続・曲線と曲面

KENZOU

*2011*年 *12*月 *03*日

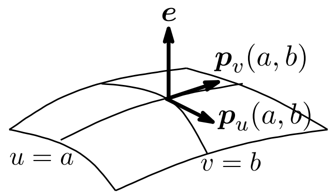
前回の続きで，微分形式を使った曲面論の話を展開します。

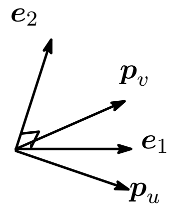
目 次

3　曲面の構造

3.1　正規直交標構を使う方法

曲面 $\boldsymbol{p}$ に対し，各点でベクトル $\boldsymbol{p}_u$, $\boldsymbol{p}_v$, $\boldsymbol{e}$ を使う代わりに，曲面上の各点で互いに直交する単位基底ベクトル（正規直交標構）を使った場合の第 1 基本形式，第 2 基本形式の話をしていきます。





3.1.1　第 1 基本形式

曲面上の各点における接平面内のベクトル $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ を

$$\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_2 = 1, \quad \boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2 = 0 \tag{3.1}$$

となるように選び，$\boldsymbol{e}_3$ を $\boldsymbol{e}_1$ と $\boldsymbol{e}_2$ のベクトル積で定義します。

$$\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2 \tag{3.2}$$

そうすると $\boldsymbol{p}_u$, $\boldsymbol{p}_v$ は $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ の 1 次結合で表されるので

$$\begin{cases} \boldsymbol{p}_u = a_1^1 \boldsymbol{e}_1 + a_1^2 \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{p}_v = a_2^1 \boldsymbol{e}_1 + a_2^2 \boldsymbol{e}_2 \end{cases} \longrightarrow (\boldsymbol{p}_u, \boldsymbol{p}_v) = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{A}, \quad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

と表せます。$\boldsymbol{A}$ は変換行列で，$\det \boldsymbol{A} \neq 0$，正則行列[1]。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p}_u \times \boldsymbol{p}_v &= (a_1^1 \boldsymbol{e}_1 + a_1^2 \boldsymbol{e}_2) \times (a_2^1 \boldsymbol{e}_1 + a_2^2 \boldsymbol{e}_2) = a_1^1 a_2^2 \boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2 + a_1^2 a_2^1 \boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_1 \\ &= (a_1^1 a_2^2 - a_1^2 a_2^1)\boldsymbol{e}_3 = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{vmatrix} \boldsymbol{e}_3 = (\det A)\boldsymbol{e}_3 \end{aligned} \tag{3.4}$$

なので，法単位ベクトルは (2.18) より

$$\boldsymbol{e} = \frac{\boldsymbol{p}_u \times \boldsymbol{p}_v}{|\boldsymbol{p}_u \times \boldsymbol{p}_v|} = \boldsymbol{e}_3 \tag{3.5}$$

また,

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{p} &= \boldsymbol{p}_u du + \boldsymbol{p}_v dv = (a_1^1 du + a_2^1 dv)\boldsymbol{e}_1 + (a_1^2 du + a_2^2 dv)\boldsymbol{e}_2 \\ &= \theta^1 \boldsymbol{e}_1 + \theta^2 \boldsymbol{e}_2 \end{aligned} \tag{3.6}$$

ただし,

$$\begin{cases} \theta^1 = a_1^1 du + a_2^1 dv \\ \theta^2 = a_1^2 du + a_2^2 dv \end{cases} \longrightarrow \begin{pmatrix} \theta^1 \\ \theta^2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{A} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

これから**第 1 基本形式**は，(2.14) より

$$I = d\boldsymbol{p} \cdot d\boldsymbol{p} = (ds)^2 = \theta^1 \theta^1 + \theta^2 \theta^2 \tag{3.8}$$

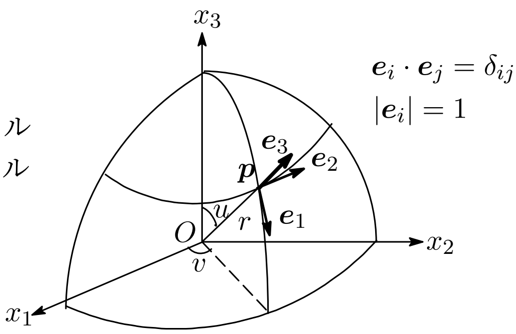
と書けます。これは $d\boldsymbol{p}$ は (3.6) で正規直交系で書かれているので，$(d\boldsymbol{p})^2$ はピタゴラスの定理が成り立つわけです。

具体的な例として半径 r の球面 $\boldsymbol{p}(u, v)$ を取り上げてみます。

[1] 逆行列 $\boldsymbol{A}^{-1}$ が存在する。

$$\boldsymbol{p}(u,v)=(r\sin u\cos v, r\sin u\sin v, r\cos u)$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{p}_u = r(\cos u\cos v, \cos u\sin v, -\sin u) & : \ u \text{ 方向の接ベクトル} \\ \boldsymbol{p}_v = r\sin u(-\sin v, \cos v, 0) & : \ v \text{ 方向の接ベクトル} \end{cases} \tag{3.9}$$



正規直交標構を

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_1 &= \frac{1}{r}\boldsymbol{p}_u = (\cos u\cos v, \cos u\sin v, -\sin u) \\ \boldsymbol{e}_2 &= \frac{1}{r\sin u}\boldsymbol{p}_v = (-\sin v, \cos v, 0) \end{aligned} \tag{3.10}$$

とると

$$d\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_u du + \boldsymbol{p}_v dv = (r du)\boldsymbol{e}_1 + (r\sin u dv)\boldsymbol{e}_2 = \theta^1\boldsymbol{e}_1 + \theta^2\boldsymbol{e}_2 \tag{3.11}$$

となりますね。

3.1.2 第 2 基本形式

$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ は 3 次元ベクトル空間の正規直交基底なので，曲面上の $\boldsymbol{e}_i$ の微分 $d\boldsymbol{e}_i$ は $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ の 1 次結合で表わせます。

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{e}_1 &= \omega_1^1\boldsymbol{e}_1 + \omega_1^2\boldsymbol{e}_2 + \omega_1^3\boldsymbol{e}_3 \\ d\boldsymbol{e}_2 &= \omega_2^1\boldsymbol{e}_1 + \omega_2^2\boldsymbol{e}_2 + \omega_2^3\boldsymbol{e}_3 \\ d\boldsymbol{e}_3 &= \omega_3^1\boldsymbol{e}_1 + \omega_3^2\boldsymbol{e}_2 + \omega_3^3\boldsymbol{e}_3 \end{aligned} \longrightarrow d\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_1^1 & \omega_1^2 & \omega_1^3 \\ \omega_2^1 & \omega_2^2 & \omega_2^3 \\ \omega_3^1 & \omega_3^2 & \omega_3^3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_3 \end{pmatrix} \tag{3.12}$$

ω_i^j は du と dv の適当な 1 次結合からなります。というのは，$\boldsymbol{e}_i$ は u, v の関数なので，あるベクトル $\boldsymbol{q}_i^1$, $\boldsymbol{q}_i^2$ があって $d\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{q}_i^1 du + \boldsymbol{q}_i^2 dv$ と表すことができます。この $\boldsymbol{q}_i^1$, $\boldsymbol{q}_i^2$ は $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ の 1 次結合で表わすことができるので

$$\begin{aligned} \boldsymbol{q}_i^1 &= \sum_{k=1}^{3} q_{i_k}^1\boldsymbol{e}_k, \quad \boldsymbol{q}_i^2 = \sum_{k=1}^{3} q_{i_k}^2\boldsymbol{e}_k \qquad (i=1,2,3) \\ \therefore\ d\boldsymbol{e}_i &= \left(\sum_{k=1}^{3} q_{i_k}^1\boldsymbol{e}_k\right)du + \left(\sum_{k=1}^{3} q_{i_k}^2\boldsymbol{e}_k\right)dv \\ &= \sum_{k=1}^{3}\left(q_{i_k}^1 du + q_{i_k}^2 dv\right)\boldsymbol{e}_k = \sum_{k=1}^{3}\omega_i^k\boldsymbol{e}_k \end{aligned} \tag{3.13}$$

これで ω_i^j は du, dv の 1 次結合で表されることが分かります。//

$\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \delta_{ij}$ (δ_{ij} : クロネッカーのデルタ) の微分をとると

$$d\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j + \boldsymbol{e}_i \cdot d\boldsymbol{e}_j = 0 \qquad (i,j=1,2,3) \tag{3.14}$$

これに (3.12) の関係式を入れると

$$\begin{aligned} &d\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \sum_k \omega_i^k\boldsymbol{e}_k \cdot \boldsymbol{e}_j = \omega_i^j, \quad \boldsymbol{e}_i \cdot d\boldsymbol{e}_j = \boldsymbol{e}_i \cdot \sum_k \omega_j^k\boldsymbol{e}_k = \omega_j^i \\ &\therefore \omega_i^j + \omega_j^i = 0, \quad \omega_1^1 = \omega_2^2 = \omega_3^3 = 0 \qquad (i,j=1,2,3) \end{aligned} \tag{3.15}$$

したがって，(3.12) の ω 行列は交代行列[2]で,

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{e}_1 &= \omega_1^2\boldsymbol{e}_2 + \omega_1^3\boldsymbol{e}_3 \\ d\boldsymbol{e}_2 &= -\omega_1^2\boldsymbol{e}_1 + \omega_2^3\boldsymbol{e}_3 \longrightarrow d\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_1\\ \boldsymbol{e}_2\\ \boldsymbol{e}_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_1^2 & \omega_1^3 \\ -\omega_1^2 & 0 & \omega_2^3 \\ -\omega_1^3 & -\omega_2^3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_1\\ \boldsymbol{e}_2\\ \boldsymbol{e}_3\end{pmatrix} \\ d\boldsymbol{e}_3 &= -\omega_1^3\boldsymbol{e}_1 - \omega_2^3\boldsymbol{e}_2 \end{aligned} \tag{3.16}$$

となります。具体的な例として再び半径 r の球面 $\boldsymbol{p}(u,v)$ を取り上げてみます。

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{p}(u,v) = (r\sin u\cos v, r\sin u\sin v, r\cos u) \\ &\begin{cases} \boldsymbol{p}_r = (\sin u\cos v, \sin u\sin v, \cos u) \\ \boldsymbol{p}_u = r(\cos u\cos v, \cos u\sin v, -\sin u) & : \ u \text{ 方向の接ベクトル} \\ \boldsymbol{p}_v = r\sin u(-\sin v, \cos v, 0) & : \ v \text{ 方向の接ベクトル} \end{cases} \end{aligned} \tag{3.17}$$

正規直交標構を

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_1 &= \frac{1}{r}\boldsymbol{p}_u = (\cos u\cos v, \cos u\sin v, -\sin u) \\ \boldsymbol{e}_2 &= \frac{1}{r\sin u}\boldsymbol{p}_v = (-\sin v, \cos v, 0) \\ \boldsymbol{e}_3 &= \boldsymbol{p}_r = (\sin u\cos v, \sin u\sin v, \cos u) \end{aligned} \tag{3.18}$$

とると

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{e}_1 &= (-\sin u\cos v du - \cos u\sin v dv,\ \cos u\cos v dv - \sin u\sin v du,\ -\cos u du) \\ &= (\cos u\, dv)\boldsymbol{e}_2 - (du)\boldsymbol{e}_3 \\ d\boldsymbol{e}_2 &= (-\cos v dv,\ -\sin v dv,\ 0) = -(\cos u\, dv)\boldsymbol{e}_1 - (\sin u\, dv)\boldsymbol{e}_3 \\ d\boldsymbol{e}_3 &= (\cos u\cos v du - \sin u\sin v dv,\ \sin u\cos v + \cos u\sin v du, -\sin u du) \\ &= (du)\boldsymbol{e}_1 + (\sin u dv)\boldsymbol{e}_2 \\ \therefore \omega_1^2 &= -\omega_2^1 = d\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2 = \cos u dv, \quad \omega_1^3 = -\omega_3^1 = d\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_3 = -du \\ \omega_2^3 &= -\omega_3^2 = d\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_3 = -\sin u dv \end{aligned} \tag{3.19}$$

となりますね。

さて，第 2 基本形式を正規直交標構で書くと，(2.23) と (3.6) より

$$\begin{aligned} II &= -d\boldsymbol{p}\cdot d\boldsymbol{e}_3 = (\theta^1\boldsymbol{e}_1 + \theta^2\boldsymbol{e}_2)\cdot(\omega_1^3\boldsymbol{e}_1 + \omega_2^3\boldsymbol{e}_2) \\ &= \theta^1\omega_1^3 + \theta^2\omega_2^3 \end{aligned} \tag{3.20}$$

