曲線と曲面（余談）

KENZOU

*2012*年*1*月*4*日
*2012.1.7*更新

寒さも一段と厳しくなってきたある冬の昼下がり，K氏とコニーは淹れたての熱いコーヒーをすすりながら曲面に関する話題についていろいろ雑談をしていた。。。

1　曲面のお話いろいろ

1.1　曲面のパラメータ表示

- コニー：KさんのHPにアップされた「曲線と曲面」というレポートを読んだけど，§2.1の「曲面のパラメータ表示」の項はずいぶんとあっさり書かれていたわね。微分幾何のテキストなんかを見ると曲面の捉え方はもう少し込み入っているようだけど。

- K氏：そうだね。初学のときはあまりうるさいことに拘らずにドンドン先へ進むのが大事という小生のPolicyによるんだ，とカッコええこと言ってるけど，レポートを一応読んだ後は，また戻って曲面というのをどう捉えるのかを勉強しなおすのも大事なことだね。ということで，数学的な厳密性は不問に付して，レポートで書きもらしたことなど思いつくままにいろいろ話をしてみようか。

- コニー：よろしくお願いします〜。

- K氏：了解。さて，空間内の曲面を表すのに次の3つの表し方があったね。

$$z = f(x, y) \tag{1.1}$$
$$F(x, y, z) = 0 \tag{1.2}$$
$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v) \tag{1.3}$$

この3つの表し方はそれぞれ関係していて，(1.1) は $F(x, y, z) = f(x, y) - z = 0$ と書けば (1.2) になるし，x, y をパラメータ u, v の関数として $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ ととると，(1.1) に代入して $z = f(x(u, v), y(u, v)) = z(u, v)$ となるので，(1.1) は (1.3) の形に表わすことができるだろ。例えば双曲放物面は

$$z = -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \longleftrightarrow \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = z(u, v) = -\dfrac{u^2}{a^2} + \dfrac{v^2}{b^2} \end{cases}$$

と書けるし，半球面 $(z > 0)$ は

$$z = \sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)} \longleftrightarrow \begin{cases} x = x(u, v) = a \sin u \cos v \\ y = y(u, v) = a \sin u \sin v \\ z = z(u, v) = a \cos u \end{cases}$$

といった具合だね。 ところで (1.1) の $z = f(x, y)$ という表し方は座標 x, y, z について対称でないというか，x, y, z を対等に取り扱っていないし，曲面の接平面が xy 平面に垂直なところでは $\partial z/\partial x$, $\partial z/\partial y$ などが ∞ になったりするのであまり具合がよくない。曲面を解析的に表す場合，(1.2) の $F(x, y, z) = 0$ も便利な表し方とはいえない。ということで，微分幾何学の方面では (1.3) の曲面の**パラメータ表示法**が普通使われている。

- コニー：そうなんだ。x, y, z が対等に取り扱えるパラメータ表示法の表し方は曲面の解析を進めていく上で見通しがよいということね。
- K氏：うん。パラメータ表示法をもう少し立ち入って説明するには写像の考え方が必要になってくるけど，ここではあまり深入りせずに簡単に触れておくことにしよう。

1.2 写像

- K氏：写像の定義とは次のようなものだった。

≪写像≫

A と B を 2 つの空でない集合とする。A の各要素 a に B の 1 つの要素が対応させられているとき，この対応のことを A から B への**写像**といい，記号 f で表す。すなわち，

$$f\colon A \to B \quad \text{または} \quad f\colon A \to B \quad a \mapsto f(a)$$

このとき，A の要素 a に対応する B の要素のことを写像 f による a の像といい，$f(a)$ で表す。f が連続ならば，$a \in A$ が連続的に変わるとき a の像も連続的に変わる，これを**連続的写像**といっているね。集合 A を写像 f の定義域または始域，B を f の値域または終域という。

●単射

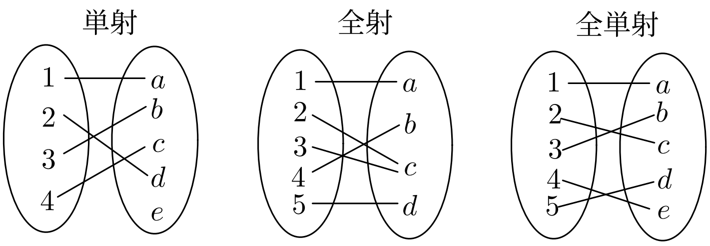
A の 2 つの要素 a_1, a_2 とするとき，$a_1 \neq a_2$ ならば常に $f(a_1) \neq f(a_2)$ が成り立つとき，この f のことを**単射**(injection)，または**１対１の写像**という。

●全射

写像 $f\colon A \to B$ が $f(A) = B$ となっているとき，この f のことを**全射**(surjection)，または**上への写像**という。

●全単射

写像 $f\colon A \to B$ が $f(A) = B$ となっていて，かつ A の要素が $a_1 \neq a_2$ ならば常に $f(a_1) \neq f(a_2)$ が成り立つとき，この，f のことを全単射 (bijection) という。



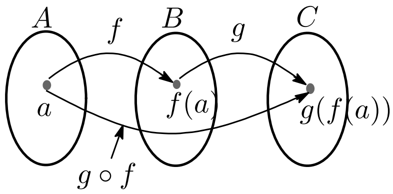
≪写像の合成≫

A, B, C を 3 つの集合とする。$f : A \to B$, $g : B \to C$ に対して，A の要素 $a \in A$ に対して C の要素 $g(f(a))$ を対応させる写像 $\psi : A \longrightarrow C$ を f と g の**合成写像**または**積**といい，

$$g \circ f : A \longrightarrow C, \quad (g \circ f)(a) = g(f(a)), \quad (a \in A)$$

で表す。

写像の合成



≪逆写像≫

$f : A \to B$ が**全単射**であるとき，B に属する要素 b に対して $b = f(a)$ となる A の要素 a が一意的に存在する。$b \in B$ に対してこのように定まる $a \in A$ への写像を**逆写像**といい，

$$f^{-1} \colon B \to A$$

で表す。つまり

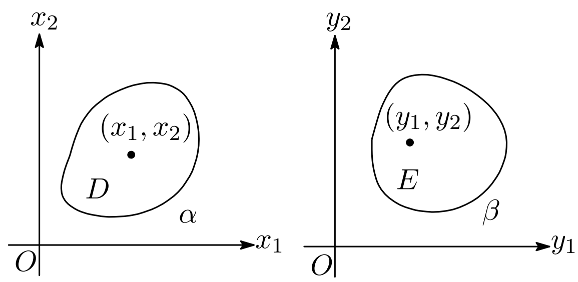
$$f^{-1}(b) = a \Leftrightarrow f(a) = b$$

