a \sin u \sin v, a \cos u), \quad \mathbf{p}_u = (a \cos u \cos v, a \cos u \sin v, -a \sin u)$$

$$\mathbf{p}_{uu} = (-a \sin u \cos v, -a \sin u \sin v, -a \cos u), \quad \mathbf{p}_v = (-a \sin u \sin v, a \sin u \cos v, 0)$$

$$\mathbf{p}_{vv} = (-a \sin u \cos v, -a \sin u \sin v, 0), \quad \mathbf{e} = \mathbf{p}/|\mathbf{p}| = \mathbf{p}/a$$

$$\begin{cases} E = \mathbf{p}_u \cdot \mathbf{p}_u = a^2, & F = \mathbf{p}_u \cdot \mathbf{p}_v = 0, & G = \mathbf{p}_v \cdot \mathbf{p}_v = a^2 \sin^2 u \\ L = \mathbf{p} - uu \cdot \mathbf{e} = -a, & M = \mathbf{p}_{uv} \cdot \mathbf{e} = 0, & N = \mathbf{p}_{vv} \cdot \mathbf{e} = -a \sin^2 u \end{cases}$$

<sup>24</sup> 曲面上の点はすべて、楕円点、双曲点、放物点、平坦点のいずれかになります。空間全体を曲面のある点  $P$  での接平面で切ったとき、曲面上での点  $P$  の近傍が接平面によって切られた空間の片側に含まれるなら、 $P$  を楕円点といい、両側に含まれるなら双曲点、近傍が接平面上に乗れば平坦点といい、楕円点でも双曲点でも平坦点でもない点を放物点といいます (← <http://ameblo.jp/scitamehtam/entry-10577224107.html>)。

したがって、ガウス曲率  $K$  と平均曲率  $H$  は

$$K = \kappa_1 \kappa_2 = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{1}{a^2}, \quad H = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2) = \frac{EN + GL - 2FM}{2(EG - F^2)} = -\frac{1}{a} \quad (2.51)$$

主曲率は 2 次方程式 (2.38) の 2 根として求められます。主曲率  $\kappa_1, \kappa_2$  は

$$(EG - F^2)\lambda^2 - (EN - 2FM + GL)\lambda + LN - M^2 = a^2\lambda^2 + 2a\lambda + 1 = 0$$

$$\therefore \lambda(= \kappa_1, \kappa_2) = -\frac{1}{a} \quad (\text{重根})$$

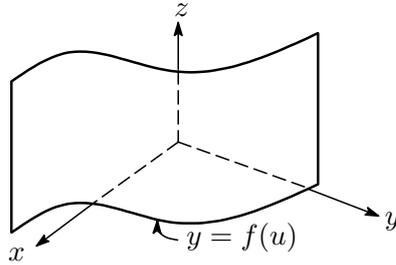
となって、球面上では至る点が臍点となります<sup>25</sup>。

・例.10 柱面の曲率。

柱面は  $xy$  平面上の曲線  $y = f(x)$  を  $z$  軸方向に引き伸ばして得られる曲面です。曲面の式を

$$\mathbf{p}(u, v) = (u, f(u), v) \longleftrightarrow x = x(u), y = f(u), z = v$$

とおくと、



$$\mathbf{p}_u = (1, f', 0), \quad \mathbf{p}_{uu} = (0, f'', 0), \quad \mathbf{p}_v = (0, 0, 1), \quad \mathbf{p}_{vv} = (0, 0, 0)$$

$$\mathbf{p}_{uv} = (0, 0, 0), \quad \mathbf{e} = \frac{\mathbf{p}_u \times \mathbf{p}_v}{|\mathbf{p}_u \times \mathbf{p}_v|} = \frac{(f', -1, 0)}{\sqrt{1 + f'^2}}$$

$$E = 1 + f'^2, \quad F = 0, \quad G = 1$$

$$L = -f''/\sqrt{1 + f'^2}, \quad M = 0, \quad N = 0$$

これより

$$\begin{cases} K = \kappa_1 \kappa_2 = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = 0 \\ H = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2) = \frac{EN + GL - 2FM}{2(EG - F^2)} = -\frac{f''}{2(1 + f'^2)^{3/2}} \end{cases}$$

主曲率は、 $\kappa_1 = 0$  とすると  $\kappa_2 = 2H$  となります。 $\kappa_1 = 0$  に対する主方向を求めます。(2.37) で  $\lambda = 0$  において

$$\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f''/\sqrt{1 + f'^2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = 0$$