となります。ω_i^j は du, dv の 1 次結合であらわされますが，du, dv は θ^1, θ^2 の 1 次結合で表すことができるので結局 ω_i^j は θ^1, θ^2 の 1 次結合で表すことができます。そこで

$$\begin{cases} \omega_1^3 = b_{11}\theta^1 + b_{12}\theta^2 \\ \omega_2^3 = b_{21}\theta^1 + b_{22}\theta^2 \end{cases} \longrightarrow \begin{pmatrix}\omega_1^3\\ \omega_2^3\end{pmatrix} = \boldsymbol{B}\begin{pmatrix}\theta^1\\ \theta^2\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix} \tag{3.21}$$

とおいて，(3.20) に代入すると，第 2 基本形式は

$$II = b_{11}\theta^1\theta^1 + (b_{12}+b_{21})\theta^1\theta^2 + b_{22}\theta^2\theta^2 = \sum_{i,j}^{2} b_{ij}\theta^i\theta^j = (\theta^1\ \theta^2)\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\theta^1\\ \theta^2\end{pmatrix} \tag{3.22}$$

[2] 交代行列：${}^t\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{A}$，交代行列の対角成分は必ず 0 である。

となります。(2.23) の $II = (du\ dv)\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}$ とよく見比べてください。行列 $\boldsymbol{B}$ の成分は第 2 基本量と関係しているようですね。そこで行列 $\boldsymbol{B}$ を詳細に調べていくことにします。

$$\boldsymbol{p}_u \cdot \boldsymbol{e} = 0, \quad \boldsymbol{p}_v \cdot \boldsymbol{e} = 0 \tag{3.23}$$

これをそれぞれ u, v で偏微分して

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial u}(\boldsymbol{p}_u \cdot \boldsymbol{e}) = \boldsymbol{p}_{uu} \cdot \boldsymbol{e} + \boldsymbol{p}_u \cdot \boldsymbol{e}_u = L + \boldsymbol{p}_u \cdot \boldsymbol{e}_u = 0 \quad \longrightarrow \quad L = -\boldsymbol{p}_u \cdot \boldsymbol{e}_u \\ \dfrac{\partial}{\partial v}(\boldsymbol{p}_u \cdot \boldsymbol{e}) = \boldsymbol{p}_{uv} \cdot \boldsymbol{e} + \boldsymbol{p}_u \cdot \boldsymbol{e}_v = M + \boldsymbol{p}_u \cdot \boldsymbol{e}_v = 0 \quad \longrightarrow \quad M = -\boldsymbol{p}_u \cdot \boldsymbol{e}_v \\ \dfrac{\partial}{\partial u}(\boldsymbol{p}_v \cdot \boldsymbol{e}) = \boldsymbol{p}_{vu} \cdot \boldsymbol{e} + \boldsymbol{p}_v \cdot \boldsymbol{e}_u = M + \boldsymbol{p}_v \cdot \boldsymbol{e}_u = 0 \quad \longrightarrow \quad M = -\boldsymbol{p}_v \cdot \boldsymbol{e}_u \\ \dfrac{\partial}{\partial v}(\boldsymbol{p}_v \cdot \boldsymbol{e}) = \boldsymbol{p}_{vv} \cdot \boldsymbol{e} + \boldsymbol{p}_v \cdot \boldsymbol{e}_v = N + \boldsymbol{p}_v \cdot \boldsymbol{e}_v = 0 \quad \longrightarrow \quad N = -\boldsymbol{p}_v \cdot \boldsymbol{e}_v \end{cases} \tag{3.24}$$

また，$d\boldsymbol{e}_3 = d\boldsymbol{e} = \boldsymbol{e}_u du + \boldsymbol{e}_v dv$ なので，上の関係式と (3.3), (3.12), (3.15) を使って

$$\begin{aligned} -Ldu - Mdv = d\boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{p}_u &= (\omega_3^1 \boldsymbol{e}_1 + \omega_3^2 \boldsymbol{e}_2) \cdot (a_1^1 \boldsymbol{e}_1 + a_1^2 \boldsymbol{e}_2) \\ &= \omega_3^1 a_1^1 + \omega_3^2 a_1^2 = -\omega_1^3 a_1^1 - \omega_2^3 a_1^2 \end{aligned} \tag{3.25}$$

が得られ，同様に

$$-Mdu - Ndv = -\omega_1^3 a_2^1 - \omega_2^3 a_2^2 \tag{3.26}$$

が得られます。したがって

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega_1^3 \\ \omega_2^3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \theta^1 \\ \theta^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} \\ &= \boldsymbol{A}^t \boldsymbol{B} \boldsymbol{A}\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{3.27}$$

第 2 基本量の行列を $\boldsymbol{S}$ とすると，

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{A}^t \boldsymbol{B} \boldsymbol{A}, \quad \boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \tag{3.28}$$

となり，$\boldsymbol{S}$ は対称行列なので $\boldsymbol{S}^t = \boldsymbol{S}$ となることを使うと

$$\boldsymbol{S}^t = (\boldsymbol{A}^t(\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}))^t = (\boldsymbol{B}\boldsymbol{A})^t \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^t \boldsymbol{B}^t \boldsymbol{A} = \boldsymbol{S}, \quad \therefore\ \boldsymbol{B}^t = \boldsymbol{B} \tag{3.29}$$

となって，行列 $\boldsymbol{B}$ は対称行列であることが分かります[3]。(3.29) の両辺に左から $(\boldsymbol{A}^t)^{-1}$，右から $\boldsymbol{A}^{-1}$ を掛けると $(\boldsymbol{A}^t)^{-1} = (\boldsymbol{A}^{-1})^t$ に留意して

$$\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{A}^t)^{-1} \boldsymbol{S} \boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{A}^{-1})^t \boldsymbol{S} \boldsymbol{A}^{-1} \tag{3.30}$$

[3] 尚，外微分形式を用いると行列 $\boldsymbol{B}$ の対称性は簡単にでてきますが，それは先のお楽しみ。対称行列は実の固有値を持ち，適当な直交行列 $\boldsymbol{P}$ で対角化可能，対角成分は $\boldsymbol{B}$ の固有値となります。

行列 $\boldsymbol{B}$ の行列式とトレースは

$$\begin{aligned}\det\,\boldsymbol{B} &= |\boldsymbol{A}|\left|\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{A}^{-1})^t\boldsymbol{S}\right|\left|\boldsymbol{A}^{-1}\right| = \left|\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{A}^{-1})^t\boldsymbol{S}\right| = \left|\boldsymbol{A}^t\boldsymbol{A}\right|^{-1}|\boldsymbol{S}| \\ \mathrm{Tr}\,\boldsymbol{B} &= \mathrm{Tr}(\left|\boldsymbol{A}^t\boldsymbol{A}\right|^{-1}|\boldsymbol{S}|)\end{aligned} \tag{3.31}$$

となります。$E=\boldsymbol{p}_u\cdot\boldsymbol{p}_u$, $F=\boldsymbol{p}_u\cdot\boldsymbol{p}_v$, $G=\boldsymbol{p}_v\cdot\boldsymbol{p}_v$ なので (3.3) より

$$\boldsymbol{A}^t\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1a_1^1 + a_1^2a_1^2 & a_1^1a_2^1 + a_1^2a_2^2 \\ a_1^1a_2^1 + a_1^2a_2^2 & a_2^1a_2^1 + a_2^2a_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \tag{3.32}$$

$$\left|\boldsymbol{A}^t\boldsymbol{A}\right|^{-1} = \frac{1}{EG-F^2}\begin{vmatrix} G & -F \\ -F & E \end{vmatrix} \tag{3.33}$$

これと (2.41), (2.42) の関係式から

$$\begin{aligned}\det\,\boldsymbol{B} &= \frac{LN-M^2}{EG-F^2} = K = \kappa_1\kappa_2 \\ \mathrm{Tr}\,\boldsymbol{B} &= \frac{1}{EG-F^2}\mathrm{Tr}\left\{\begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}\right\} \\ &= \frac{EN+GL-2FM}{EG-F^2} = 2H = \kappa_1+\kappa_2\end{aligned} \tag{3.34}$$

が得られます。$\boldsymbol{B}$ は対称行列なので適当な直交行列 $\boldsymbol{P}$ で対角化可能です。対角成分は $\boldsymbol{B}$ の固有値で，これが κ_1, κ_2 になることが分かります。

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}^t\boldsymbol{B}\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \kappa_1 & 0 \\ 0 & \kappa_2 \end{pmatrix} \tag{3.35}$$

[**参考**] 法曲率 κ は

$$\begin{aligned}\kappa &= \frac{L(du)^2 + 2Mdudv + N(dv)^2}{E(du)^2 + 2Fdudv + G(dv)^2} = \frac{II}{I} \\ &= (du\ dv)\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}\Big/(du\ dv)\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}\end{aligned} \tag{3.36}$$

で与えられました。いま

$$\mathtt{I} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}, \quad \mathtt{II} = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \tag{3.37}$$

として

$$\mathtt{P} = \mathtt{II}\cdot\mathtt{I}^{-1} \tag{3.38}$$

という行列を考えると，この行列 $\mathtt{P}$ の固有値が主曲率を与えます。
$\mathtt{I}$ の逆行列は

$$\mathtt{I}^{-1} = \frac{1}{EG-F^2}\begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \tag{3.39}$$

となるので

$$\begin{aligned}\mathtt{P} &= \frac{1}{EG-F^2}\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}\begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{EG-F^2}\begin{pmatrix} GL-FM & -FL+EM \\ GM-FN & -FM+EN \end{pmatrix}\end{aligned} \tag{3.40}$$

行列 $\mathtt{P}$ の固有方程式は

$$\frac{1}{EG-F^2}\begin{vmatrix} GL-FM-\lambda & -FL+EM \\ GM-FN & -FM+EN-\lambda \end{vmatrix} = 0$$
$$\therefore \quad (EG-F^2)\lambda^2-(EN+GL-2FM)\lambda+LN-M^2=0 \tag{3.41}$$

(3.41) は (2.37) と同じ式であり，**行列 $\mathtt{P}$ の固有値 λ は曲面の主曲率を与える**ことが分かります。整理すると

- $\mathtt{P}$ の行列式 $\det \mathtt{P}$ は固有値の積であるガウス曲率 K を与える。

$$\det \mathtt{P} = \frac{(LN-M^2)(EG-F^2)}{(EG-F^2)^2} = \frac{LN-M^2}{EG-F^2} = \kappa_1\kappa_2 = K$$

- $\mathtt{P}$ の対角和 $\mathrm{Tr}\,\mathtt{P}$ は固有値の和となるので，$\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,\mathtt{P}$ は平均曲率 H を与える。

$$\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,\mathtt{P} = \frac{GL-FM-FM+EN}{EG-F^2} = \frac{EN+GL-2GM}{2(EG-F^2)} = \frac{1}{2}(\kappa_1+\kappa_2) = H$$

ということになります。

3.1.3 内在的な量と外在的な量

曲面では，第 1 基本形式と第 2 基本形式が定義されました。第 1 形式で記述される量，例えば曲面上の曲線の長さや曲面の微小面積などを**内在的な量**といいます。これは曲面上の情報だけで決まる量です。一方，ガウス曲率や平均曲率は曲面の曲がり具合を示す重要な量ですが，これは曲面上にいるだけでは分からず，外部から曲面を眺めないと分かりません[4]。つまり，第 2 基本形式で記述される量は内在的な量ではありません。これを**外在的な量**と呼びことにすると，曲面は内在的な量と外在的な量で記述されるということになります。ところが，外在的な量であるガウス曲率は，実は内在的な量で表せることがこのあとでてくる (3.95) で分かります。ということで，曲面を調べるのに敢えて外部から眺めなくても，曲面上にいても調べられる，言い換えると，第 1 基本量だけでも十分曲面を調べることができるということになります。この辺の議論に進むには微分形式という数学の武器を使うと見通しのよい議論ができますので，まず微分形式というものを学習してから本論に戻りたいと思います。

3.2 微分形式からの曲面論

3.2.1 ウェッジ積

3 次元ベクトル空間の正規直交基底を $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_z$ とすると，任意の 3 次元ベクトルはこれらの 1 次独立な基底ベクトルの 1 次結合で表すことができます。いま，大きさが無限小の dx, dy, dz を**基底**とする 3 次元線形空間を考えます。$f(x,y,z)$, $g(x,y,z)$, $h(x,y,z)$ を普通の関数として

$$u = f(x,y,z)dx + g(x,y,z)dy + h(x,y,z)dz \tag{3.42}$$

としたものは，3 次元線形空間におけるあるベクトルを表していると考えることができます。

3 次元線形空間における基底 dx, dy, dz の間で定義される 1 種の積，**ウエッジ積**[5]を次のよう

[4] 曲面上だけで考えると法単位ベクトル $\boldsymbol{e}$ は存在しないことになります。

[5] 記号 $\wedge$ を**ウエッジ**といいます。

に定めます。α, β をスカラーとして

$$dx \wedge dx = 0, \quad dy \wedge dy = 0, \quad dz \wedge dz = 0 \tag{3.43}$$

$$dx \wedge dy = -dy \wedge dx, \quad dy \wedge dz = -dz \wedge dy, \quad dz \wedge dx = -dx \wedge dz \quad \text{（交代性）} \tag{3.44}$$

$$(\alpha dx + \beta dy) \wedge dz = \alpha dx \wedge dz + \beta dy \wedge dz, \quad \cdots \quad \text{（分配則）} \tag{3.45}$$

$$(dx \wedge dy) \wedge dz = dx \wedge (dy \wedge dz), \quad \cdots \quad \text{（結合則）} \tag{3.46}$$