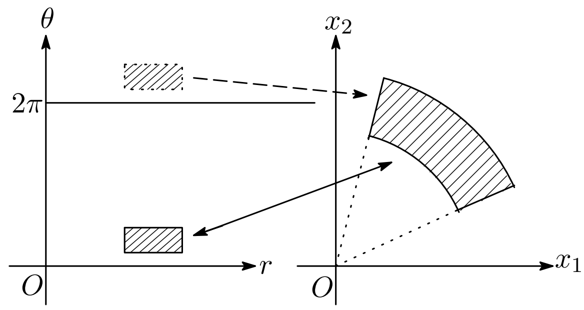
となる。 写像の話はこのくらいにしておこう。

いま，C^1 級[1]の関数 $\varphi_1(x_1, x_2), \varphi_2(x_1, x_2)$ があるとき，

$$y_1 = \varphi_1(x_1, x_2), \quad y_2 = \varphi_2(x_1, x_2) \quad : \quad \boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}) = (\varphi_1(\boldsymbol{x}), \varphi_2(\boldsymbol{x})) \tag{1.4}$$

によって α 平面上の座標 $\boldsymbol{x} = (x_1,\, x_2) \in D$ を β 平面上の座標 $\boldsymbol{y} = (y_1,\, y_2) \in E$ へ移すことを考えてみよう。点 (x_1, x_2) が領域 D 内を動くとき，点 (y_1, y_2) が領域 E 内を動くとするとき D が写像 (1.4) によって E に写されたという。この場合，D の点と E の点との対応は必ずしも 1 対 1 とはいえない。





例えば極座標 $(r,\, \theta)$ から直角座標 (x_1, x_2) への写像を考えてみよう。$x_1 = r\cos\theta$, $x_2 = r\sin\theta$ によって $0 < r < \infty$, $0 \leqq \theta < 2\pi$ の領域は直角座標 (x_1, x_2) の平面に 1 対 1 で写像される（ただし，原点は除く）。しかし θ の範囲を 2π 以上まで広げると三角関数は周期が 2π だからこれは 1 対 1 の写像とはならないね。

さて，C^1 級の関数を考え，点 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p}$ の近傍での写像 $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})$ の様子を見てみよう。$\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})$ を 1 次までテイラー展開してやると

$$\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}(\boldsymbol{p}) + \boldsymbol{y}_{x_1}(\boldsymbol{p})(x_1 - p_1) + \boldsymbol{y}_{x_2}(\boldsymbol{p})(x_2 - p_2) + o(\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}\|) \tag{1.5}$$

成分表記すれば

$$\begin{pmatrix} y_1(\boldsymbol{x}) \\ y_2(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(\boldsymbol{p}) \\ y_2(\boldsymbol{p}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dfrac{\partial y_1(\boldsymbol{p})}{\partial x_1}(x_1 - p_1) + \dfrac{\partial y_1(\boldsymbol{p})}{\partial x_2}(x_2 - p_2) \\ \dfrac{\partial y_2(\boldsymbol{p})}{\partial x_1}(x_1 - p_1) + \dfrac{\partial y_2(\boldsymbol{p})}{\partial x_2}(x_2 - p_2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} o(\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}\|) \\ o(\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}\|) \end{pmatrix} \tag{1.6}$$

[1] C^k 級：k 回の連続的微分が可能な関数。

ただし，$o(\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|)=\sqrt{(x_1-p_1)^2+(x_2-p_2)^2}$ で，$\displaystyle\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}}\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|\to 0$ を意味するランダウ記号だね。(1.6) を次のように書き換えてやろう。

$$\begin{pmatrix} y_1(\boldsymbol{x})-y_1(\boldsymbol{p}) \\ y_2(\boldsymbol{x})-y_2(\boldsymbol{p}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1-p_1 \\ x_2-p_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} o(\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|) \\ o(\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|) \end{pmatrix} \tag{1.7}$$

ベクトル表記すれば

$$\boldsymbol{Y} \simeq \boldsymbol{J}\boldsymbol{X} \tag{1.8}$$

と表わせる。ただし,

$$\boldsymbol{Y}=\begin{pmatrix} y_1(\boldsymbol{x})-y_1(\boldsymbol{p}) \\ y_2(\boldsymbol{x})-y_2(\boldsymbol{p}) \end{pmatrix},\ \boldsymbol{J}=\begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{p}},\ \boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} x_1-p_1 \\ x_2-p_2 \end{pmatrix} \tag{1.9}$$

(1.8) は**線形変換**で近似できる，つまり，$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{p}$ 近傍での写像 $\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{y}$ は**線形写像**[2]とみなせるということだ。行列 $\boldsymbol{J}$ は $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}$ におけるヤコビ行列 (関数行列) と呼ばれ，その行列式を**ヤコビアン**という。ヤコビアンは，考案者 *Carl Gustav Jacob Jacobi* (1804.12.10 − 1851.2.18) の J をとって通常

$$\det\boldsymbol{J}=\frac{\partial(y_1,y_2)}{\partial(x_1,x_2)}=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_2} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial y_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} \tag{1.10}$$

と表される[3]。

さて，写像 $f:\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{y}$ のに加えてもう 1 つの写像 $g:\boldsymbol{y}\to\boldsymbol{z}$ を考えてみよう。

$$z_1=\psi_1(y_1,y_2),\quad z_2=\psi_2(y_1,y_2)\quad :\quad \boldsymbol{z}=(\psi_1(\boldsymbol{y}),\psi_2(\boldsymbol{y})) \tag{1.11}$$

$\boldsymbol{x}$ が動けば $\boldsymbol{y}$ を通じて $\boldsymbol{z}$ が動く，$\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{z}$ は合成写像 $g\circ f$ だね。合成写像のヤコビ行列は各ヤコビ行列の積で与えられる。

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial z_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial z_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial z_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial z_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial z_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial z_1}{\partial y_2} \\ \dfrac{\partial z_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial z_2}{\partial y_2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} \tag{1.12}$$

- コニー：そこのところをキチンと証明していただけるかしら。
- K氏：了解。$\boldsymbol{z}=(\psi_1(\boldsymbol{y}),\psi_2(\boldsymbol{y}))$, $\boldsymbol{y}=(\varphi_1(\boldsymbol{x}),\varphi_2(\boldsymbol{x}))$ として，合成関数の微分公式より

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial z_1}{\partial x_1}&=\frac{\partial z_1}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_1}+\frac{\partial z_1}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_1} \\ \frac{\partial z_1}{\partial x_2}&=\frac{\partial z_1}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_2}+\frac{\partial z_1}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_2} \end{aligned}\right\}$$
$$\text{まとめると}\longrightarrow\begin{pmatrix} \dfrac{\partial z_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial z_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial z_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial z_1}{\partial y_2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} \tag{1.13}$$

[2] 写像 $f:\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{y}$ が線形写像であるとは，任意の $a,b\in\boldsymbol{x}$，任意の実数 k に対し $f(a+b)=f(a)+f(b)$, $f(ka)=kf(a)$ が成り立つことをいう。

[3] 行と列を全部入れ替えても行列式の値は変わらないことを留意しておこう。

まったく同様にして

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial z_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial z_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial z_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial z_2}{\partial y_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} \tag{1.14}$$