$f'' = 0$  とすると  $H = 0$  となって  $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$  となって主方向は存在しないので、 $f'' \neq 0$  とします。そうすると  $\xi = 0$  で  $\eta$  の値は任意となるので、 $\kappa_1$  に対する主方向は  $\mathbf{X}_1 = 0 \cdot \mathbf{p}_u + \eta \mathbf{p}_v = \eta(0, 0, 1)$  で  $z$  軸方向となります。一方、 $\kappa_2 = 2H$  に対する主方向は、(2.37) で  $\lambda = 2H$  において整理すると

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & f''/(1 + f'^2)^{3/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = 0$$

<sup>25</sup> 球面では第 2 基本形式が第 1 基本形式の定数倍になります。 $II = \kappa I$

となり,  $\xi$  は任意で  $\eta = 0$  の値となるので,  $\kappa_2$  に対する主方向は  $\mathbf{X}_2 = \xi \cdot \mathbf{p}_u + 0 \cdot \mathbf{p}_v = \xi(1, f', 0)$  で  $x, y$  成分を持つので,  $xy$  平面に平行な方向となります<sup>26</sup>。ちなみに  $\kappa_2 = -f''/(1+f'^2)^{3/2}$  は  $xy$  平面上の曲線の曲率になっていますね。

・例.11 トーラス面の曲率。

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(u, v) &= (R \cos u + r \cos v \cos u, R \sin u + r \cos v \sin u, r \sin v) \quad (0 \leq u, v \leq 2\pi) \\ \mathbf{p}_u &= (-(R + r \cos v) \sin u, (R + r \cos v) \cos u, 0) \\ \mathbf{p}_v &= (-r \sin v \cos u, -r \sin v \sin u, r \cos v) \\ \mathbf{p}_{uu} &= (-R + r \cos v) \cos u, -(R + r \cos v) \sin u, 0) \\ \mathbf{p}_{uv} &= (r \sin u \sin v, -r \cos u \sin v, 0) \end{aligned}$$

これから

$$\begin{aligned} E &= (R + r \cos v)^2, \quad F = 0, \quad G = r^2 \\ L &= -\cos v(R + r \cos v), \quad M = 0, \quad N = -r \\ K &= \frac{\cos v}{rR + r^2 \cos v}, \quad H = -\frac{R + 2r \cos v}{2r(R + r \cos v)} \end{aligned}$$

ガウス曲率と平均曲率は  $u$  に依存しないことがわかります ( ドーナツの輪っかはどこを切っても同じ断面 )。いま, 具体的に,  $R = 2, r = 1$  とおくと

$$\det H = LN - M^2 = (2 + \cos v) \cos v \rightarrow \begin{cases} 0 < v < \pi/2 & K > 0 \\ \pi/2 < v < 3\pi/2 & K < 0 \\ 3\pi/2 < v < 2\pi & K > 0 \\ v = \pi/2, 3\pi/2 & K = 0 \end{cases}$$

となるので, トーラスの外側 ( ドーナツの輪っかの外側 ) は楕円点, 内側は双曲点, その境界が放物点となります。

・例.12 楕円放物面  $z = x^2 + y^2$  の曲率。

$$x(u) = u, \quad y(v) = v, \quad z(u, v) = u^2 + v^2, \quad \mathbf{p}(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$$

とにおいて

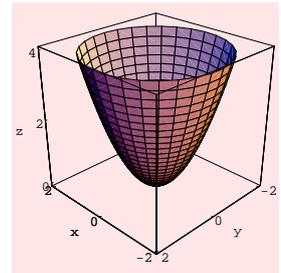
$$\begin{aligned} \mathbf{p}_u &= (1, 0, 2u), \quad \mathbf{p}_{uu} = (0, 0, 2), \quad \mathbf{p}_v = (0, 1, 2v) \\ \mathbf{p}_{vv} &= (0, 0, 2), \quad \mathbf{p}_{uv} = (0, 0, 0), \quad \mathbf{e} = (0, -1, 0) \\ E &= 1 + 4u^2, \quad F = 4uv, \quad G = 1 + 4v^2 \\ L &= 2/\sqrt{1 + 4u^2 + 4v^2}, \quad M = 0, \quad N = 2/\sqrt{1 + 4u^2 + 4v^2} \end{aligned}$$