ウェッジ積はベクトルの外積とよく似たルールをもちますが，ベクトルの外積では $(\boldsymbol{e}_x \times \boldsymbol{e}_y) \times \boldsymbol{e}_z \neq \boldsymbol{e}_x \times (\boldsymbol{e}_y \times \boldsymbol{e}_z)$ で結合則は成り立たないことに注意してください。

3.2.2 微分形式

次に 3 次元空間における**微分形式**を定義します。

1）零次微分形式 ：3 次元空間におけるただの関数

$$f(x, y, z) \tag{3.47}$$

2）1 次微分形式 ：dx, dy, dz に関数を掛けたものの和[6]

$$u_1 = f_1(x, y, z)dx + f_2(x, y, z)dy + f_3(x, y, z)dz \tag{3.48}$$

3）2 次微分形式 ：$dy \wedge dz$, $dz \wedge dx$, $dx \wedge dy$ に関数を掛けたものの和[7]

$$u_2 = f_1(x, y, z)dy \wedge dz + f_2(x, y, z)dz \wedge dx + f_3(x, y, z)dx \wedge dy \tag{3.49}$$

4）3 次微分形式 ：$dx \wedge dy \wedge dz$ に関数を掛けたものの和[8]

$$u_3 = f(x, y, z)dx \wedge dy \wedge dz \tag{3.50}$$

各微分形式はそれぞれ，1，(dx, dy, dz)，$(dx \wedge dy, dy \wedge dz, dz \wedge dx)$，$dx \wedge dy \wedge dz$ を基底とするベクトルの形になっており[9]，基底の次数で微分形式の次数を呼び分けています[10]。

零次微分形式はスカラーで，1 次微分形式は dx, dy, dz で張られる 3 次元線形空間を作ります。2 次微分形式は 3 個の基底 $dx \wedge dy$, $dy \wedge dz$, $dz \wedge dx$ で張られる 3 次元線形空間を作りますが，1 次微分形式の張る 3 次元線形空間とは異なります。3 次微分形式は 1 個の基底 $dx \wedge dy \wedge dz$ で張られる 1 次元線形空間を作ります[11]。ただ，これらの基底で張られる線形空間と通常のベクトル空間とは別物だということに留意しておいてください。

---

[6] 基底 dx, dy, dz の方向はそれぞれ x, y, z 軸方向。

[7] 基底 $dx \wedge dy, dy \wedge dz, dz \wedge dx$ はそれぞれ x, y, z 軸方向の微分面積要素ベクトルに対応。

[8] 基底 $dx \wedge dy \wedge dz$ が微分体積要素に対応。

[9] $dx \wedge dy$ と $dy \wedge dx$ は符号が異なるだけで 1 次独立ではありません。

[10] n 次元空間の微分 k 形式は $u_k = \displaystyle\sum_{1_1 < 1_2 < \cdots < i_k} f_{i_1 i_2 \cdots i_k} dx_{i1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots dx_{i_k}$ $(1 \leq k \leq n)$ となる。1 次独立な基底の数は ${}_nC_k = n!/(n-k)!k!$個。

[11] 一般に $dx_i {\wedge} dx_j (1 \leq i \leq j \leq n)$ を基底とする線形空間を $\wedge^2 \Omega$，同様に $dx_{i_1} {\wedge} dx_{i_2} \cdots {\wedge} dx_{i_k}$ $(1 \leq i_1 \leq i_2 \cdots \leq i_k)$ を基底とする線形空間を $\wedge^k \Omega$ と書いたりします。

3.2.3 微分形式の間のウエッジ積

u, v, w を任意の微分形式，f, g を関数とし，**微分形式の間の外積**を次のように定義します[12]。

$$u \wedge (v+w) = u \wedge v + u \wedge w, \quad (v+w) \wedge u = v \wedge u + w \wedge u \tag{3.51}$$
$$u \wedge (v \wedge w) = (u \wedge v) \wedge w \tag{3.52}$$
$$(fu) \wedge v = u \wedge (fv) = f(u \wedge v) \tag{3.53}$$
$$(fu+gv) \wedge w = f(u \wedge w) + g(v \wedge w) \tag{3.54}$$
$$u \wedge (fv+gw) = f(u \wedge v) + g(v \wedge w) \tag{3.55}$$

一般に u を k 次微分形式，v を l 次微分形式とすると，

$$u \wedge v = (-1)^{kl} v \wedge u \tag{3.56}$$

が成り立ちます。これは $u = dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \cdots \wedge dx_{i_k}$, $v = dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \cdots \wedge dx_{j_l} \quad (1 \le k, l \le n)$ とおいて (3.44) を使い

$$\begin{aligned} u \wedge v &= (dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \cdots \wedge dx_{i_k}) \wedge (dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \cdots \wedge dx_{j_l}) \\ &= dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \cdots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \cdots \wedge dx_{j_l} \\ &= (-1)^{kl} dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \cdots \wedge dx_{j_l} \wedge dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \cdots \wedge dx_{i_k} \\ &= (-1)^{kl} (dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \cdots \wedge dx_{j_l}) \wedge (dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \cdots \wedge dx_{i_k}) \\ &= (-1)^{kl} v \wedge u \end{aligned}$$

で (3.56) が成立するのが分かります。

また，u, v が 1 次微分形式で表される場合，すなわち $u = \sum_{i=1}^{n} a_i(dx_i)$, $v = \sum_{j=1}^{n} b_j(dx_j)$ の場合

$$\begin{aligned} u \wedge v = \sum_{i,j}^{n} a_i b_j (dx_i \wedge dx_j) &= \sum_{i<j} (a_i b_j - a_j b_i) dx_i \wedge dx_j \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j} (a_i b_j - a_j b_i) dx_i \wedge dx_j \end{aligned} \tag{3.57}$$

となります[13]。$n = 2$ の場合を見ると，$u = a_1 dx_1 + a_2 dx_2$, $v = b_1 dx_1 + b_2 dx_2$ とおいて

$$\begin{aligned} u \wedge v &= (a_1 dx_1 + a_2 dx_2) \wedge (b_1 dx_1 + b_2 dx_2) \\ &= (a_1 b_1 dx_1 \wedge dx_1 + a_1 b_2 dx_1 \wedge dx_2 + a_2 b_1 dx_2 \wedge dx_1 + a_2 b_2 dx_2 \wedge dx_2) \\ &= (a_1 b_2 dx_1 \wedge dx_2 + a_2 b_1 dx_2 \wedge dx_1) = (a_1 b_2 - a_2 b_1) dx_1 \wedge dx_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{2} (a_i b_j - a_j b_i) dx_i \wedge dx_j &= \frac{1}{2} \left\{ (a_1 b_2 - a_2 b_1) dx_1 \wedge dx_2) + (a_2 b_1 - a_1 b_2) dx_2 \wedge dx_1) \right\} \\ &= (a_1 b_2 - a_2 b_1) dx_1 \wedge dx_2 \end{aligned}$$

これから (3.57) が成り立つのが分かります。

---

[12] ただの関数である 0 次微分形式の積に関しては $\wedge$ 記号は書きません。
[13] $n = 3$ の場合，3 次元ベクトル空間のベクトル積に対応していることを確認してください。

3.2.4 外微分

零次から 3 次微分形式に対して外微分をそれぞれ次のように定義します。

●零次微分形式 f の外微分

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz \tag{3.58}$$

これはいわゆる関数の全微分と同じ式です。dx, dy, dz を 3 次元ベクトル空間の基底と思って成分表示すると

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = \mathtt{grad}f \tag{3.59}$$

と書け，`grad` **は零次微分形式に対する外微分** d に対応します。

● 1 次微分形式 $u_1 = f_1dx + f_2dy + f_3dz$ の外微分

$$du_1 = df_1 \wedge dx + df_2 \wedge dy + df_3 \wedge dz \tag{3.60}$$

微分形式の次数は 1 次から 2 次に上がります。

$$\begin{aligned} du_1 &= \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}dx + \frac{\partial f_1}{\partial y}dy + \frac{\partial f_1}{\partial z}dz\right) \wedge dx + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}dx + \frac{\partial f_2}{\partial y}dy + \frac{\partial f_2}{\partial z}dz\right) \wedge dy \\ &\quad + \left(\frac{\partial f_3}{\partial x}dx + \frac{\partial f_3}{\partial y}dy + \frac{\partial f_3}{\partial dz}\right) \wedge dz \\ &= \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}\right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}\right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right) dx \wedge dy \end{aligned}$$

$dy \wedge dz, dz \wedge dx, dx \wedge dy$ を 3 次元ベクトル空間の基底と思うと

$$du_1 = \mathtt{rot}(f_1, f_2, f_3) \tag{3.61}$$

と書け，`rot` **は 1 次微分形式に対する外微分** d に対応します。

● 2 次微分形式 $u_2 = f_1dy \wedge dz + f_2dz \wedge dx + f_3dx \wedge dy$ の外微分

$$du_2 = df_1 \wedge dy \wedge dz + df_2 \wedge dz \wedge dx + df_3 \wedge dx \wedge dy \tag{3.62}$$

次数は 2 次から 3 次に上がります。

$$\begin{aligned} du_2 &= \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}dx + \frac{\partial f_1}{\partial y}dy + \frac{\partial f_1}{\partial z}dz\right) \wedge dy \wedge dz + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}dx + \frac{\partial f_2}{\partial y}dy + \frac{\partial f_2}{\partial z}dz\right) \wedge dz \wedge dx \\ &\quad + \left(\frac{\partial f_3}{\partial x}dx + \frac{\partial f_3}{\partial y}dy + \frac{\partial f_3}{\partial z}dz\right) \wedge dx \wedge dy \\ &= \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}\right) dx \wedge dy \wedge dz \end{aligned}$$

$dx \wedge dy \wedge dz$ を 1 次元ベクトル空間の基底と思うと

$$du_2 = \mathtt{div}(f_1, f_2, f_3) \tag{3.63}$$

と書け，`div` **は 2 次微分形式に対する外微分** d に対応します。

● 3 次微分形式 $u_3 = f dx \wedge dy \wedge dz$ の外微分

$$du_3 = df \wedge dx \wedge dy \wedge dz = 0 \tag{3.64}$$

となります。

$$du_3 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz\right) \wedge dx \wedge dy \wedge dz = 0 \quad (\because\ dx_i \wedge dx_i = 0)$$

●その他重要なこと

(1)k 次微分形式 u_k と l 次微分形式 v_l のウエッジ積の外微分に対して $(0 \leq k, l \leq 3)$

$$d(u_k \wedge v_l) = (du_k) \wedge v_l + (-1)^k u_k \wedge (dv_l) \tag{3.65}$$

が成り立ちます。

$$\begin{aligned}
u_k &= \sum a_{i_1 \cdots i_k} dx_{i1} \wedge \cdots \wedge dx_{ik}, \quad v_l = \sum b_{j_1 \cdots j_l} dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{jl} \\
u_k \wedge v_l &= \sum a_{i_1 \cdots i_k} b_{j_1 \cdots j_l} dx_{i1} \wedge \cdots \wedge dx_{ik} \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{jl} \\
d(u_k \wedge v_l) &= \sum d(a_{i_1 \cdots i_k} b_{j_1 \cdots j_l}) dx_{i1} \wedge \cdots \wedge dx_{ik} \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{jl} \\
&= \sum \left\{ d(a_{i_1 \cdots i_k}) b_{j_1 \cdots j_l} + a_{i_1 \cdots i_k} (db_{j_1 \cdots j_l}) \right\} dx_{i1} \wedge \cdots \wedge dx_{ik} \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{jl}
\end{aligned}$$

$$db_{j_1 \cdots j_l} = \sum_{m=1}^{l} \frac{\partial b_{j_1 \cdots j_l}}{\partial x_m} dx_m$$

$$\begin{aligned}
&\sum a_{i_1 \cdots i_k} (db_{j_1 \cdots j_l}) dx_{i1} \wedge \cdots \wedge dx_{ik} \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{jl} \\
&= \sum a_{i_1 \cdots i_k} \left(\sum_{m=1}^{l} \frac{\partial b_{j_1 \cdots j_l}}{\partial x_m} dx_m \right) \wedge dx_{i1} \wedge \cdots \wedge dx_{ik} \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{jl} \\
&= (-1)^k \sum (a_{i_1 \cdots i_k} \wedge dx_{i1} \wedge \cdots \wedge dx_{ik}) \left(\sum_{m=1}^{l} \frac{\partial b_{j_1 \cdots j_l}}{\partial x_m} dx_m \right) \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{jl} \\
&= (-1)^k u_k (dv_l)
\end{aligned}$$

$$\therefore \ d(u_k \wedge v_l) = (du_k) \wedge v_l + (-1)^k u_k \wedge (dv_l)$$