(1.13) を行列の 1 行目，(1.14) を行列の 2 行目とする行列を考えると，それは (1.12) となるだろう。ヤコビアンは，したがって

$$\frac{\partial(z_1, z_2)}{\partial(x_1, x_2)} = \frac{\partial(z_1, z_2)}{\partial(y_1, y_2)} \frac{\partial(y_1, y_2)}{\partial(x_1, x_2)} \tag{1.15}$$

と書けるというわけだ。

- コニー：なるほど，わかったわ。

- K氏：さて，(1.4) による領域 D の E への写像が C^k 級とし，さらにこの対応が 1 対 1 とする。そして，逆に領域 E の D への写像 $x_1 = \psi(y_1, y_2)$, $x_2 = \psi(x_1, x_2)$ も C^k 級ならば，写像 (1.4) を C^k 級の**同相**という。この場合

$$f : \boldsymbol{x} \to \boldsymbol{y}, \quad g : \boldsymbol{y} \to \boldsymbol{x} \tag{1.16}$$

を考えると，(1.15) より

$$\frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(x_1, x_2)} = \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(y_1, y_2)} \frac{\partial(y_1, y_2)}{\partial(x_1, x_2)} = 1 \tag{1.17}$$

となるので，C^k 級の同相な対応においては常に

$$\frac{\partial(y_1, y_2)}{\partial(x_1, x_2)} \neq 0, \quad \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(y_1, y_2)} \neq 0 \tag{1.18}$$

が成り立つということになる。写像 $g : \boldsymbol{y} \to \boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{y}$ の逆写像 f^{-1}，つまり逆関数だね。逆関数のヤコビ行列は元のヤコビ行列の逆行列 $\boldsymbol{J}^{-1}$ になる。同相対応であれば $\boldsymbol{J} \neq 0$ で，その逆行列が存在し

$$\det(\boldsymbol{J}\boldsymbol{J}^{-1}) = 1 \tag{1.19}$$

となるということだ。$\boldsymbol{J}^{-1}$ をあらわに書くと

$$\boldsymbol{J}^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial x_1}{\partial y_2} \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{pmatrix} \tag{1.20}$$

となる。(1.19) は**逆写像の定理**とか**逆関数の定理**といわれているね。

- コニー：ちょっとここで指を動かし，極座標から直角座標への写像と逆写像のヤコビアンを計算して (1.19) をチェックしてみるわね。それぞれのヤコビアンは

$$\frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial r} & \dfrac{\partial x_1}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial r} & \dfrac{\partial x_2}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r > 0$$

$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, $\theta = \tan^{-1} \dfrac{x_2}{x_1}$ なので

$$\frac{\partial(r, \theta)}{\partial(x_1, x_2)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial r}{\partial x_1} & \dfrac{\partial r}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial \theta}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \theta}{\partial x_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\dfrac{\sin\theta}{r} & \dfrac{\cos\theta}{r} \end{vmatrix}$$

次に最初のヤコビアンの逆行列を計算すると

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}^{-1} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix}^{-1} = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\dfrac{\sin\theta}{r} & \dfrac{\cos\theta}{r} \end{vmatrix} = \frac{\partial(r,\theta)}{\partial(x_1,x_2)}$$

$$\therefore\ \frac{\partial(x_1,x_2)}{\partial(r,\theta)}\frac{\partial(r,\theta)}{\partial(x_1,x_2)} = \frac{\partial(x_1,x_2)}{\partial(r,\theta)}\frac{\partial(x_1,x_2)}{\partial(r,\theta)}^{-1} = 1$$

となるわね。

1.3 曲面

- K氏：C^3 級の関数 $\varphi_1(u,v), \varphi_2(u,v), \varphi_3(u,v)$ があって，空間 β 内の点 $\boldsymbol{x}(x_1,x_2,x_3)$ が平面 α 上の点 (u,v) により

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(u,v) \to \begin{cases} x_1 = \varphi_1(u,v) \\ x_2 = \varphi_2(u,v) \\ x_3 = \varphi_3(u,v) \end{cases} \tag{1.21}$$

と表されるとしよう。いま，

1. 平面 α 上の領域 D と空間 β の点の**部分集合**S は 1 対 1 の連続的な対応をしている。
2. ヤコビ行列 $\boldsymbol{J}$ の階数が 2

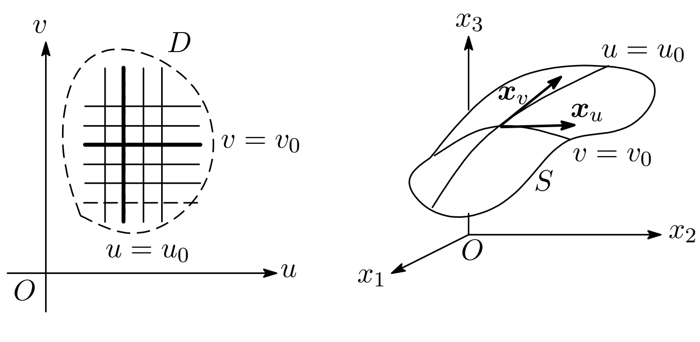
$$\texttt{rank}\,\boldsymbol{J} = \texttt{rank}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial u} & \dfrac{\partial x_2}{\partial u} & \dfrac{\partial x_3}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial v} & \dfrac{\partial x_2}{\partial v} & \dfrac{\partial x_3}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_u(u,v) \\ \boldsymbol{x}_v(u,v) \end{pmatrix} = 2 \tag{1.22}$$

が成り立つとき，S を**曲面片**とか**局所曲面**という[4]。曲面は曲面片の和集合によって記述されるんだ。以後，いちいち曲面片といわずに曲面というけど，常に曲面の各点の近傍の話をしているんだということは忘れないようにね。

ところで，ヤコビ行列の階数が 2 ということの意味を少し触れておこう。行列の階数は 1 次独立な行ベクトルの数だから，(1.22) の 2 つの行ベクトルは 1 次独立[5]ということ。この 2 つの行ベクトルは曲面 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(u,v)$ の u 曲線，v 曲線の接ベクトル $\boldsymbol{x}_u, \boldsymbol{x}_v$ だね。

$$\boldsymbol{x}_u = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u} = \left(\frac{\partial x_1}{\partial u}, \frac{\partial x_2}{\partial u}, \frac{\partial x_3}{\partial u}\right), \quad \boldsymbol{x}_v = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial v} = \left(\frac{\partial x_1}{\partial u}, \frac{\partial x_2}{\partial u}, \frac{\partial x_3}{\partial u}\right) \tag{1.23}$$

ちなみに，u 曲線というのは v を固定し，u を変数として得られる曲面上の曲線のことで，v 曲線も同様。そして (u,v) を**曲線座標**といったね。



[4] 曲面片，局所曲面は「パッチ」と呼ばれることもある。patch は継ぎ当てようの小さい布という意味。

[5] ヤコビ行列を $\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u} & \frac{\partial x_1}{\partial v} \\ \frac{\partial x_2}{\partial u} & \frac{\partial x_2}{\partial v} \\ \frac{\partial x_3}{\partial u} & \frac{\partial x_3}{\partial v} \end{pmatrix}$ で表せば 2 つの“ 列 ”ベクトルは互いに 1 次独立。