これからガウス曲率と平均曲率は

$$K = \kappa_1 \kappa_2 = \frac{4}{(1 + 4u^2 + 4v^2)^2}, \quad H = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2) = \frac{2(1 + 2u^2 + 2v^2)}{(1 + 4u^2 + 4v^2)^{3/2}}$$

$\kappa_1, \kappa_2$  は (2.38) の  $\lambda$  についての 2 次方程式を解いて

$$\begin{cases} \kappa_1 = \frac{2}{(1 + 4u^2 + 4v^2)^{3/2}} \\ \kappa_2 = \frac{2}{\sqrt{1 + 4u^2 + 4v^2}} \end{cases}$$



<sup>26</sup>  $\mathbf{e} \cdot \mathbf{X}_1 = 0, \quad \mathbf{e} \cdot \mathbf{X}_2 = 0, \quad \mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{X}_2 = 0$

と得られます<sup>27</sup>。原点  $(u, v) = (0, 0)$  では  $\kappa_1 = \kappa_2$  となり，原点は臍点であることが分かります。 $(u, v) = (0, 0)$  でヘッセ行列式は  $\det H > 0$  ,  $h_{uu}(0, 0) = L(0, 0) > 0$  なので，点  $(0, 0)$  で極小値をとります。

・例.13 双曲放物面の曲率を求めます。

$$\begin{aligned} p(u, v) &= (u, v, u^2 - v^2) \\ p_u &= (1, 0, 2u), \quad p_{uu} = (0, 0, 2), \quad p_v = (0, 1, -2v) \\ p_{vv} &= (0, 0, -2), \quad p_{uv} = (0, 0, 0) \\ e &= (-2u/\sqrt{1+4u^2+4v^2}, 2v/\sqrt{1+4u^2+4v^2}, 1/\sqrt{1+4u^2+4v^2}) \\ E &= 1+4u^2, \quad F = -4uv, \quad G = 1+4v^2 \\ L &= 2/\sqrt{1+4u^2+4v^2}, \quad M = 0, \quad N = -2/\sqrt{1+4u^2+4v^2} \end{aligned}$$

これより

$$K = -\frac{4}{(1+4u^2+4v^2)^2}, \quad H = -\frac{4(u^2-v^2)}{(1+4u^2+4v^2)^{3/2}}$$

また， $(u, v) = (0, 0)$  でヘッセ行列式は  $\det H < 0$  となり，点  $(0, 0)$  は鞍点です。

・例.14 懸垂面の曲率を求めます。

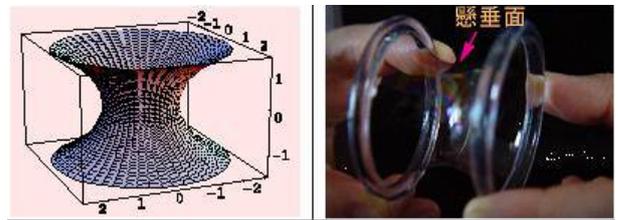
懸垂面のパラメータ表示は

$$p(u, v) = (\cosh(u) \cos(v), \cosh(u) \sin(v), u)$$

したがって

$$\begin{aligned} p_u &= (\cos(v) \sinh(u), \sin(v) \sinh(u), 1), \quad p_{uu} = (\cos(v) \cosh(u), \cosh(u) \sin(v), 0) \\ p_v &= (-\cosh(u) \sin(v), \cosh(u) \cos(v), 0), \quad p_{vv} = (-\cos(v) \cosh(u), -\cosh(u) \sin(v), 0) \\ p_{uv} &= (-\sin(v) \sinh(u), \cos(v) \sinh(u), 0), \quad e = (-\cos(v)/\cosh(u), -\sin(v)/\cosh(u), \tanh(u)) \\ E &= \cosh^2(u), \quad F = 0, \quad G = \cosh^2(u), \quad L = 1/\cosh^2(u), \quad M = 0, \quad N = 1/\cosh^2(u) \\ \therefore K &= 1/\cosh^4(u), \quad H = 0 \end{aligned}$$

懸垂面は平均曲率が至るところでゼロとなります。全ての点において平均曲率が0となる曲面を極小曲面いいます。具体的には石鹸膜がそのいい例で，枠に石鹸膜を張るときにその膜面積を最も小さくしようとしますが，そうやってできた膜曲面が極小曲面になります。2つのリングの間に張られた石鹸膜<sup>28</sup>が形成する曲面は懸垂面です。