(2)f, g が関数で u は k 次微分形式の場合

$$\left\{ \begin{array}{l}
d(fg) = (df)g + f(dg) \\
d(fu) = df \wedge u + f(du) \\
d(uf) = (du)f + (-1)^k u \wedge df
\end{array} \right. \tag{3.66}$$

が成り立ちます。

(3) 任意の次数の微分形式 u に対して

$$d(du) = 0 \tag{3.67}$$

が成り立ちます。これは**ポアンカレの補助定理**と呼ばれ，早速次のセクションで使うことになります。

u が関数 f，つまり 0 次微分形式であるときには

$$\begin{aligned}
d(df) &= d\left(\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \right) = \sum_{i=1}^{3} d\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \right) = \sum_{i=1}^{3} d\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \wedge dx_i = \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j x_i} dx_j \wedge dx_i \\
&= \sum_{i<j} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j x_i} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i x_j} \right) dx_j \wedge dx_i = 0 \quad (dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i \text{を使う})
\end{aligned}$$

u が 1 次微分形式であるときには

$$\begin{aligned}
du &= \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x} \right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dx \wedge dy \\
d(du) &= \left(\frac{\partial^2 f_3}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f_2}{\partial x \partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz + \left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f_3}{\partial y \partial x} \right) dy \wedge dz \wedge dx \\
&\quad + \left(\frac{\partial^2 f_2}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 f_1}{\partial z \partial y} \right) dz \wedge dx \wedge dy = 0 \quad (\because \ dx \wedge dy \wedge dz = -dz \wedge dy \wedge dx, \cdots)
\end{aligned}$$

u が 2 次微分形式であるときは

$$du = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}\right) dx \wedge dy \wedge dz$$

$$d(du) = d\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)\wedge dx\wedge dy\wedge dz + d\left(\frac{\partial f_2}{\partial y}\right)\wedge dx\wedge dy\wedge dz + d\left(\frac{\partial f_3}{\partial z}\right)\wedge dx\wedge dy\wedge dz$$

$$d\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)\wedge dx\wedge dy\wedge dz = \left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2 f_1}{\partial y\partial x}dy + \frac{\partial^2 f_1}{\partial z\partial x}dz\right)\wedge dx\wedge dy\wedge dz = 0, \quad \cdots$$

$$\therefore\ d(du) = 0$$

ポアンカレの補助定理は次のように言い換えることができます。

「k 次微分形式 $\omega(k \geq 1)$ が $d\omega = 0$ となるための必要十分条件は，ある $k-1$ 次微分形式 η があって $\omega = d\eta$ と表されることである。」

つまり $\omega = d\eta$ であれば $d\omega = 0$ になるということですね[14]。3 次元ベクトル解析でのスカラーポテンシャル ϕ やベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ の存在条件は、ポアンカレの補助定理の特別な場合に相当します[15]。

$$\begin{cases} \mathtt{rot}\boldsymbol{F} = 0 \longrightarrow \boldsymbol{F} = \mathtt{grad}\phi \\ \mathtt{div}\boldsymbol{G} = 0 \longrightarrow \boldsymbol{G} = \mathtt{rot}\boldsymbol{A} \end{cases}$$

逆に $d\omega = 0$ であるとき，$\omega = d\eta$ となる η は存在するかというと，これは必ずしも存在しません。3 次元ベクトル空間で $\mathtt{rot}\,\mathtt{grad}\,\varphi = 0$ ですが，$\mathtt{rot}\boldsymbol{v} = 0$ であるような $\boldsymbol{v}$ は $\boldsymbol{v} = \mathtt{grad}\varphi$ と書けるとは限らないことに対応します（$\because\ \boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v} + \mathtt{grad}\varphi$ も $\mathtt{rot}\boldsymbol{v}' = 0$)。

《*Memo*》一般に n 次元空間における k 次微分形式は $1 \leq i_k \leq n$ として

$$\begin{aligned} u_k &= \frac{1}{k!}\sum_{i_1,i_2,\cdots,i_k} a_{i_1\cdots i_k}(x)dx_{i_1}\wedge dx_{i_2}\wedge\cdots\wedge dx_{ik} \\ &= \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_k} a_{i_1\cdots i_k}(x)dx_{i_1}\wedge dx_{i_2}\wedge\cdots\wedge dx_{ik} \end{aligned} \tag{3.68}$$

と書けます (※)。例えば 3 次微分形式を具体的に表記すると

$$\begin{aligned} u_3 = a_{123}&dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3 + a_{134}\wedge dx_1\wedge dx_3\wedge dx_4 + \cdots \\ &+ a_{234}dx_2\wedge dx_3\wedge dx_4 + a_{235}\wedge dx_2\wedge dx_4\wedge dx_5 + \cdots \\ &\vdots \end{aligned} \tag{3.69}$$

1 次独立な基底の数は ${}_nP_k = n!/(n-k)!$ ではなく ${}_nC_k = n!/k!(n-k)!$ 個。(3.68) の右辺第 1 項の $1/k!$ は ${}_nP_k/k! =_n C_k$ からきています。

k 次微分形式の外微分は

$$\begin{aligned} du_k &= d\sum_{i_1<i_2<\cdots<i_k} a_{i_1\cdots i_k}(x)dx_{i_1}\wedge dx_{i_2}\wedge\cdots\wedge dx_{ik} \\ &= \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_k} da_{i_1\cdots i_k}(x)dx_{i_1}\wedge dx_{i_2}\wedge\cdots\wedge dx_{ik} \\ da_{i_1\cdots i_k}(x) &= \sum_{j=1}^{k}\frac{\partial a_{i_1\cdots i_k}}{\partial x_j}dx_j \end{aligned} \tag{3.70}$$

となって，$(k+1)$ 次微分形式となります (但し，$k+1 \leq n$)。

[14] k 次微分形式 ω に対し $d\omega = 0$ が成り立つとき，ω は閉形式，η を $k-1$ 次微分形式として $\omega = d\eta$ なら ω は完全形式といいます。

[15] grad：0 次微分形式に対する外微分，rot：1 次微分形式に対する外微分，div：2 次微分形式に対する外微分に対応することを思い出してください。

外微分 du の定義 (3.70) は座標 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ のとり方に無関係，つまり**座標変換に対して不変**という著しい特徴があります。これにより，微分形式の概念やこれを用いての計算を座標系によらずに自由に使えることになります。
この証明は次のようにしてできます。

$$x_i = \phi_i(y_1, y_2, \cdots, y_n) \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{3.71}$$

を (3.68) に代入してできる式を

$$u_k = \sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_k} b_{i_1 \cdots i_k}(y) dy_{i_1} \wedge dy_{i_2} \wedge \cdots \wedge dy_{ik} \tag{3.72}$$

とします。$y_{i_1}, y_{i_2}, \cdots, y_{i_k}$ を $x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_k}$ の関数とみなして外微分すると

$$\begin{aligned} du_k = \sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_k} & \{db_{i_1 \cdots i_k} \wedge (dy_{i_1} \wedge dy_{i_2} \wedge \cdots \wedge dy_{ik}) \\ & + b_{i_1 \cdots i_k} d(dy_{i_1} \wedge dy_{i_2} \wedge \cdots \wedge dy_{ik})\} \end{aligned} \tag{3.73}$$

(3.65),(3.66) より

$$\begin{aligned} d(dy_{i_1} \wedge dy_{i_2} \wedge \cdots \wedge dy_{i_k}) &= d(dy_{i_1}) \wedge (dy_{i_2} \wedge \cdots \wedge dy_{ik}) + dy_{i_1} d(dy_{i_2} \wedge \cdots \wedge dy_{ik}) \\ &= dy_{i_1} d(dy_{i_2} \wedge \cdots \wedge dy_{ik}) \\ d(dy_{i_2} \wedge \cdots \wedge dy_{i_k}) &= d(dy_{i_2}) \wedge (dy_{i_3} \wedge \cdots \wedge dy_{ik}) + dy_{i_2} d(dy_{i_3} \wedge \cdots \wedge dy_{ik}) \\ &= dy_{i_2} d(dy_{i_3} \wedge \cdots \wedge dy_{i_k}) \\ &\vdots \\ d(dy_{i_{k-1}} \wedge d_{i_k}) &= d(dy_{i_{k-1}}) \wedge d_{i_k} + dy_{i_{k-1}} d(d_{i_k}) = 0 \end{aligned}$$

となって，(3.73) の右辺第 2 項は 0 になることが分かります。したがって，(3.73) は

$$du_k = \sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_k} db_{i_1 \cdots i_k} \wedge dy_{i_1} \wedge dy_{i_2} \wedge \cdots \wedge dy_{ik}$$

となり，これは (3.72) で $y_{i_1}, \cdots, y_{i_k}$ を座標と見て定義に従って du_k を作った式と一致します。

(※)1 つの項の中で同じ添字が現れた場合は，その添字について 1 から n までの和をとるというアインシュタインの規約を使えば，(3.68) は

$$u_k = \frac{1}{k!} a_{i_1 \cdots i_k}(x) dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{ik} \tag{3.74}$$

とスッキリ書くことができます。慣れてくるとこの表記のほうが楽ですね！

3.2.5 微分形式の座標変換

前セクションの $Memo$ で微分形式の座標不変性について述べました。この際，$b_{i_1 \cdots i_k}$ の具体的な形には触れませんでしたが，ここではそのあたりを調べていくことにします。一般論を展開する前に簡単な 2 次元空間の場合で見ていきます。座標 x, y から座標 p, q への変換を考えます。

$$x = x(p, q), \quad y = y(p, q) \tag{3.75}$$

x, y の外微分は

$$dx = \frac{\partial x}{\partial p} dp + \frac{\partial x}{\partial q} dq, \quad dy = \frac{\partial y}{\partial p} dp + \frac{\partial y}{\partial q} dq$$

1 次微分形式 $u=f_1(x,y)dx+f_2(x,y)dy$ はこの変換により

$$\begin{aligned} u &= f_1\left(\frac{\partial x}{\partial p}dp+\frac{\partial x}{\partial q}dq\right)+f_2\left(\frac{\partial x}{\partial p}dp+\frac{\partial x}{\partial q}dq\right) \\ &= F_1(p,q)dp+F_2(p,q)dq, \quad F_1=\left(f_1\frac{\partial x}{\partial p}+f_2\frac{\partial x}{\partial p}\right)dp,\ F_2=\left(f_1\frac{\partial x}{\partial q}+f_2\frac{\partial x}{\partial q}\right)dq \end{aligned} \tag{3.76}$$

2 次微分形式 $u=f(x,y)dx{\wedge}dy$ はこの変換により

$$\begin{aligned} u &= f\left(\frac{\partial x}{\partial p}dp+\frac{\partial x}{\partial q}dq\right)\wedge\left(\frac{\partial y}{\partial p}dp+\frac{\partial y}{\partial q}dq\right)=f\left(\frac{\partial x}{\partial p}\frac{\partial y}{\partial q}-\frac{\partial x}{\partial q}\frac{\partial y}{\partial p}\right)dp{\wedge}dq \\ &= f(p,q)\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial p} & \dfrac{\partial x}{\partial q} \\ \dfrac{\partial y}{\partial p} & \dfrac{\partial y}{\partial q} \end{vmatrix} dp{\wedge}dq = f(p,q)\frac{\partial(x,y)}{\partial(p,q)}dp{\wedge}dq \end{aligned} \tag{3.77}$$

となります。これは 2 重積分ででてくる変換の公式

$$\iint f(x,y)dxdy=\iint f(p,q)\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial p} & \frac{\partial x}{\partial q} \\ \frac{\partial y}{\partial p} & \frac{\partial y}{\partial q} \end{vmatrix} dpdq=\iint f(p,q)\frac{\partial(x,y)}{\partial(p,q)}dpdq \tag{3.78}$$

と一致します。行列式のところはいわゆるヤコビ行列（ヤコビアン）です。$dxdy$ を

$$dxdy=\frac{\partial(x,y)}{\partial(p,q)}dpdq \tag{3.79}$$

で定義すると，x と y を入れ替えた場合，ヤコビ行列の性質 $\partial(x,y)/\partial(p,q)=-\partial(y,x)/\partial(p,q)$ より $dydx=-dxdy$ となることが分かります。また，$y=x$ とおけば $dxdx=0$ を得ます。したがって上の定義式の dx,dy は単なる微小なスカラー値とみなすことはできない。つまり,「$dxdy$ は微分形式で $dx\wedge dy$ 書くべきである」ということになります。

$$dx{\wedge}dy=\frac{\partial(x,y)}{\partial(p,q)}dp{\wedge}dq \tag{3.80}$$

• **例.17**(x,y) を極座標 r,θ に $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ と変換するとき，極座標への変数変換の公式

$$dx{\wedge}dy=rdr{\wedge}\theta \tag{3.81}$$

を導いてみましょう。外微分の計算ルールを適用すると簡単な代数計算で求めることができます！

$$\begin{aligned} & dx=dr\cos\theta-r\sin\theta d\theta, \quad dy=dr\sin\theta+r\cos\theta d\theta \\ & dx{\wedge}dy=(dr\cos\theta-r\sin\theta d\theta){\wedge}(dr\sin\theta+r\cos\theta d\theta) \\ & \qquad =r\cos^2\theta dr\wedge d\theta-r\sin^2\theta d\theta\wedge dr=r(\cos^2\theta+\sin^2\theta)dr{\wedge}d\theta \\ & \qquad =rdr{\wedge}d\theta \end{aligned}$$