$\boldsymbol{x}_u$, $\boldsymbol{x}_v$ は1次独立だからそのベクトル積が0でないということと同値だ。

$$\boldsymbol{x}_u \times \boldsymbol{x}_v \neq 0 \tag{1.24}$$

曲面 S 上のある1点 P で $\boldsymbol{x}_u$ と $\boldsymbol{x}_v$ が1次独立であれば，曲面 S は点 P で**正則**であるといい，S 上の各点で正則であるとき，曲面 S を**正則曲面**といっている。

　ということで，半径 a の球面を例にして，いままでの話を具体的に確認していこう。パラメータ表示として

$$D\colon\{(\theta,\phi)|, 0<\theta \leqq \pi/2, 0 \leqq \phi \leqq 2\pi\} \qquad \begin{cases} x_1=\varphi_1(\theta,\phi)=a\sin\theta\cos\phi \\ x_2=\varphi_2(\theta,\phi)=a\sin\theta\sin\phi \\ x_3=\varphi_3(\theta,\phi)=a\cos\theta \end{cases} \tag{1.25}$$

まず，単射かどうかのチェック。これは領域 D 内の任意の2点を (θ,ϕ), (θ',ϕ') として，$\boldsymbol{x}(\theta,\phi)=\boldsymbol{x}(\theta',\phi')$ ならば $(\theta,\phi)=(\theta',\phi')$ となるかをチェックすればよい。$\boldsymbol{x}(\theta,\phi)=\boldsymbol{x}(\theta',\phi')$ とすると

$$\begin{cases} \sin\theta\cos\phi=\sin\theta'\cos\phi' \\ \sin\theta\sin\phi=\sin\theta'\sin\phi' \\ \cos\theta=\cos\theta' \end{cases}$$

3式目より

$$\cos\theta-\cos\theta'=-2\sin\frac{\theta+\theta'}{2}\sin\frac{\theta-\theta'}{2}=0, \quad \therefore\ \theta=\theta'$$

したがって $\sin\phi=\sin\phi'$, $\cos\phi=\cos\phi'$ より $\phi=\phi'$ となるので単射の確認はできた。次にヤコビ行列 $\boldsymbol{J}$ は

$$\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial\theta} & \dfrac{\partial x_2}{\partial\theta} & \dfrac{\partial x_3}{\partial\theta} \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial\phi} & \dfrac{\partial x_2}{\partial\phi} & \dfrac{\partial x_3}{\partial\phi} \end{pmatrix}=a\begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi & \cos\theta\sin\phi & -\sin\theta \\ -\sin\theta\sin\phi & \cos\phi\sin\theta & 0 \end{pmatrix}, \quad \texttt{rank}\,\boldsymbol{J}=2$$

したがって，$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u,v)$ は曲面片を定めるということになるね。

- コニー：領域Dに$\theta=0$（北極点）を含めないのは，半球面の北極点を除いていることになるわね。北極点では

$$\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \texttt{rank}\,\boldsymbol{J}=1 \tag{1.26}$$

となり，2つの接ベクトルは1次独立でなくなる。。。

- K氏：そうなんだ，実は (1.25) のパラメータ表示では，北極点，南極点でそのような不具合がでてしまうので除いていたんだ。$\texttt{rank}\,\boldsymbol{J}<2$ となる点はパラメータ表示の**特異点**といわれるけど，この点では $\boldsymbol{x}_u, \boldsymbol{x}_v$ は1次独立性は消えるので，曲面の接平面を表わすことはできない。北極点における接平面は当然あるんだけど，(1.25) のパラメータ表示ではそれを表わすことができないというわけだね。それでは別のパラメータ表示ではどうか？　次のパラメータ表示をとってみよう。

$$D\colon\{(u,v)|u^2+v^2<a^2\} \quad \boldsymbol{x}(u,v)=(u,v,\sqrt{a^2-u^2-v^2}) \tag{1.27}$$

これが単射であることはすぐ分かる。ヤコビ行列と階数は

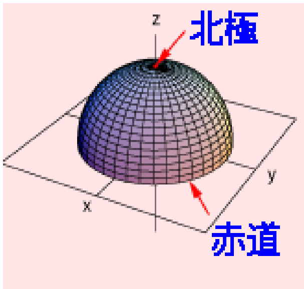
$$\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial u} & \dfrac{\partial x_2}{\partial u} & \dfrac{\partial x_3}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial v} & \dfrac{\partial x_2}{\partial v} & \dfrac{\partial x_3}{\partial v} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\dfrac{u}{\sqrt{a^2-u^2-v^2}} \\ 0 & 1 & -\dfrac{u}{\sqrt{a^2-u^2-v^2}} \end{pmatrix}, \texttt{rank}\,\boldsymbol{J}=2$$

となるので，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(u, v)$ は曲面片を定めることは分かった。また，北極点 $u = v = 0$ でのヤコビ行列の階数は

$$\texttt{rank}\, \boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

となって，特異点は表れない。めでたしめでたしといいたいところだけど，赤道 $(x_3 = 0)$ は記述できていないんだね。赤道上では偏微分 $\frac{\partial x_3}{\partial u}$ 等が ∞ となってしまうので，これまたそこに不具合を持つ。

- コニー：う〜ん。。。(1.25) のパラメータ表示では北極に特異点がでたし，(1.27) のパラメータ表示では半球面の赤道線 $(z_3 = 0)$ のところは記述されないわけね。



- K氏：この例からその一端が分かるように，一般的には曲面はいくつかのパラメータ表示を組み合わせてはじめて表現されるということだね。

- コニー：一筋縄ではいかないのね。

1.4 第 1 基本形式について

- K氏：え〜っと，ちょっと話題を変えて，第 1 基本形式の話をしよう。これは曲面 S の接ベクトルの内積だったね[6]。少し復習すると，曲面 S 上の点 $P(u, v)$ における任意の接ベクトルを $\boldsymbol{X}$ とすると，$\boldsymbol{X}$ は $\boldsymbol{x}_u, \boldsymbol{x}_v$ が張る接平面内にあるので ξ, η を任意の実数として

$$\boldsymbol{X} = \xi \boldsymbol{x}_u + \eta \boldsymbol{x}_v \tag{1.28}$$

と表せる。曲面上の 1 点 $P(u, v)$ を始点とし，それに近い点 $Q(u + du, v + dv)$ を終点とするベクトル $d\boldsymbol{x}(u, v)$ を考えると

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{x}(u, v) &= \boldsymbol{x}(u + du, v + dv) - \boldsymbol{x}(u, v) \\ &= \boldsymbol{x}_u du + \boldsymbol{x}_v dv + o(\sqrt{(du)^2 + (dv)^2}) \end{aligned} \tag{1.29}$$