( ) ラグランジュの未定乗数法

束縛条件  $g(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$  のもとで，関数  $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  が極値を持つとき，その極値点を  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  とすると，極値点は新たな関数  $G(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda)$  を

$$G(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) - \lambda g(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

<sup>27</sup>  $\kappa_1$  と例 2' の放物線の曲率と比較してみてください。

<sup>28</sup> 石鹸膜の写真：<http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/furuhata/ed/hokkyodai02/>

とにおいて,  $G$  を  $x_1, x_2, \dots, x_n$  で偏微分したものが 0 になる値として求めることができる。

$$\begin{cases} \frac{\partial G}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial G}{\partial x_2} = \frac{\partial f}{\partial x_2} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x_2} = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial G}{\partial x_n} = \frac{\partial f}{\partial x_n} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x_n} = 0 \end{cases} \quad (2.52)$$

束縛条件  $g(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$  と上の連立方程式より極値点  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  が求まる。

### 2.4.3 曲率線

曲面上の曲線  $C$  の上のどの点でも, その点における接ベクトルがその点の主方向 (その点近傍での曲面の最大, 最小の曲がり方向) と一致するとき, その曲線を曲率線といいます。曲面上の各点が臍点であるとき, どの方向も主方向となり, つまり曲面上の任意の曲線は曲率線となるので, ここでは曲面の各点が臍点でない場合を考えます。

主方向を与える接ベクトルの  $\xi, \eta$  は (2.36) より求められます。  $\lambda$  を消去すると

$$\begin{cases} L\xi + M\eta - \lambda(E\xi + F\eta) = 0 \\ M\xi + N\eta - \lambda(F\xi + G\eta) = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{vmatrix} L\xi + M\eta & E\xi + F\eta \\ M\xi + N\eta & F\xi + G\eta \end{vmatrix} = 0 \quad (2.53)$$

これから

$$(EM - LF)\xi^2 + (EN - LG)\xi\eta + (FN - MG)\eta^2 = 0 \quad (2.54)$$

$\xi = du/ds, \eta = dv/ds$  なので

$$(EM - LF) \left(\frac{du}{ds}\right)^2 + (EN - LG) \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + (FN - MG) \left(\frac{dv}{ds}\right)^2 = 0 \quad (2.55)$$

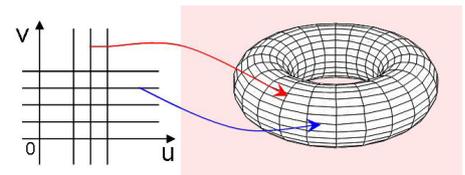
これを曲率線の微分方程式と呼んでいます。

曲線  $C$  が曲率線となるための必要十分条件を調べます。いま曲面上に臍点がないとしているので, 主方向は互いに直交し,  $F = \mathbf{p}_u \cdot \mathbf{p}_v = 0$ 。このとき (2.54) は解  $\xi = 1, \eta = 0$  をもつ<sup>29</sup>ので  $EM - LF = 0$  となり,  $M = 0$  となります<sup>30</sup>。逆に,  $F = 0, M = 0$  とすると (2.54) より

$$(LG - EN)\xi\eta = 0 \quad (2.56)$$

臍点でないから  $LG \neq EN$ 。したがって  $\xi = 0$  または  $\eta = 0$  となります。以上のことから, 曲線  $C$  が曲率線である必要十分条件は次の式が成り立つこととなります。

$$F = M = 0 \quad (2.57)$$



具体例として, 例.11 のトーラスでは  $F = M = 0$  となりました。

$$\mathbf{p}(u, v) = ((R + r \cos v) \cos u, (R + r \cos v) \sin u, r \sin v)$$

これは座標曲線 ( $u$  曲線,  $v$  曲線) が曲率線となっているケースで, このとき座標変数  $u, v$  を曲率線座標といいます。

<sup>29</sup>  $\xi = 0, \eta = 1$  としても同様。

<sup>30</sup>  $E = \mathbf{p}_u \cdot \mathbf{p}_u \neq 0$

オイラーの公式

曲率線上の1点における接ベクトル  $\mathbf{X} = \xi \mathbf{p}_u + \eta \mathbf{p}_v$  に対して法曲率は, (2.30) で  $F = M = 0$  とおいて

$$\kappa(\mathbf{X}) = \frac{L\xi^2 + N\eta^2}{E\xi^2 + G\eta^2} \quad (2.58)$$

で, この点での主曲率は  $EG\lambda^2 - (EN + GL)\lambda + LN = 0$  より

$$\kappa_1 = \frac{L}{E}, \quad \kappa_2 = \frac{N}{G} \quad (2.59)$$

これを (2.58) に入れて整理すると

$$\kappa(\mathbf{X}) = \kappa_1 \left( \frac{\sqrt{E}\xi}{\sqrt{E\xi^2 + G\eta^2}} \right)^2 + \kappa_2 \left( \frac{\sqrt{G}\eta}{\sqrt{E\xi^2 + G\eta^2}} \right)^2 \quad (2.60)$$