ちなみに座標変換 $(x,y)\to(r,\theta)$ のヤコビアンは

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix}=\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=r$$

• **例.18**(x,y,z) を極座標 r,θ に $x=r\sin\theta\cos\phi$, $y=r\sin\theta\sin\phi$, $z=r\cos\theta$ と変換するとき，極座標への変数変換の公式

$$dx{\wedge}dy{\wedge}dz=r^2\sin\theta dr{\wedge}d\theta\wedge d\phi \tag{3.82}$$

を導いてみましょう。これも簡単な代数計算で求めることができます。

$$
\begin{aligned}
dx{\wedge}dy{\wedge}dz &= \left(\frac{\partial x}{\partial r}dr + \frac{\partial x}{\partial \theta}d\theta + \frac{\partial x}{\partial \phi}d\phi\right) \wedge \left(\frac{\partial y}{\partial r}dr + \frac{\partial y}{\partial \theta}d\theta + \frac{\partial y}{\partial \phi}d\phi\right) \wedge \left(\frac{\partial z}{\partial r}dr + \frac{\partial z}{\partial \theta}d\theta + \frac{\partial z}{\partial \phi}d\phi\right) \\
&= (r^2 \sin\theta\cos\theta\cos^2\phi d\theta \wedge d\phi - r^2\sin\theta\cos\theta\sin^2\phi d\phi \wedge d\theta) \wedge \cos\theta dr \\
&\quad +(r\sin^2\theta\cos^2\phi dr \wedge d\phi - r\sin^2\theta\sin^2\phi d\phi \wedge dr) \wedge (-r\sin\theta d\theta) \\
&= r^2\sin\theta\cos^2\phi d\theta \wedge d\phi \wedge dr - r^2\sin^3\theta dr \wedge d\phi \wedge d\theta = r^2\sin\theta dr \wedge d\theta \wedge d\phi
\end{aligned}
$$

ちなみに座標変換 $(x, y, z) \to (r, \theta, \phi)$ のヤコビアンは

$$
\begin{vmatrix}
\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\
\frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \\
\frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \phi}
\end{vmatrix} = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \phi)} = r^2\sin\theta
$$

最後に，n 次元空間での一般論を展開しておきます。座標変換 $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{y}$ を考えます。この変換で k 次微分形式 $u = \displaystyle\sum_{i_1<i_2<\cdots<i_k} a_{i_1\cdots i_k}(\boldsymbol{x})dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{ik}$ は

$$
u = \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_k} a_{i_1\cdots i_k}(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{y}))dx_{i_1}(\boldsymbol{y}) \wedge dx_{i_2}(\boldsymbol{y}) \wedge \cdots \wedge dx_{ik}(\boldsymbol{y}) \tag{3.83}
$$

と表すことができます。ただし，$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{y})$ は変換前の座標 $\boldsymbol{x}$ を変換後の新座標 $\boldsymbol{y}$ の関数として表した座標とします。

$$
dx_i(\boldsymbol{y}) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x_i(\boldsymbol{y})}{\partial y_j}dy_j
$$

なので

$$
\begin{aligned}
dx_{i_1}(\boldsymbol{y}) \wedge dx_{i_2}(\boldsymbol{y}) \wedge \cdots \wedge dx_{ik}(\boldsymbol{y}) &= \begin{vmatrix}
\frac{\partial x_{i_1}}{\partial y_{j_1}} & \frac{\partial x_{i_1}}{\partial y_{j_2}} & \cdots & \frac{\partial x_{i_1}}{\partial y_{j_k}} \\
\frac{\partial x_{i_2}}{\partial y_{j_1}} & \frac{\partial x_{i_2}}{\partial y_{j_2}} & \cdots & \frac{\partial x_{i_2}}{\partial y_{j_k}} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\frac{\partial x_{i_k}}{\partial y_{j_1}} & \frac{\partial x_{i_k}}{\partial y_{j_2}} & \cdots & \frac{\partial x_{i_k}}{\partial y_{j_k}}
\end{vmatrix} dy_{j_1} \wedge dy_{j_2} \wedge \cdots \wedge dy_{j_k} \\
&= \frac{\partial(x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_k})}{\partial(y_{j_1}, y_{j_2}, \cdots, y_{j_k})} dy_{j_1} \wedge dy_{j_2} \wedge \cdots \wedge dy_{j_k}
\end{aligned}
$$

が得られます。これから (3.83) は

$$
\begin{aligned}
u &= \sum_{\substack{i_1<i_2<\cdots<i_k \\ j_1<j_2<\cdots<j_k}} a_{i_1\cdots i_k}(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{y})) \frac{\partial(x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_k})}{\partial(y_{j_1}, y_{j_2}, \cdots, y_{j_k})} dy_{j_1} \wedge dy_{j_2} \wedge \cdots \wedge dy_{j_k} \\
&= \sum_{j_1<j_2<\cdots<j_k} b_{j_1\cdots j_k}(\boldsymbol{y}) dy_{j_1} \wedge dy_{j_2} \wedge \cdots \wedge dy_{j_k}
\end{aligned} \tag{3.84}
$$

となります。ただし

$$
b_{j_1\cdots j_k}(\boldsymbol{y}) = \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_k} a_{i_1\cdots i_k}(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{y})) \frac{\partial(x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_k})}{\partial(y_{j_1}, y_{j_2}, \cdots, y_{j_k})} dy_{j_1} \wedge dy_{j_2} \wedge \cdots \wedge dy_{j_k}
$$

以上で微分形式のお話は終了して本論に戻ることにします。

3.3　曲面論の基礎方程式

(3.16) で導出した，フルネ･セレーの公式に相当する曲面論の基礎方程式を再掲すると $\omega_i^j = -\omega_j^i$ を考慮して

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{e}_1 &= \omega_1^1\boldsymbol{e}_1 + \omega_1^2\boldsymbol{e}_2 + \omega_1^3\boldsymbol{e}_3 \\ d\boldsymbol{e}_2 &= \omega_2^1\boldsymbol{e}_1 + \omega_2^2\boldsymbol{e}_2 + \omega_2^3\boldsymbol{e}_3 \\ d\boldsymbol{e}_3 &= \omega_3^1\boldsymbol{e}_1 + \omega_3^2\boldsymbol{e}_2 + \omega_3^3\boldsymbol{e}_3 \end{aligned} \longrightarrow d\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_1^2 & \omega_1^3 \\ -\omega_1^2 & 0 & \omega_2^3 \\ -\omega_1^3 & -\omega_2^3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_3 \end{pmatrix} \tag{3.85}$$

でした。$\omega_1^2, \omega_1^3, \omega_2^3$ を適当に与えたとき，(3.85) が解ければ $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ が求まります。また，(3.6) を再掲すると

$$d\boldsymbol{p} = \theta^1\boldsymbol{e}_1 + \theta^2\boldsymbol{e}_2 \tag{3.86}$$

で，θ^1, θ^2 を与えれば (3.86) を解くことで曲面 $\boldsymbol{p}$ が定まるはずです。しかし，(3.85) や (3.86) は常微分方程式ではなく[16]偏微分方程式です。偏微分方程式の場合，常微分微分方程式と異なり解の存在は必ずしも保証されていません。今の場合，解が存在するための $\omega_1^2, \omega_1^3, \omega_2^3, \theta^1, \theta^2$ が満たすべき**積分可能条件（可積分条件）**を求める必要があります。それを以下に求めていきます。

3.3.1　構造方程式

●第 1 構造方程式

(3.86) の両辺を外微分すると $dd\boldsymbol{p} = 0$ なので[17]，(3.66) と (3.16) を使うと[18]

$$\begin{aligned} 0 &= d\theta^1\boldsymbol{e}_1 - \theta^1\wedge d\boldsymbol{e}_1 + d\theta^2\boldsymbol{e}_2 - \theta^2\wedge d\boldsymbol{e}_2 \\ &= d\theta^1\boldsymbol{e}_1 - \theta^1\wedge\sum_{j=1}^{3}\omega_1^j\boldsymbol{e}_j + d\theta^2\boldsymbol{e}_2 - \theta^2\wedge\sum_{j=1}^{3}\omega_2^j\boldsymbol{e}_j \\ &= \left(d\theta^1 - \sum_{j=1}^{2}\theta^j\wedge\omega_j^1\right)\boldsymbol{e}_1 + \left(d\theta^2 - \sum_{j=1}^{2}\theta^j\wedge\omega_j^2\right)\boldsymbol{e}_2 - \sum_{j=1}^{2}\theta^j\wedge\omega_j^3\boldsymbol{e}_3 \end{aligned}$$

$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ は 1 次独立なので，前式の 2 項と 3 項目より

$$d\theta^i = \sum_{j=1}^{2}\theta^j\wedge\omega_j^i \longrightarrow \begin{cases} d\theta^1 = \theta^2\wedge\omega_2^1 \\ d\theta^2 = \theta^2\wedge\omega_1^2 \end{cases} \tag{3.87}$$

$$0 = \sum_{j=1}^{2}\theta^j\wedge\omega_j^3 \longrightarrow \theta^1\wedge\omega_1^3 + \theta^2\wedge\omega_2^3 = 0 \tag{3.88}$$

を得ます。まとめて

$$\begin{cases} d\theta^1 = \theta^2\wedge\omega_2^1 \\ d\theta^2 = \theta^1\wedge\omega_1^2 \\ \theta^1\wedge\omega_1^3 + \theta^2\wedge\omega_2^3 = 0 \end{cases} \tag{3.89}$$

を**第 1 構造方程式**と呼んでいます。

---

[16] $\boldsymbol{e}_i$ は u, v の関数であることに注意！
[17] ポアンカレの補助定理を思い出そう。
[18] θ^1, θ^2 は 1 次微分形式であることに留意。

●第 2 構造方程式

(3.21) を

$$\omega_j^3 = \sum_{k=1}^{2} b_{jk}\theta^k \quad (j = 1,\, 2) \tag{3.90}$$

と書いて (3.88) に入れると

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{j,k=1}^{2} b_{jk}\theta^j{\wedge}\theta^k = b_{11}\theta^1{\wedge}\theta^1 + b_{12}\theta^1{\wedge}\theta^2 + b_{21}\theta^2{\wedge}\theta^1 + b_{22}\theta^2{\wedge}\theta^2 \\ &= (b_{12} - b_{21})\theta^1{\wedge}\theta^2 = (b_{12} - b_{21})\mathtt{det}\boldsymbol{A}(du{\wedge}dv) \end{aligned} \tag{3.91}$$

$\mathtt{det}\boldsymbol{A} \neq 0$，$du, dv$ は一次独立なので，$b_{12} = b_{21}$ を得ます。これから行列 $\boldsymbol{B}$ は対称行列であることが分かります。このことは既に (3.29) で求めましたが，外微分形式を使うといとも簡単に得られますね！

(3.85) を外微分すると $d(d\boldsymbol{e}_j) = 0$ から

$$\begin{aligned} 0 = d(d\boldsymbol{e}_j) &= d\left(\sum_{i=1}^{3} \omega_j^i \boldsymbol{e}_j\right) = \sum_{i=1}^{3} d\omega_j^i \boldsymbol{e}_i - \sum_{i=1}^{3} \omega_j^i{\wedge}d\boldsymbol{e}_i \\ &= \sum_{i=1}^{3} d\omega_j^i \boldsymbol{e}_i - \sum_{i=1}^{3} \omega_j^i{\wedge}\left(\sum_{k=1}^{3} \omega_i^k \boldsymbol{e}_k\right) \\ &= \sum_{i=1}^{3}\left(d\omega_j^i - \sum_{k=1}^{3} \omega_j^k{\wedge}\omega_k^i\right)\boldsymbol{e}_i \end{aligned}$$

これから

$$d\omega_j^i - \sum_{k=1}^{3} \omega_j^k{\wedge}\omega_k^i = 0 \tag{3.92}$$

を得ます。ω_j^i のつくる行列は交代行列で $i = j$ のとき $\omega_i^j = 0$ となるので (3.92) より

$$\begin{cases} d\omega_2^1 = \displaystyle\sum_{k=1}^{3} \omega_2^k{\wedge}\omega_k^1 = \omega_2^3{\wedge}\omega_3^1 \\ d\omega_2^3 = \displaystyle\sum_{k=1}^{3} \omega_2^k{\wedge}\omega_k^3 = \omega_2^1{\wedge}\omega_1^3 \\ d\omega_1^3 = \displaystyle\sum_{k=1}^{3} \omega_1^k{\wedge}\omega_k^3 = \omega_1^2{\wedge}\omega_3^2 \end{cases} \tag{3.93}$$