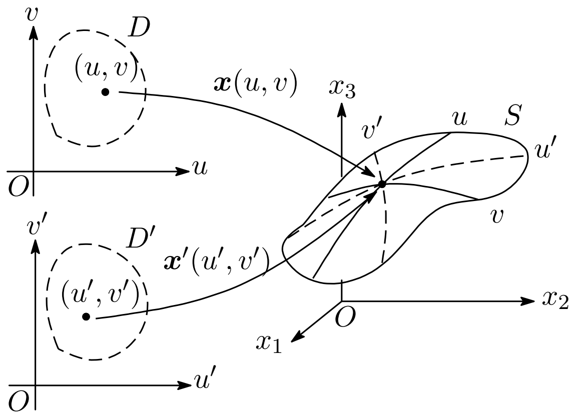
で，これは (1.28) より点 $P(u, v)$ における接ベクトルだ。2 点間 PQ の曲線の微小長さ (線素) を ds とすると，ds の 2 乗は $d\boldsymbol{x}$ の内積で近似でき，その値を I として

$$\begin{aligned} I = (ds)^2 = d\boldsymbol{x} \cdot d\boldsymbol{x} &= (\boldsymbol{x}_u \cdot \boldsymbol{x}_u) du du + 2(\boldsymbol{x}_u \cdot \boldsymbol{x}_v) du dv + (\boldsymbol{x}_v \cdot \boldsymbol{x}_v)(dv)^2 \\ &= E(du)^2 + 2F du dv + G(dv)^2 = \begin{pmatrix} du & dv \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{1.30}$$

と表したのが**第 1 基本形式**，E, F, G を**第 1 基本量**と呼んだね。第 1 基本形式は曲面上の曲線の長さに関係する量なので，この値は曲線座標の選び方には無関係だ。このことをチェッ

[6] 『曲線と曲面』§ 2.3 参照。

クしてみよう。曲面 S が 2 つの曲線座標 $(u,v),(u',v')$ で表されるとする。



結論から言えば

$$E(du)^2+2Fdudv+G(dv)^2=E'(du')^2+2F'du'dv'+G'(dv)^2 \tag{1.31}$$

が成立すればいいわけだね。曲線座標 u,v は別の曲線座標 u',v' の関数となるので $u=u(u',v'),v=v(u',v')$。曲面上のある一点は，u,v 座標系からは $\boldsymbol{x}(u,v)$，u',v' 座標系からは $\boldsymbol{x}'(u',v')$ で表される。いま $\boldsymbol{x}'(u',v')=\boldsymbol{x}(u(u',v'),v(u',v'))$ とすると

$$\begin{aligned}d\boldsymbol{x}'&=\boldsymbol{x}'_{u'}du'+\boldsymbol{x}'_{v'}dv'=\left(\boldsymbol{x}_u\frac{\partial u}{\partial u'}+\boldsymbol{x}_v\frac{\partial v}{\partial u'}\right)du'+\left(\boldsymbol{x}_u\frac{\partial u}{\partial v'}+\boldsymbol{x}_v\frac{\partial v}{\partial v'}\right)dv'\\&=\boldsymbol{x}_u\left(\frac{\partial u}{\partial u'}du'+\frac{\partial u}{\partial v'}dv'\right)+\boldsymbol{x}_v\left(\frac{\partial v}{\partial u'}du'+\frac{\partial v}{\partial v'}dv'\right)\end{aligned} \tag{1.32}$$

また，

$$du=\frac{\partial u}{\partial u'}du'+\frac{\partial u}{\partial v'}dv',\quad dv=\frac{\partial v}{\partial u'}du'+\frac{\partial v}{\partial v'}dv' \tag{1.33}$$

なので，これを (1.32) に入れると

$$\begin{aligned}d\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{x}'_{u'}du'+\boldsymbol{x}'_{v'}dv'=\boldsymbol{x}_u du+\boldsymbol{x}_v dv=d\boldsymbol{x}\\ \therefore\ d\boldsymbol{x}'\cdot d\boldsymbol{x}'=d\boldsymbol{x}\cdot d\boldsymbol{x}\end{aligned} \tag{1.34}$$

つまり，

$$E(du)^2+2Fdudv+G(dv)^2=E'(du')^2+2F'du'dv'+G'(dv)^2 \tag{1.35}$$

が成り立ち，第 1 基本形式は曲線座標のとり方によらないということが証明できた。

- コニー：なるほど，第 1 基本形式は座標変換に不変ということね。ところで第 1 基本量の E',F',G' はそれぞれ $E'=\boldsymbol{x}'_{u'}\cdot\boldsymbol{x}'_{u'},F'=\boldsymbol{x}'_{u'}\cdot\boldsymbol{x}'_{v'},G'=\boldsymbol{x}'_{v'}\cdot\boldsymbol{x}'_{v'}$ だわね。これと E,F,G の関係はどのようになるのかしら。

- K氏：そうだね，それをこれから言おうとしていたのだけど，(1.33) より

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix}du\\dv\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial u'}&\dfrac{\partial u}{\partial v'}\\\dfrac{\partial v}{\partial u'}&\dfrac{\partial v}{\partial v'}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}du'\\dv'\end{pmatrix}=\boldsymbol{J}\begin{pmatrix}du'\\dv'\end{pmatrix}\\ \therefore\quad&\begin{pmatrix}du'\\dv'\end{pmatrix}=\boldsymbol{J}^{-1}\begin{pmatrix}du\\dv\end{pmatrix},\quad \text{これから}\quad \begin{pmatrix}du'&dv'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}du&dv\end{pmatrix}(\boldsymbol{J}^t)^{-1}\end{aligned} \tag{1.36}$$

$\boldsymbol{J}^t$ は $\boldsymbol{J}$ の転置行列。(1.32) より

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}'_{u'} \\ \boldsymbol{x}'_{v'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial u'} & \dfrac{\partial v}{\partial u'} \\ \dfrac{\partial u}{\partial v'} & \dfrac{\partial v}{\partial v'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_u \\ \boldsymbol{x}_v \end{pmatrix} = \boldsymbol{J}^t \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_u \\ \boldsymbol{x}_v \end{pmatrix} \tag{1.37}$$

この転置を取ると

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}'_{u'} & \boldsymbol{x}'_{v'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_u & \boldsymbol{x}_v \end{pmatrix} \boldsymbol{J} \tag{1.38}$$

E', F', G' は (1.37)(1.38) より

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} E' & F' \\ F' & E' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}'_{u'} \\ \boldsymbol{x}'_{v'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}'_{u'} & \boldsymbol{x}'_{v'} \end{pmatrix} = \boldsymbol{J}^t \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_u \\ \boldsymbol{x}_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_u & \boldsymbol{x}_v \end{pmatrix} \boldsymbol{J} \\ &= \boldsymbol{J}^t \begin{pmatrix} E & F \\ F & E \end{pmatrix} \boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial u'} & \dfrac{\partial v}{\partial u'} \\ \dfrac{\partial u}{\partial v'} & \dfrac{\partial v}{\partial v'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial u'} & \dfrac{\partial u}{\partial v'} \\ \dfrac{\partial v}{\partial u'} & \dfrac{\partial v}{\partial v'} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{1.39}$$