接ベクトル  $\mathbf{X}$  と  $\mathbf{p}_u$  がなす角を  $\theta$  とすると, (2.10) より

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{E}\xi}{\sqrt{E\xi^2 + G\eta^2}}, \quad \sin \theta = \frac{\sqrt{G}\eta}{\sqrt{E\xi^2 + G\eta^2}} \quad (2.61)$$

したがって,

$$\kappa(\mathbf{X}) = \kappa_1 \cos^2 \theta + \kappa_2 \sin^2 \theta \quad (2.62)$$

これをオイラーの公式といいます。主曲率半径をそれぞれ  $R, R_1, R_2$  とすると (2.62) は

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2 \theta}{R_1} + \frac{\sin^2 \theta}{R_2} \quad (2.63)$$

と表せます。

・例.15 回転放物面  $\mathbf{p}(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$  の曲率線。

$$\begin{cases} \mathbf{p}_u = (1, 0, 2u), & \mathbf{p}_v = (0, 1, 2v) \\ \mathbf{e} = (\mathbf{p}_u \times \mathbf{p}_v) / |\mathbf{p}_u \times \mathbf{p}_v| = \frac{1}{\sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}} (-2u, -2v, 1) \end{cases}$$

• 第1基本量

$$E = \mathbf{p}_u \cdot \mathbf{p}_u = 1 + 4u^2, \quad F = \mathbf{p}_u \cdot \mathbf{p}_v = 4uv \\ G = \mathbf{p}_v \cdot \mathbf{p}_v = 1 + 4v^2$$

• 第2基本量

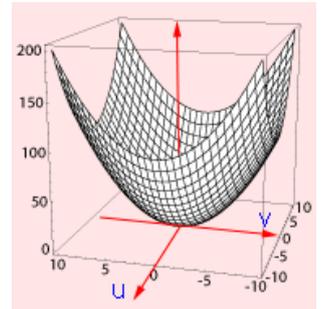
$$L = \mathbf{p}_{uu} \cdot \mathbf{e} = \frac{2}{\sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}}, \quad M = \mathbf{p}_{uv} \cdot \mathbf{e} = 0, \quad N = \mathbf{p}_{vv} \cdot \mathbf{e} = \frac{2}{\sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}}$$

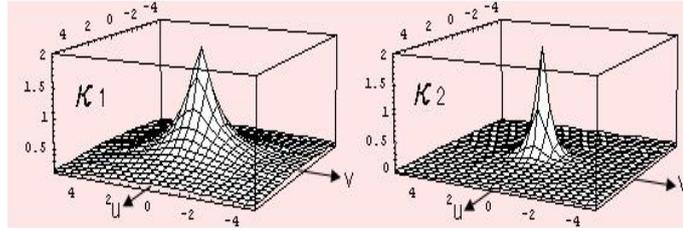
• 主曲率

$$(EG - F^2)\lambda^2 - (EN + GL - 2FM)\lambda + LN - M^2 = 0$$

より

$$\kappa_1 = \frac{2}{(4u^2 + 4v^2 + 1)^{1/2}}, \quad \kappa_2 = \frac{2}{(4u^2 + 4v^2 + 1)^{3/2}}$$





• 主方向

$$\begin{aligned} & (EM - LF)\xi^2 + (EN - LG)\xi\eta + (FN - MG)\eta^2 \\ &= uv\xi^2 - (u^2 - v^2)\xi\eta - uv\eta^2 \\ &= (u\xi + v\eta)(u\eta - v\xi) = 0 \end{aligned}$$

$$\therefore u\xi + v\eta = 0, \quad v\xi - u\eta = 0 \longrightarrow \xi = vk, \eta = -uk, \quad \xi = uk, \eta = vk \quad (k: \text{任意定数})$$