を得ます。これを**コダッチの方程式**と呼んでいます。以上求めた第 1 構造方程式とコダッチの方程式が求める**積分可能条件**となります。つまり，これらの方程式を満たす ω_i^j, θ^i が存在すれば，(3.8), (3.22) を第 1 基本形式，第 2 基本形式とする曲面が存在することになります。

(3.93) の第 1 式をさらに展開してみます。(3.90) を使うと

$$\omega_2^3 = \sum_{k=1}^{2} b_{2k}\theta^k, \quad \omega_3^1 = -\omega_1^3 = -\sum_{k=1}^{2} b_{1k}\theta^k \tag{3.94}$$

と書けるので，(3.93) の第 1 式は

$$\begin{aligned} d\omega_2^1 = \omega_2^3{\wedge}\omega_3^1 &= -(b_{21}\theta^1 + b_{22}\theta^2) \wedge (b_{11}\theta^1 + b_{12}\theta^2) \\ &= (b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12})\theta^1{\wedge}\theta^2 = \mathtt{det}\boldsymbol{B}(\theta^1{\wedge}\theta^2) \\ &= K\theta^1{\wedge}\theta^2, \quad K = b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21} \end{aligned} \tag{3.95}$$

となります。K はガウス曲率です。(3.95) は**第 2 構造方程式**とか**ガウスの方程式**と呼ばれます。

$\omega_2^1, \theta_1, \theta_2$ は接平面内のベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ で定義された量で，これは内在的な量です。一方，ガウス曲率 K は外在的な量であることは§3.1.3 で述べましたが，しかし，(3.95) によればガウス曲率は内在的な量で表されるということになります！

この点をもう少し追求してみます。曲面上の点 $\boldsymbol{p}$ を原点に取り，$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ を基底ベクトルにとって考えると，$d\boldsymbol{p} = (dx_1, dx_2, dx_3)$, $\boldsymbol{e}_1 = (1,0,0)$, $\boldsymbol{e}_2(0,1,0)$ となります。この点では

$$d\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{e}_1 = dx_1 = \theta^1, \quad d\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{e}_2 = dx_2 = \theta^2 \quad \therefore\ \theta^1\wedge\theta^2 = dx_1\wedge dx_2$$

この様にとった座標軸について曲面の式を $x_3 = f(x_1, x_2)$ とすると，この点での面積要素 dS は 2 重積分の公式より $dS = \sqrt{1 + f_{x_1}(0,0)^2 + f_{x_2}(0,0)^2}\,dx_1\wedge dx_2 = dx_1\wedge dx_2$ で与えられるので，$\theta^1\wedge\theta^2$ は面積要素 dS となります[19]。

$$dS = \theta^1\wedge\theta^2 \tag{3.96}$$

また，(3.16) より $d\boldsymbol{e}_3 = \omega_3^1\boldsymbol{e}_1 + \omega_3^2\boldsymbol{e}_2$ で，これは (3.86) と同じ格好をしていることから，原点から引いた $\boldsymbol{e}_3$ の端点が描く球面上の面素 $d\sigma$ を与えると考えられます。

$$d\sigma = \omega_3^1\wedge\omega_3^2 = d\omega_2^1 \tag{3.97}$$

これらのことから

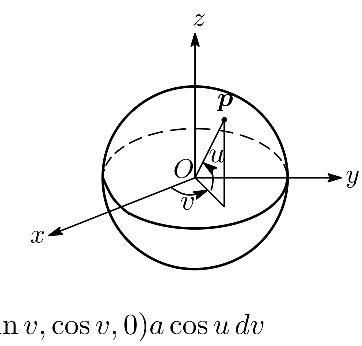
$$K = \frac{d\omega_2^1}{\theta^1\wedge\theta^2} = \frac{d\sigma}{dS} \tag{3.98}$$

となり，ガウス曲率は局所的な面積の比で与えられるということが分かります。つまり，ガウス曲率は第 1 基本量だけで与えられるということですね。

- **例.19** 半径 a の球[20]

1. 接ベクトル $\boldsymbol{p}_u$ と $\boldsymbol{p}_v$ は直交

$$\boldsymbol{p}(u,v) = (a\cos u\cos v, a\cos u\sin v, a\sin u)$$
$$\boldsymbol{p}_u = (-\sin u\cos v, -\sin u\sin v, \cos u)a,\ \ \boldsymbol{p}_v = (-\sin v, \cos v, 0)a\cos u, \boldsymbol{p}_u\cdot\boldsymbol{p}_v = 0$$



2. 正規直交基底 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$

$$\begin{aligned}
&|\boldsymbol{p}_u| = a, \quad |\boldsymbol{p}_v| = a\cos u\\
&\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{p}_u/|\boldsymbol{p}_u| = (-\sin u\cos v, -\sin u\sin v, \cos u)\\
&\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{p}_v/|\boldsymbol{p}_v| = (-\sin v, \cos v, 0)\\
&\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2 = (-\cos u\cos v, -\cos u\sin v, -\sin u) = -(1/a)\boldsymbol{p}\\
&d\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_u du + \boldsymbol{p}_v dv = (-\sin u\cos v, -\sin u\sin v, \cos u)adu + (-\sin v, \cos v, 0)a\cos u\,dv\\
&\quad = \boldsymbol{e}_1 adu + \boldsymbol{e}_2 a\cos u\,dv = \theta^1\boldsymbol{e}_1 + \theta^2\boldsymbol{e}_2 \quad \therefore \theta_1 = adu,\ \theta^2 = a\cos u\,dv
\end{aligned}$$

3. 行列 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$, ガウス曲率 K，平均曲率 H
(3.3) より

$$(\boldsymbol{p}_u\ \boldsymbol{p}_v) = (\boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{A} \longrightarrow (|\boldsymbol{p}_u|\,\boldsymbol{e}_1\ \ |\boldsymbol{p}_v|\,\boldsymbol{e}_2) = (\boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{A}$$
$$\therefore \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} |\boldsymbol{p}_u| & 0 \\ 0 & |\boldsymbol{p}_v| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a\cos u \end{pmatrix}$$

[19] §3.1.1 で球面で求めた θ^1, θ^2 のウエッジ積は $\theta^1\wedge\theta^2 = r^2\sin u\,dudv$，これは球面の面積要素 dS ですね
[20] u のとり方が先ほどの例と異なっている点に注意。書き換えるのが面倒なのでそのままにしておいた。

$$\begin{aligned}
d\boldsymbol{e}_1 &= \frac{\partial \boldsymbol{e}_1}{\partial u}du + \frac{\partial \boldsymbol{e}_1}{\partial v}dv \\
&= (-\cos u \cos v\, du + \sin u \sin v\, dv, -cos u \sin v\, du - \sin u \cos v\, dv, -\sin u\, du) \\
&= -\boldsymbol{e}_2 \sin u\, dv + \boldsymbol{e}_3 du = \omega_1^2 \boldsymbol{e}_2 + \omega_1^3 \boldsymbol{e}_3 \\
d\boldsymbol{e}_2 &= \frac{\partial \boldsymbol{e}_2}{\partial u}du + \frac{\partial \boldsymbol{e}_2}{\partial v}dv = (-\cos v\, dv, -\sin v\, dv, 0) \\
&= \boldsymbol{e}_1 \sin u dv + \boldsymbol{e}_3 \cos u dv = \omega_2^1 \boldsymbol{e}_1 + \omega_2^3 \boldsymbol{e}_3 \\
d\boldsymbol{e}_3 &= \frac{\partial \boldsymbol{e}_3}{\partial u}du + \frac{\partial \boldsymbol{e}_3}{\partial v}dv = (\sin u \cos v\, du + \cos u \sin v\, dv, \sin u \sin v\, dv - \cos u \cos v\, dv, -\cos u\, du) \\
&= -\boldsymbol{e}_1 du - \boldsymbol{e}_2 \cos u dv = \omega_3^1 \boldsymbol{e}_1 + \omega_3^2 \boldsymbol{e}_3 \\
\therefore & \begin{pmatrix} \omega_1^1 & \omega_1^2 & \omega_1^3 \\ \omega_2^1 & \omega_2^2 & \omega_2^3 \\ \omega_3^1 & \omega_3^2 & \omega_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\sin u\, dv & du \\ \sin u\, dv & 0 & \cos u\, dv \\ -du & -\cos u\, dv & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

第 2 構造方程式より

$$\begin{aligned}
d\omega_2^1 &= d(\sin u dv) = \cos u du \wedge dv = \frac{1}{a^2}(a du)\wedge(a \cos u dv) \\
&= \frac{1}{a^2}\theta^1 \wedge \theta^2 = K\theta^1 \wedge \theta^2 \quad \therefore K = \frac{1}{a^2}
\end{aligned}$$

(3.21) より

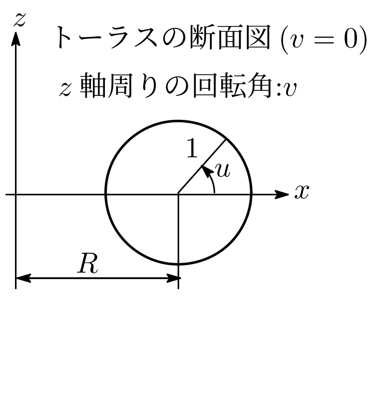
$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_1^3 = b_{11}\theta^1 + b_{12}\theta^2 \\ \omega_2^3 = b_{21}\theta^1 + b_{22}\theta^2 \end{array} \right. \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} du = b_{11} a du + b_{12} a \cos u\, dv \\ \cos u\, dv = b_{21} a du + b_{22} a \cos u\, dv \end{array} \right. \longrightarrow b_{11} = \frac{1}{a},\, b_{22} = \frac{1}{a}$$

$$\therefore \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1/a & 0 \\ 0 & 1/a \end{pmatrix}$$

(3.34) より

$$K = \mathtt{det}\boldsymbol{B} = \frac{1}{a^2}, \quad H = \frac{1}{2}\mathtt{Tr}\boldsymbol{B} = \frac{1}{a} \tag{3.99}$$

- **例.20** トーラス



1. $\boldsymbol{p}_u$ と $\boldsymbol{p}_v$ は直行する。

$$\begin{aligned}
x = (R + \cos u)\cos v, &\quad y = (R + \cos u)\sin v, \quad z = \sin u \\
\boldsymbol{p}(u, v) &= ((R + \cos u)\cos v, (R + \cos u)\sin v, \sin u) \\
\boldsymbol{p}_u &= (-\sin u \cos v, -\sin u \sin v, \cos u) \\
\boldsymbol{p}_v &= (-(R + \cos u)\sin v, (R + \cos u)\cos v, 0) \\
\boldsymbol{p}_u \cdot \boldsymbol{p}_v &= 0
\end{aligned}$$

2. 正規直交基底 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ を求めます。

$$\begin{aligned}
&|\boldsymbol{p}_u| = 1, \quad |\boldsymbol{p}_v| = R + \cos u \\
&\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{p}_u / |\boldsymbol{p}_u| = (-\sin u \cos v, -\sin u \sin v, \cos u), \quad \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{p}_v / |\boldsymbol{p}_v| = (-\sin v, \cos v, 0) \\
&\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2 = (-\cos u \cos v, -\cos u \sin v, -\sin u)
\end{aligned}$$

3. 行列 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ とガウス曲率 K，平均曲率 H を求めます。(3.3) より

$$(\boldsymbol{p}_u\ \boldsymbol{p}_v) = (\boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{A} \longrightarrow (|\boldsymbol{p}_u|\,\boldsymbol{e}_1\ \ |\boldsymbol{p}_v|\,\boldsymbol{e}_2) = (\boldsymbol{e}_1\ \ \boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{A}$$

$$\therefore \begin{cases} |\boldsymbol{p}_u|\,\boldsymbol{e}_1 = a_1^1\boldsymbol{e}_1 + a_1^2\boldsymbol{e}_2 \\ |\boldsymbol{p}_v|\,\boldsymbol{e}_2 = a_2^1\boldsymbol{e}_1 + a_2^2\boldsymbol{e}_2 \end{cases} \longrightarrow a_1^1 = |\boldsymbol{p}_u| = 1,\, a_1^2 = 0,\, a_2^1 = 0,\, a_2^2 = |\boldsymbol{p}_v| = R + \cos u$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R + r\cos u \end{pmatrix}$$