となるので，E', F', G' と E, F, G の関係式は右辺の積を展開して

$$\begin{cases} E' = E\left(\dfrac{\partial u}{\partial u'}\right)^2 + 2\left(\dfrac{\partial u}{\partial u'}\right)\left(\dfrac{\partial v}{\partial u'}\right) + G\left(\dfrac{\partial v}{\partial u'}\right)^2 \\ F' = E\left(\dfrac{\partial u}{\partial u'}\right)\left(\dfrac{\partial u}{\partial v'}\right) + F\left\{\left(\dfrac{\partial u}{\partial u'}\right)\left(\dfrac{\partial u}{\partial v'}\right) + \left(\dfrac{\partial u}{\partial v'}\right)\left(\dfrac{\partial v}{\partial u'}\right)\right\} + G\left(\dfrac{\partial v}{\partial u'}\right)\left(\dfrac{\partial v}{\partial v'}\right) \\ G' = E\left(\dfrac{\partial u}{\partial v'}\right)^2 + 2F\left(\dfrac{\partial u}{\partial v'}\right)\left(\dfrac{\partial v}{\partial v'}\right) + G\left(\dfrac{\partial v}{\partial v'}\right)^2 \end{cases} \tag{1.40}$$

が得られる。今まで得られた関係式を使って u', v' 座標系での第 1 基本形式を計算すると

$$\begin{aligned} &E'(du')^2 + 2F'du'dv' + G'(dv')^2 \\ &= \begin{pmatrix} du' & dv' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E' & F' \\ F' & G' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du' \\ dv' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} du' & dv' \end{pmatrix} \boldsymbol{J}^t \begin{pmatrix} E & F \\ F & E \end{pmatrix} \boldsymbol{J} \begin{pmatrix} du' \\ dv' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} du & dv \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = E(du)^2 + 2Fdudv + G(dv)^2 \end{aligned} \tag{1.41}$$

となって，u, v 座標系での第 1 基本形式と一致する。

エ〜っと，(u', v') 座標系での接ベクトル $\boldsymbol{x}'_{u'}, \boldsymbol{x}'_{v'}$ は，(1.34) より $\boldsymbol{x}_u, \boldsymbol{x}_v$ で張られる接平面内にあるね。つまり，$\boldsymbol{x}'_{u'}, \boldsymbol{x}'_{v'}$ で張られる接平面と $\boldsymbol{x}_u, \boldsymbol{x}_v$ で張られる接平面は同じ平面ということで，接平面は局所座標系のとり方によらずに定まるということだね。しかし，曲面の向きに関しては局所座標系に依存するんだ。次にこの話を少し触れておこう。

1.5 曲面の向きについて

- K氏：曲面の向きを接平面に垂直な法単位ベクトルの向きで決めよう。法単位ベクトルを求めるためにまず接ベクトルのベクトル積を計算しておく。

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{x}'_{u'} &= \tfrac{\partial u}{\partial u'}\boldsymbol{x}_u + \tfrac{\partial v}{\partial u'}\boldsymbol{x}_v \\ \boldsymbol{x}'_{v'} &= \frac{\partial u}{\partial v'}\boldsymbol{x}_u + \frac{\partial v}{\partial v'}\boldsymbol{x}_v \end{aligned}\right\} \to \boldsymbol{x}'_{u'} \times \boldsymbol{x}'_{v'} = \left(\frac{\partial u}{\partial u'}\frac{\partial v}{\partial v'} - \frac{\partial v}{\partial u'}\frac{\partial u}{\partial v'}\right)(\boldsymbol{x}_u \times \boldsymbol{x}_v)$$
$$= \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial u'} & \dfrac{\partial v}{\partial u'} \\ \dfrac{\partial u}{\partial v'} & \dfrac{\partial v}{\partial v'} \end{vmatrix} (\boldsymbol{x}_u \times \boldsymbol{x}_v) = \frac{\partial(u, v)}{\partial(u', v')}(\boldsymbol{x}_u \times \boldsymbol{x}_v) \tag{1.42}$$

これから法単位ベクトル $\boldsymbol{e}'$，$\boldsymbol{e}$ の関係式として

$$\boldsymbol{e}' = \frac{\boldsymbol{x}'_{u'} \times \boldsymbol{x}'_{v'}}{|\boldsymbol{x}'_{u'} \times \boldsymbol{x}'_{v'}|} = \frac{1}{|\boldsymbol{x}'_{u'} \times \boldsymbol{x}'_{v'}|}\frac{\partial(u,v)}{\partial(u',v')}\boldsymbol{x}_u \times \boldsymbol{x}_v = \frac{\partial(u,v)}{\partial(u',v')}\frac{|\boldsymbol{x}_u \times \boldsymbol{x}_v|}{|\boldsymbol{x}'_{u'} \times \boldsymbol{x}'_{v'}|}\boldsymbol{e} \tag{1.43}$$

が得られる。ヤコビアン $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(u',v')} > 0$ ならば $\boldsymbol{e}$ と $\boldsymbol{e}'$ は同じ向きになるが，$\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(u',v')} < 0$ なら逆向きとなるわけだね。

- コニー：曲面の法単位ベクトルがパラメータ表示のとり方によって外向きになったり内向きになったりするのは妙なことね。曲面上の同じ点なら法単位ベクトルは外向きか内向きかの 1 つのはずよ。

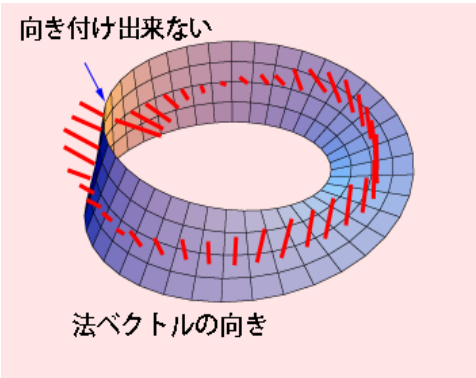
- K氏:そうなんだ。仮に外向きだとすると，$\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(u',v')} < 0$ となるパラメータ表示では u' と v' を入れ替えてやればいいわけで，そうするとヤコビアンは正となるよね。いま，曲面が例えば 4 つのパラメータ表示で表わされるとし，それぞれ $\boldsymbol{x}_1(u_1,v_1), \boldsymbol{x}_2(u_2,v_2), \boldsymbol{x}_3(u_3,v_3), \boldsymbol{x}(u_4,v_4)$ としよう。$\boldsymbol{x}_1$ と $\boldsymbol{x}_2$ の重なった部分，つまり曲面上の同じ点を示す部分でそれぞれのパラメータ表示による法単位ベクトルの向きを調べるわけだね。逆向きになればパラメータを入れ替えて向きを同じにしてやる。この作業を $\boldsymbol{x}_2$ と $\boldsymbol{x}_3$，$\boldsymbol{x}_3$ と $\boldsymbol{x}_4$ で繰り返し，最後に $\boldsymbol{x}_4$ と $\boldsymbol{x}_1$ の重なり合った部分で同じ向きにすることができたら，曲面を覆う局所座標系で矛盾無く同じ向きの法単位ベクトルが決まることになる。このような曲面を**向きつけ可能な曲面**というんだけど，世の中，どのように頑張っても最後の $\boldsymbol{x}_4$ と $\boldsymbol{x}_1$ で向きを同じにすることができない曲面もあるんだね。それを**向きつけ不可能な曲面**と呼んでいるんだ。