$k = 1$  において接ベクトルを規格化すると

$$\mathbf{X} = \xi \mathbf{p}_u + \eta \mathbf{p}_v = \begin{cases} \mathbf{X}_1 = \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2}}(v, -u, 0) \\ \mathbf{X}_2 = \frac{1}{\sqrt{(u^2 + v^2) + 4(u^2 + v^2)^2}}(u, v, 2u^2 + 2v^2) \end{cases}, \quad \mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{X}_2 = 0$$

• 曲率線

$$(EM - LF) \left( \frac{du}{ds} \right)^2 + (EN - LG) \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + (FN - MG) \left( \frac{dv}{ds} \right)^2 = 0$$

$$\therefore u \frac{du}{ds} + v \frac{dv}{ds} = 0, \quad v \frac{du}{ds} - u \frac{dv}{ds} = 0 \longrightarrow (u^2 + v^2) \frac{dv}{ds} = 0, \quad \frac{d \ln u}{ds} = \frac{d \ln v}{ds}$$

これから曲率線の式として

$$u^2 + v^2 = C_1^2, \quad u = C_2 v \quad (C_1, C_2: \text{任意の定数})$$

が得られます。但し、原点  $(u, v) = (0, 0)$  は臍点となるのでこの点は除く。

• 例.16 双曲放物面  $\mathbf{p}(u, v) = (u + v, u - v, uv)$  の曲率線。

$$\begin{cases} \mathbf{p}_u = (1, 1, v), & \mathbf{p}_v = (1, -1, u) \\ \mathbf{e} = \frac{1}{\sqrt{2(u^2 + v^2) + 4}}(u + v, -u + v, 2) \end{cases}$$

• 第1基本量

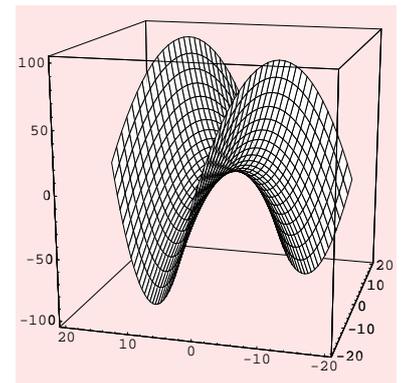
$$E = 2 + v^2, \quad F = uv \quad G = 2 + u^2$$

• 第2基本量

$$L = 0, \quad M = -\frac{2}{\sqrt{2u^2 + 2v^2 + 4}}, \quad N = 0$$

• ガウス曲率, 平均曲率

$$\begin{aligned} K &= \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = -\frac{4}{(4u^2 + 4v^2 + 1)^2} \\ H &= \frac{EN - GL - 2GM}{2(EG - F^2)} = -\frac{4(u^2 - v^2)}{(4u^2 + 4v^2 + 1)^{3/2}} \end{aligned}$$



• 曲率線

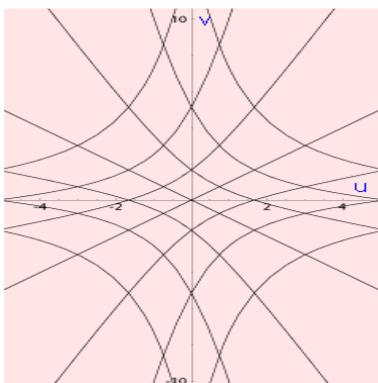
$$(EM - LF) \left( \frac{du}{ds} \right)^2 + (EN - LG) \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + (FN - MG) \left( \frac{dv}{ds} \right)^2 = 0$$

$$\therefore \frac{dv}{du} = \pm \sqrt{\frac{2+v^2}{2+u^2}} \rightarrow \frac{du}{\sqrt{u^2+2}} = \pm \frac{dv}{\sqrt{v^2+2}} \rightarrow \frac{d}{du} \ln(u + \sqrt{u^2+2}) = \pm \frac{d}{dv} \ln(v + \sqrt{v^2+2})$$

これから曲率線の式として

$$\frac{u + \sqrt{u^2+2}}{v + \sqrt{v^2+2}} = C_1, \quad (u + \sqrt{u^2+2})(v + \sqrt{v^2+2}) = C_2, \quad (C_1, C_2: \text{任意の定数})$$

を得ます。  $u, v$  の関係をグラフに表すと下図のようになります。



-----

*GOOD LUCK !  
SEE YOU AGAIN !*

2011.10.20  
by *KENZO*

(了)

1. 2011.11.23 「2 . 曲面」の稿を見直し , 一部加筆修正。
2. 2011.10.27 一部加筆修正。