また，

$$d\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_u du + \boldsymbol{p}_v dv = \boldsymbol{e}_1 du + \boldsymbol{e}_2(R + \cos u)dv$$
$$\therefore \theta^1 = du, \quad \theta^2 = (R + \cos u)dv$$

$$d\boldsymbol{e}_1 = \frac{\partial \boldsymbol{e}_1}{\partial u}du + \frac{\partial \boldsymbol{e}_1}{\partial v}dv = -\boldsymbol{e}_2 \sin u\, dv + \boldsymbol{e}_3 du = \omega_1^2\boldsymbol{e}_2 + \omega_1^3\boldsymbol{e}_3$$
$$d\boldsymbol{e}_2 = \frac{\partial \boldsymbol{e}_2}{\partial u}du + \frac{\partial \boldsymbol{e}_2}{\partial v}dv = \boldsymbol{e}_1 \sin u dv + \boldsymbol{e}_3 \cos u dv = \omega_2^1\boldsymbol{e}_1 + \omega_2^3\boldsymbol{e}_3$$
$$d\boldsymbol{e}_3 = \frac{\partial \boldsymbol{e}_3}{\partial u}du + \frac{\partial \boldsymbol{e}_3}{\partial v}dv == -\boldsymbol{e}_1 du - \boldsymbol{e}_2 \cos u dv = \omega_3^1\boldsymbol{e}_1 + \omega_3^2\boldsymbol{e}_3$$
$$\therefore \begin{pmatrix} \omega_1^1 & \omega_1^2 & \omega_1^3 \\ \omega_2^1 & \omega_2^2 & \omega_2^3 \\ \omega_3^1 & \omega_3^2 & \omega_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\sin u\, dv & du \\ \sin u\, dv & 0 & \cos u\, dv \\ -du & -\cos u\, dv & 0 \end{pmatrix}$$

第 2 構造方程式より

$$d\omega_2^1 = d(\sin u dv) = \cos u\, du{\wedge}dv = \frac{\cos u}{R + \cos u}\theta^1{\wedge}\theta^2 = K\theta^1{\wedge}\theta$$
$$\therefore K = \frac{\cos u}{R + cosu)}$$

また，行列 $\boldsymbol{B}$ と平均曲率 H は

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{\cos u}{R + cosu} \end{pmatrix}, \quad H = \frac{1}{2}\mathtt{Tr}\boldsymbol{B} = \frac{R + 2\cos u}{2(R + \cos u)}$$

3.4 測地線

最後にクリストッフェルの記号と測地線について触れてこのレポートを終了したいと思います。

3.4.1 クリストッフェルの記号

曲面 $\boldsymbol{p}(u, v)$ の第 2 基本量は 2 階偏導関数 $\boldsymbol{p}_{uu}, \boldsymbol{p}_{uv}, \boldsymbol{p}_{vu}, \boldsymbol{p}_{vv}$ の法線方向成分として表されました。$\boldsymbol{e}$ を法単位ベクトルとすると

$$\begin{cases} L = \boldsymbol{p}_{uu} \cdot \boldsymbol{e} \quad M = \boldsymbol{p}_{uv} \cdot \boldsymbol{e} \\ M = \boldsymbol{p}_{vu} \cdot \boldsymbol{e} \quad N = \boldsymbol{p}_{vv} \cdot \boldsymbol{e} \end{cases}, \quad \boldsymbol{p}_u \cdot \boldsymbol{e} = 0, \quad \boldsymbol{p}_v \cdot \boldsymbol{e} = 0 \tag{3.100}$$

曲面の各点で $\boldsymbol{p}_u$, $\boldsymbol{p}_v$, $\boldsymbol{e}$ は 1 次独立なので，空間内のすべてのベクトルはこの 3 つのベクトルの 1 次結合で表せます。いま，8 個の関数 $\Gamma_{uu}^u, \Gamma_{uv}^u, \cdots, \Gamma_{vv}^v$ を使って $\boldsymbol{p}_{uu}, \boldsymbol{p}_{uv}, \cdots$ を接平面方向の成分と法線方向の成分の 1 次結合として表すと

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p}_{uu} &= \Gamma_{uu}^u\boldsymbol{p}_u + \Gamma_{uu}^v\boldsymbol{p}_v + L\boldsymbol{e} \\ \boldsymbol{p}_{uv} &= \Gamma_{uv}^u\boldsymbol{p}_u + \Gamma_{uv}^v\boldsymbol{p}_v + M\boldsymbol{e} \\ \boldsymbol{p}_{vu} &= \Gamma_{vu}^u\boldsymbol{p}_u + \Gamma_{vu}^v\boldsymbol{p}_v + M\boldsymbol{e} \\ \boldsymbol{p}_{vv} &= \Gamma_{vv}^u\boldsymbol{p}_u + \Gamma_{vv}^v\boldsymbol{p}_v + N\boldsymbol{e} \end{aligned} \tag{3.101}$$

と表すことができます[21]。8 個の関数 $\Gamma^u_{uu}, \cdots, \Gamma^v_{vv}$ を**クリストッフェルの記号**といい，

$$\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} = \begin{Bmatrix} \gamma \\ \alpha\beta \end{Bmatrix} \tag{3.102}$$

とも書かれます。(3.101) は**ガウスの式**と呼ばれます[22]。8 個の関数 $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}(u,v)$ は $\boldsymbol{p}_{uv} = \boldsymbol{p}_{vu}$ なので[23]

$$\Gamma^u_{uv} = \Gamma^u_{vu}, \quad \Gamma^v_{uv} = \Gamma^v_{vu} \tag{3.103}$$

となって，実質的には 6 個の関数からなります。

法単位ベクトル $\boldsymbol{e}$ の u, v 微分に関しては次の式が成り立ちます。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_u &= \frac{FM-GL}{EG-F^2}\boldsymbol{p}_u + \frac{FL-EM}{EG-F^2}\boldsymbol{p}_v \\ \boldsymbol{e}_v &= \frac{FN-GM}{EG-F^2}\boldsymbol{p}_u + \frac{FM-EN}{EG-F^2}\boldsymbol{p}_v \end{aligned} \tag{3.104}$$

これを**ワインガルテンの式**といいますが，この式は次のようにして証明できます。$\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{e} = 1$ を u で微分すると $\boldsymbol{e}_u \cdot \boldsymbol{e} = 0$ となり，これから $\boldsymbol{e}_u$ は法単位ベクトル $\boldsymbol{e}$ に垂直で，$\boldsymbol{p}_u$ と $\boldsymbol{p}_v$ で張られる接平面内にあることが分かります。つまり

$$\boldsymbol{e}_u = \xi\boldsymbol{p}_u + \eta\boldsymbol{p}_v \tag{3.105}$$

両辺の $\boldsymbol{p}_u$, $\boldsymbol{p}_v$ との内積をとれば (2.7)，(2.23) を使って

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p}_u \cdot \boldsymbol{e}_u = \xi\boldsymbol{p}_u\cdot\boldsymbol{p}_u + \eta\boldsymbol{p}_u\cdot\boldsymbol{p}_v &\longrightarrow -L = \xi E + \eta F \\ \boldsymbol{p}_v \cdot \boldsymbol{e}_u = \xi\boldsymbol{p}_v\cdot\boldsymbol{p}_u + \eta\boldsymbol{p}_v\cdot\boldsymbol{p}_v &\longrightarrow -M = \xi F + \eta G \end{aligned}$$

ξ, η について解いて

$$\xi = \frac{\begin{vmatrix} -L & F \\ -M & G \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix}} = \frac{FM-GL}{EG-F^2}, \quad \eta = \frac{FL-EM}{EG-F^2} \tag{3.106}$$

$\boldsymbol{e}_v$ についても同様にすれば (3.104) が証明できます。

$\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}$ は第 1 基本量である E, F, G とその u, v についての偏微分を使って表すことができます。

$$\begin{aligned} E = \boldsymbol{p}_u\cdot\boldsymbol{p}_u \to E_u &= \frac{\partial}{\partial u}(\boldsymbol{p}_u\cdot\boldsymbol{p}_u) = 2\boldsymbol{p}_u\cdot\boldsymbol{p}_{uu} \\ \therefore\ \boldsymbol{p}_u\cdot\boldsymbol{p}_{uu} &= \frac{1}{2}E_u \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p}_u\cdot\boldsymbol{p}_{uu} = \Gamma^u_{uu}\boldsymbol{p}_u\cdot\boldsymbol{p}_u + \Gamma^{uu}_{v}\boldsymbol{p}_u\cdot\boldsymbol{p}_v + L\boldsymbol{p}_u\cdot\boldsymbol{e} &= \Gamma^u_{uu}E + \Gamma^{uu}_{v}F \\ \therefore\ \Gamma^u_{uu}E + \Gamma^v_{uu}F &= \frac{1}{2}E_u \end{aligned} \tag{3.107}$$

[21] 両辺に $\boldsymbol{e}$ と内積をとれば，$\boldsymbol{p}_u\cdot\boldsymbol{e} = 0, \boldsymbol{p}_v\cdot\boldsymbol{e} = 0$ からすぐ分かりますね。

[22] $h_{\alpha\alpha} = L, h_{\alpha\beta} = h_{\beta\alpha} = M, h_{\beta\beta} = N$ とするとガウスの式は次のようにも書けます。

$$\boldsymbol{p}_{\alpha\beta} = \sum_\gamma \begin{Bmatrix} \gamma \\ \alpha\beta \end{Bmatrix} \boldsymbol{p}_\gamma + h_{\alpha\beta}\boldsymbol{e}$$

[23] $\boldsymbol{p}(u,v)$ は C^∞ 以上としている。

同様にして

$$\left.\begin{aligned} E_v &= 2\boldsymbol{p}_u \cdot \boldsymbol{p}_{uv} \\ F_u &= \boldsymbol{p}_v \cdot \boldsymbol{p}_{uu} + \boldsymbol{p}_u \cdot \boldsymbol{p}_{vv} \end{aligned}\right\} \to \boldsymbol{p}_v \cdot \boldsymbol{p}_{uu} = F_u - \frac{1}{2}E_v$$

$$\therefore\ \Gamma^u_{uu}F + \Gamma^v_{uu}G = F_u - \frac{1}{2}E_v \tag{3.108}$$

(3.107) と (3.108) の $\Gamma^u_{uu}, \Gamma^v_{uu}$ に関する連立方程式を解いて

$$\Gamma^u_{uu} = \frac{GE_u - 2FF_u + FE_v}{2(EG - F^2)} \tag{3.109}$$

$$\Gamma^v_{uu} = \frac{-FE_u + 2EF_u - EE_v}{2(EG - F^2)} \tag{3.110}$$

を得ます。同様にして連立方程式を立てて解いていくと残り 4 個の $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}$ は

$$\Gamma^u_{uv} = \frac{GE_v - FG_u}{2(EG - F^2)} \tag{3.111}$$

$$\Gamma^v_{uv} = \frac{EG_u - FE_v}{2(EG - F^2)} \tag{3.112}$$

$$\Gamma^u_{vv} = \frac{2GF_v - GG_u - FG_v}{2(EG - F^2)} \tag{3.113}$$

$$\Gamma^v_{vv} = \frac{-2FF_v + FG_u + EG_v}{2(EG - F^2)} \tag{3.114}$$

と得られます。$\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}$ は第 1 基本量とその偏微分だけで構成されていることに留意しておいてください。

例.22 第 1 基本形式，第 2 基本形式がそれぞれ次のように与えられる曲面があるとします。

$$\begin{aligned} I &= E(du)^2 + 2Fdudv + G(dv)^2 = dudu + \cos^2 u dvdv \\ II &= L(du)^2 + 2M(dudv) + N(dv)^2 = dudu + \cos^2 u dvdv \end{aligned} \tag{3.115}$$

ガウスの式とワインガルテンの式を使って具体的に曲面の方程式を求めていきましょう。
　与式より $E = 1,\ F = 0,\ G = \cos^2 u,\ L = 1,\ M = 0,\ N = \cos^2 v$
クリストッフェルの記号を計算すると

$$\begin{cases} \Gamma^u_{uu} = 0 & \Gamma^v_{uv} = -\tan v \\ \Gamma^v_{uu} = 0 & \Gamma^u_{vv} = \sin u\ \cos u \\ \Gamma^u_{uv} = 0 & \Gamma^v_{vv} = 0 \end{cases}$$

これからガウスの式は

$$\begin{cases} \boldsymbol{p}_{uu} = \boldsymbol{e} \\ \boldsymbol{p}_{uv} = \boldsymbol{p}_v \tan u \\ \boldsymbol{p}_{vv} = \boldsymbol{p}_u \sin u \cos u + \boldsymbol{e} \cos^2 u \end{cases} \tag{3.116}$$

ワインガルテンの式は

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}_u = -\boldsymbol{p}_u \\ \boldsymbol{e}_v = -\boldsymbol{p}_v \end{cases} \tag{3.117}$$

となります。(3.116) の第 1 式と (3.117) の第 1 式より

$$\boldsymbol{p}_{uuu} + \boldsymbol{p}_u = 0$$

この解は

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{a}(v) \cos u + \boldsymbol{b}(v) \sin u + \boldsymbol{c}(v) \tag{3.118}$$

と得られます。これを (3.116) の第 2 式に入れて整理すると

$$\boldsymbol{b}'(v)\sec u + \boldsymbol{c}'(v)\tan u = 0, \quad \therefore \boldsymbol{b}' = \boldsymbol{c}' = 0 \quad (\boldsymbol{b}' = d\boldsymbol{b}/dv,\ \boldsymbol{c}' = d\boldsymbol{c}/dv)$$

となって，$\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ は定ベクトルであることが分かります。したがって (3.118) は

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{a}(v)\cos u + \boldsymbol{b}\sin u + \boldsymbol{c} \tag{3.119}$$