- コニー：頭が混乱しそうだわ。なにか具体的な例を挙げていただけるかしら。

- K氏：うん，メビウスの帯という曲面が向きつけ不可能な曲面の代表的な例だね。

- コニー：アッ！あの不思議な表裏のない曲面ね。

- K氏：そうなんだ。詳しい話は省略するけど，図を載せておくからよく見て考えて頂戴。



1.6　ガウスの方程式

- K氏：『続・曲線と曲面』の**正規直交標構**を使い，§3.3.1「**構造方程式**」のところで**ガウスの方程式**（第 2 構造方程式）を導出した。詳細はそこを読み返してもらうとして，この方程式は微分形式を使って非常にあっさりした形に書けたね。そして「例.19」で半径 a の球のガウス曲率を求めた。また，同じレポートの§3.4.1「**クリストッフェルの記号**」のとこ

ろでは，クリストッフェル記号を使ったガウスの方程式を紹介した。ここではクリストッフェル記号を使ったガウスの方程式より半径 a の球のガウス曲率を求めてみよう。当然答えは同じ結果になるけど。
ガウスの方程式は

$$\begin{cases} \boldsymbol{p}_{uu} = \Gamma^u_{uu}\boldsymbol{p}_u + \Gamma^v_{uu}\boldsymbol{p}_v + L\boldsymbol{e} \\ \boldsymbol{p}_{uv} = \Gamma^u_{uv}\boldsymbol{p}_u + \Gamma^v_{uv}\boldsymbol{p}_v + M\boldsymbol{e} \\ \boldsymbol{p}_{vu} = \Gamma^u_{vu}\boldsymbol{p}_u + \Gamma^v_{vu}\boldsymbol{p}_v + M\boldsymbol{e} \\ \boldsymbol{p}_{vv} = \Gamma^u_{vv}\boldsymbol{p}_u + \Gamma^v_{vv}\boldsymbol{p}_v + N\boldsymbol{e} \end{cases} \tag{1.44}$$

8 個の関数 $\Gamma^u_{uu}, \cdots, \Gamma^v_{vv}$ を**クリストッフェルの記号**といい，

$$\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} = \begin{Bmatrix} \gamma \\ \alpha\beta \end{Bmatrix} \tag{1.45}$$

とも書かれ，この記号を使うとガウスの方程式は次のように簡潔に表わすことができる。

$$\frac{\partial \boldsymbol{p}_\alpha}{\partial u_\beta} = \sum_\gamma \begin{Bmatrix} \gamma \\ \alpha\beta \end{Bmatrix} \boldsymbol{p}_\gamma + h_{\alpha\beta}\boldsymbol{e} \tag{1.46}$$

8 個の関数 $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}(u,v)$ は $\boldsymbol{p}_{uv} = \boldsymbol{p}_{vu}$ なので

$$\Gamma^u_{uv} = \Gamma^u_{vu}, \quad \Gamma^v_{uv} = \Gamma^v_{vu} \tag{1.47}$$

つまり，クリストッフェルの記号は実質的には 6 個の関数からなるということで，ここまではいままでの復習だった。
(1.44) の第 1 式を v で，第 2 式を u で偏微分し，$(\boldsymbol{p}_{uu})_v = (\boldsymbol{p}_{uv})_u$ という関係を使うと

$$\begin{aligned} &(\Gamma^u_{uu})_v\boldsymbol{p}_u + \Gamma^u_{uu}\boldsymbol{p}_{uv} + (\Gamma^v_{uu})_v\boldsymbol{p}_v + \Gamma^v_{uu}\boldsymbol{p}_{vv} + L_v\boldsymbol{e} + L\boldsymbol{e}_v \\ &= (\Gamma^u_{uv})_u\boldsymbol{p}_u + \Gamma^u_{uv}\boldsymbol{p}_{uu} + (\Gamma^v_{uv})_u\boldsymbol{p}_v + \Gamma^v_{uv}\boldsymbol{p}_{vu} + M_u\boldsymbol{e} + M\boldsymbol{e}_u \end{aligned} \tag{1.48}$$

また，

$$\begin{aligned} \Gamma^u_{uu}\boldsymbol{p}_{uv} &= \Gamma^u_{uu}(\Gamma^u_{uv}\boldsymbol{p}_u + \Gamma^v_{uv}\boldsymbol{p}_v + M\boldsymbol{e}) \\ \Gamma^v_{uu}\boldsymbol{p}_{vv} &= \Gamma^v_{uu}(\Gamma^u_{vv}\boldsymbol{p}_u + \Gamma^v_{vv}\boldsymbol{p}_v + N\boldsymbol{e}) \\ \Gamma^u_{uv}\boldsymbol{p}_{uu} &= \Gamma^u_{uv}(\Gamma^u_{uu}\boldsymbol{p}_u + \Gamma^v_{uu}\boldsymbol{p}_v + L\boldsymbol{e}) \\ \Gamma^v_{uv}\boldsymbol{p}_{vu} &= \Gamma^v_{uv}(\Gamma^u_{vu}\boldsymbol{p}_u + \Gamma^v_{vu}\boldsymbol{p}_v + M\boldsymbol{e}) \end{aligned} \tag{1.49}$$

少しごたごたするけど，これを (1.48) に入れて整理すると

$$\begin{aligned} \text{右辺：}&\left\{(\Gamma^u_{uu})_v + \Gamma^u_{uu}\Gamma^u_{uv} + \Gamma^u_{vv}\Gamma^v_{uu}\right\}\boldsymbol{p}_u + \left\{(\Gamma^v_{uu})_v + \Gamma^u_{uu}\Gamma^v_{uv} + \Gamma^v_{uu}\Gamma^v_{vv}\right\}\boldsymbol{p}_v \\ &+ L\boldsymbol{e}_v + (\Gamma^u_{uu}M + \Gamma^v_{uu}N + L_v)\boldsymbol{e} \\ &= \left\{(\Gamma^u_{uu})_v + \Gamma^u_{uu}\Gamma^u_{uv} + \Gamma^u_{vv}\Gamma^v_{uu} + \gamma L\right\}\boldsymbol{p}_u + \left\{(\Gamma^v_{uu})_v + \Gamma^u_{uu}\Gamma^v_{uv} + \Gamma^v_{uu}\Gamma^v_{vv} + \delta L\right\}\boldsymbol{p}_v \\ &+ (\Gamma^u_{uu}M + \Gamma^v_{uu}N + L_v)\boldsymbol{e} \\ \\ \text{左辺：}&\left\{(\Gamma^u_{uv})_u + \Gamma^u_{uu}\Gamma^u_{uv} + \Gamma^u_{uv}\Gamma^v_{uv}\right\}\boldsymbol{p}_u + \left\{(\Gamma^v_{uv})_u + \Gamma^u_{uv}\Gamma^v_{uu} + \Gamma^v_{uv}\Gamma^v_{uv}\right\}\boldsymbol{p}_v \\ &+ M\boldsymbol{e}_u + (\Gamma^u_{uv}L + \Gamma^v_{uv}M + M_u)\boldsymbol{e} \\ &= \left\{(\Gamma^u_{uv})_u + \Gamma^u_{uu}\Gamma^u_{uv} + \Gamma^u_{uv}\Gamma^v_{uv} + \alpha M\right\}\boldsymbol{p}_u + \left\{(\Gamma^v_{uv})_u + \Gamma^u_{uv}\Gamma^v_{uu} + \Gamma^v_{uv}\Gamma^v_{uv} + \beta M\right\}\boldsymbol{p}_v \\ &+ (\Gamma^u_{uv}L + \Gamma^v_{uv}M + M_u)\boldsymbol{e} \end{aligned} \tag{1.50}$$

上の式で $\boldsymbol{e}_v, \boldsymbol{e}_u$ は (3.104) のワインガルデンの式を使った。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_u &= \frac{FM-GL}{EG-F^2}\boldsymbol{p}_u + \frac{FL-EM}{EG-F^2}\boldsymbol{p}_v = \alpha\boldsymbol{p}_u + \beta\boldsymbol{p}_v \\ \boldsymbol{e}_v &= \frac{FN-GM}{EG-F^2}\boldsymbol{p}_u + \frac{FM-EN}{EG-F^2}\boldsymbol{p}_v = \gamma\boldsymbol{p}_u + \delta\boldsymbol{p}_v \end{aligned} \tag{1.51}$$

$\boldsymbol{p}_u, \boldsymbol{p}_v, \boldsymbol{e}$ は 1 次独立なので，(1.48) が成り立つには右辺と左辺のそれぞれの係数が等しくなければならない。

$$\begin{aligned}
&(\Gamma^u_{uu})_v + \Gamma^u_{uu}\Gamma^u_{uv} + \Gamma^u_{vv}\Gamma^v_{uu} + \gamma L = (\Gamma^u_{uv})_u + \Gamma^u_{uu}\Gamma^u_{uv} + \Gamma^u_{uv}\Gamma^v_{uv} + \alpha M \\
&(\Gamma^v_{uu})_v + \Gamma^u_{uu}\Gamma^v_{uv} + \Gamma^v_{uu}\Gamma^v_{vv} + \delta L = (\Gamma^v_{uv})_u + \Gamma^u_{uv}\Gamma^v_{uu} + \Gamma^v_{uv}\Gamma^v_{uv} + \beta M \\
&\Gamma^u_{uu} M + \Gamma^v_{uu} N + L_v = \Gamma^u_{uv} L + \Gamma^v_{uv} M + M_u
\end{aligned} \tag{1.52}$$

(1.52) の第 2 式より求めるガウス曲率 K は

$$\begin{aligned}
&(\Gamma^v_{uu})_v - (\Gamma^v_{uv})_u + \Gamma^u_{uu}\Gamma^v_{uv} + \Gamma^v_{uu}\Gamma^v_{vv} - \Gamma^u_{uv}\Gamma^v_{uu} - \Gamma^v_{uv}\Gamma^v_{uv} = \beta M - \delta L \\
&= E\frac{LN - M^2}{EG - F^2} = EK \\
&\therefore\ K = \frac{1}{E}\left\{(\Gamma^v_{uu})_v - (\Gamma^v_{uv})_u + \Gamma^u_{uu}\Gamma^v_{uv} + \Gamma^v_{uu}\Gamma^v_{vv} - \Gamma^u_{uv}\Gamma^v_{uu} - \Gamma^v_{uv}\Gamma^v_{uv}\right\}
\end{aligned} \tag{1.53}$$

$\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}$ は第 1 基本量とその偏微分だけから成り立っているので，上の式よりガウス曲率は第 1 基本量だけで決まる[7]ということだね。

- コニー：(1.52) の第 1 式を整理すると。。。

$$\begin{aligned}
&(\Gamma^u_{uv})_u - (\Gamma^u_{uu})_v + \Gamma^u_{uu}\Gamma^u_{uv} + \Gamma^u_{uv}\Gamma^v_{uv} - \Gamma^u_{uu}\Gamma^u_{uv} - \Gamma^u_{vv}\Gamma^v_{uu} = \gamma L - \alpha M \\
&= FK
\end{aligned} \tag{1.54}$$

となって，これからもガウス曲率が計算できるわね。ところで第 3 式からは何がでるのかしら？

- K 氏：整理すると

$$L_v - M_u = \Gamma^u_{uv} L + (\Gamma^v_{uv} - \Gamma^u_{uu}) M - \Gamma^v_{uu} N \tag{1.55}$$

が得られるけど，これは**コダッチの方程式**の第 1 式といわれるね。ちなみに第 2 式は

$$M_v - N_u = \Gamma^u_{vv} L + (\Gamma^v_{vv} - \Gamma^u_{uv}) M - \Gamma^v_{uv} N \tag{1.56}$$

で，この式は $(\boldsymbol{p}_{vv})_u = (\boldsymbol{p}_{vu})_v$ という関係式を使って，いまやってきた計算と同じことをやればでてくるね。
さて，(1.53) を使って半径 a の球面のガウス曲率を求めてみよう。

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{p} = (a\cos u\cos v, a\cos u\sin v, a\sin u) \\
&\Gamma^u_{uu} = 0,\ \Gamma^v_{uu} = 0,\ \Gamma^u_{uv} = 0,\ \Gamma^u_{uv} = \frac{\sin u}{\cos u},\ \Gamma^u_{vv} = \cos u\sin u,\ \Gamma^v_{vv} = 0
\end{aligned} \tag{1.57}$$

これを (1.53) にいれると $K = \frac{1}{a^2}$ が得られる。正規直交標構を使ったガウスの方程式から得られる値と同じだね。

冬の夕暮れは早いね，もう外は暗くなってきたよ。もうそろそろ切り上げようか。少し疲れてきた。。。

- コニー：そうね，きょうはいろいろありがとう。また「続・余談」という機会があるかもしれないわね。

- K 氏：そうだね。それじゃ元気でね〜。

[7] ガウスの驚異の定理といわれる。何が驚異か，それは曲面の曲率が第 1 基本量だけで与えられるということか。

1. 2012.1.7 「ガウスの方程式」の項を追加

−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−

GOOD LUCK！
SEE YOU AGAIN！

2012.1.07
by KENZOU
（了）