と書けます。これを (3.116) の第 3 式に入れると

$$\boldsymbol{a}''\cos u = -(a\sin u - b\cos u)\sin u\cos u + \boldsymbol{e}\cos^2 u$$

さらに v で偏微分すると

$$\boldsymbol{a}'''\cos u = -(\boldsymbol{a}'\sin^2 u - \boldsymbol{e}_v\cos u)\cos u$$

(3.117) の第 2 式より

$$\boldsymbol{e}_v = -\boldsymbol{a}'\cos u$$

これを上式に入れて

$$\boldsymbol{a}'''\cos u = -\boldsymbol{a}'\cos u, \quad \therefore\ \boldsymbol{a}''' + \boldsymbol{a}' = 0$$

$\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{l}$, $\boldsymbol{m}$ を定ベクトルとしてこの微分方程式の解は

$$\boldsymbol{a}(v) = \boldsymbol{k}\cos v + \boldsymbol{l}\sin v + \boldsymbol{m}$$

特に $\boldsymbol{m} = 0$ として[24]，これを (3.119) に入れると

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{k}\cos u\cos v + \boldsymbol{l}\cos u\sin v + \boldsymbol{b}\sin u + \boldsymbol{c} \tag{3.120}$$

これから

$$\begin{cases} \boldsymbol{p}_u = -\boldsymbol{k}\sin u\cos v - \boldsymbol{l}\sin u\sin v + \boldsymbol{b}\cos u \\ \boldsymbol{p}_v = -\boldsymbol{k}\cos u\sin v + \boldsymbol{l}\cos u\cos v \end{cases}$$

$G = \boldsymbol{p}_v\cdot\boldsymbol{p}_v = \cos^2 u$ なので

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p}_v\cdot\boldsymbol{p}_v &= \cos^2 u \\ &= (-\boldsymbol{k}\cos u\sin v + \boldsymbol{l}\cos u\cos v)\cdot(-\boldsymbol{k}\cos u\sin v + \boldsymbol{l}\cos u\cos v) \\ &= ((\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k})\sin^2 v + (\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{l})\cos^2 v)\cos^2 u - 2(\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{k})\cos^2 u\sin v\cos v \end{aligned}$$

これから $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k} = 1$, $\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{l} = 1$, $\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{k} = 0$ となるように定ベクトル $\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{l}$, $\boldsymbol{m}$ を定めます。
同様に，$F = \boldsymbol{p}_u\cdot\boldsymbol{p}_v = 0$ なので

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p}_u\cdot\boldsymbol{p}_v &= 0 \\ &= (-\boldsymbol{k}\sin u\cos v - \boldsymbol{l}\sin u\sin v + \boldsymbol{b}\cos u)\cdot(-\boldsymbol{k}\cos u\sin v + \boldsymbol{l}\cos u\cos v) \\ &= \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{l}\cos^2 u\cos v - \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{k}\cos^2 u\sin v \end{aligned}$$

したがって $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{l} = \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{k} = 0$
また $E = \boldsymbol{p}_u\cdot\boldsymbol{p}_u = 1$ なので

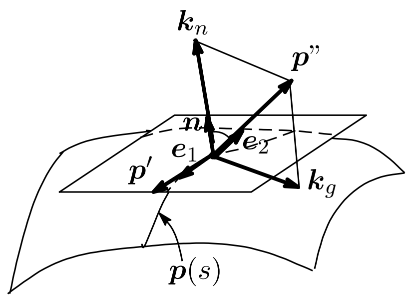
$$\boldsymbol{p}_u\cdot\boldsymbol{p}_u = 1 = \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}\cos^2 u + \sin^2 u, \quad \therefore\ \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b} = 1 \tag{3.121}$$

以上のことから，定ベクトル $\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{l}$, $\boldsymbol{b}$ は正規直交基底をつくることが分かります。したがって，解 (3.120) は点 $\boldsymbol{c}$ を原点とし，$\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{l}$, $\boldsymbol{b}$ をそれぞれ x, y, z 軸上の単位ベクトルとする直交座標軸をとれば，$x = \cos u\cos v$, $y = \cos u\sin v$, $z = \sin u$ で表される半径 1 の球面となります。

[24] ここで $m = 0$ と置かない場合，(3.121) で $1 = (\boldsymbol{b}\cos u - \boldsymbol{m}\sin u)^2 + \sin^2 u$ となり，$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b} = 1, \boldsymbol{m} = 0$。

3.4.2 測地曲率と測地線

空間曲線 $\boldsymbol{p}(s)=\boldsymbol{p}(u(s),v(s))$ の曲率を $\kappa=\left|\dfrac{d^2\boldsymbol{p}}{ds^2}\right|=|\boldsymbol{p}''(s)|$ で定義しました[25]。$\boldsymbol{p}'(s)$ は曲線 $\boldsymbol{p}(s)$ の接ベクトルで常に曲面 $\boldsymbol{p}(u,v)$ に接しています。



一方，$\boldsymbol{p}''(s)$ は一般に曲面に接しているわけでもなく，また垂直になっているわけでもありません。そこで，次のように曲面の接面方向と法線方向の和に分解します。

$$\boldsymbol{p}''(s)=\boldsymbol{k}_g(s)+\boldsymbol{k}_n(s) \tag{3.122}$$

$\boldsymbol{k}_g(s)$ を曲面上の曲線 $\boldsymbol{p}(s)$ の**測地的曲率ベクトル**，$\boldsymbol{k}_n(s)$ を**法曲率ベクトル**と呼んでいます。尚，曲面の法単位ベクトルを $\boldsymbol{n}$ とすると

$$\boldsymbol{k}_n=\kappa_n\boldsymbol{n} \tag{3.123}$$

で κ_n を**法曲率**ということは既に§2.4.1 で述べました。測地的曲率が至るところで $\boldsymbol{k}_g=0$ となっている曲線 $\boldsymbol{p}(s)$ を**測地線**といいます。測地線上では $\boldsymbol{p}''(s)=\boldsymbol{k}_n(s)$ で，$\boldsymbol{p}''(s)$ は曲面に対して常に垂直になっています。したがって，曲面上に直線[26]があればこれは測地線で，また，直線でない曲面上の曲線が測地線ならば，その上の各点における曲率ベクトルは法曲率ベクトルの方向と一致するということになります。

次に測地線が満たす微分方程式を求めます。曲線 $\boldsymbol{p}(s)$ の接単位ベクトルを $\boldsymbol{e}_1(s)$ とすると

$$\boldsymbol{e}_1=\frac{d\boldsymbol{p}(s)}{ds}=\frac{\partial\boldsymbol{p}}{\partial u}\frac{du}{ds}+\frac{\partial\boldsymbol{p}}{\partial v}\frac{dv}{ds}=\boldsymbol{p}_u u'+\boldsymbol{p}_v v' \tag{3.124}$$

曲率ベクトルを $\boldsymbol{k}=\kappa\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{e}_1'$ で定義すると (3.101) より

$$\begin{aligned}\boldsymbol{k}&=\frac{d}{ds}(\boldsymbol{p}_u u'+\boldsymbol{p}_v v')=\boldsymbol{p}_{uu}u'u'+2\boldsymbol{p}_{uv}u'v'+\boldsymbol{p}_{vv}v'v'+\boldsymbol{p}_u u''+\boldsymbol{p}_v v''\\&=\left(\Gamma^u_{uu}(u')^2+2\Gamma^u_{uv}u'v'+\Gamma^u_{vv}(v')^2+u''\right)\boldsymbol{p}_u\\&+\left(\Gamma^v_{uu}(u')^2+2\Gamma^v_{uv}u'v'+\Gamma^v_{vv}(v')^2+v''\right)\boldsymbol{p}_v\\&+\left(L(u')^2+2Mu'v'+N(v')^2\right)\boldsymbol{e}\end{aligned} \tag{3.125}$$

測地的曲率ベクトルは曲率ベクトル $\boldsymbol{k}$ の接平面方向の成分であるので

$$\begin{aligned}\boldsymbol{k}_g=&(\Gamma^u_{uu}u'u'+2\Gamma^u_{uv}u'v'+\Gamma^u_{vv}v'v'+u'')\boldsymbol{p}_u\\&+(\Gamma^v_{uu}u'u'+2\Gamma^v_{uv}u'v'+\Gamma^v_{vv}v'v'+v'')\boldsymbol{p}_v\end{aligned} \tag{3.126}$$

を得ます。曲線 $\boldsymbol{p}(s)$ が測地線であるための必要十分条件は $\boldsymbol{k}_g=0$ なので

$$\left\{\begin{aligned}&u''+\Gamma^u_{uu}(u')^2+2\Gamma^u_{uv}u'v'+\Gamma^u_{vv}(v')^2=0\\&v''+\Gamma^v_{uu}(u')^2+2\Gamma^v_{uv}u'v'+\Gamma^v_{vv}(v')^2=0\end{aligned}\right. \tag{3.127}$$

この 2 式をまとめて表すと

$$\frac{d^2u^\alpha}{ds^2}+\sum_{\beta,\gamma=1}^{2}\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\frac{du^\beta}{ds}\frac{du^\gamma}{ds}=0 \quad (\alpha=1,2) \tag{3.128}$$

---

[25] §1.2.1 参照。

[26] 直線の曲率は 0 で測地的曲率も 0。直線の概念を曲面にまで拡張するために測地線の概念が生まれたといわれる。

と書けます。この (3.127) あるいは (3.128) を**測地線の微分方程式**と呼んでいます。この微分方程式は $u(s)$, $v(s)$ に関する 2 階連立常微分方程式となっているので，$u' = w$, $v' = z$ とおいて階数を減らすと次の 1 階連立常微分方程式になります。

$$\begin{cases} u' = w \\ v' = z \\ w' = -\Gamma^u_{uu} w^2 - 2\Gamma^u_{uv} wz - \Gamma^u_{vv} z^2 \\ z' \ = -\Gamma^v_{uu} w^2 - 2\Gamma^v_{uv} wz - \Gamma^v_{uu} w^2 \end{cases} \tag{3.129}$$

1 階連立常微分方程式では，初期条件を決めれば解はただ 1 つ決まります（解の一意性）。曲面上の 1 点を $\boldsymbol{p}_0(u_0, v_0)$，その点における曲面の接単位ベクトル $\boldsymbol{X}_0$ とします。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p}_0 &= \boldsymbol{p}(u(0), v(0)) \\ \boldsymbol{X}_0 &= \left.\frac{d\boldsymbol{p}(s)}{ds}\right|_{s=0} = w(0)\boldsymbol{p}_u(u(0), v(0)) + z(0)\boldsymbol{p}_v(u(0), v(0)) \end{aligned} \tag{3.130}$$

これを初期条件として与えると，解の一意性により，点 $\boldsymbol{p}_0$ を通り接単位ベクトル $\boldsymbol{X}_0$ に接する測地線 ((3.129) の微分方程式の解）はただ 1 つ決まるということになります。

例.23 回転面 $x_1 = u\cos v$, $x_2 = u\sin v$, $x_3 = f(u)$ の測地線

$$\boldsymbol{p} = (u\cos v,\ u\sin v,\ f(u))$$

$$\begin{cases} \Gamma^u_{uu} = \dfrac{f' f''}{1+f'^2}, & \Gamma^v_{uu} = 0 \\ \Gamma^u_{uv} = 0, & \Gamma^v_{uv} = \dfrac{1}{u} \\ \Gamma^u_{vv} = -\dfrac{u}{1+f'^2}, & \Gamma^v_{vv} = 0 \end{cases}$$

(3.127) より

$$\begin{cases} \dfrac{d^2u}{ds^2} + \dfrac{f' f''}{(1+f'^2)}\left(\dfrac{du}{ds}\right)^2 - \dfrac{u}{1+f'^2}\left(\dfrac{dv}{ds}\right)^2 = 0 \\ \dfrac{d^2v}{ds^2} + \dfrac{2}{u}\dfrac{du}{ds}\dfrac{dv}{ds} = 0 \end{cases} \tag{3.131}$$

$dv/ds = V$ とおいて第 2 式より

$$\frac{1}{V}\frac{dV}{ds} + \frac{2}{u}\frac{du}{ds} = 0 \to \frac{d}{ds}(\ln u^2 V) = 0 \quad \therefore\ u^2\frac{dv}{ds} = c \quad (c\text{：定数})$$

$c \neq 0$ のとき

$$ds = \frac{1}{c}u^2 dv \tag{3.132}$$

これを第 1 式に入れて。。。と思うだけでゾッとしますね。$ds^2 = d\boldsymbol{p}\cdot d\boldsymbol{p}$ であったことを思い出して

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{p} &= (\cos v\, du - u\sin v\, dv,\ u\cos v\, dv + \sin v\, du,\ f'(u)du) \\ ds^2 &= d\boldsymbol{p}\cdot d\boldsymbol{p} = (1+f'^2)du^2 + u^2 dv^2 \end{aligned}$$

これに (3.132) を入れて

$$\frac{u^4}{c^2}dv^2 = (1+f'^2)du^2 + u^2 dv^2 \to \left(\frac{dv}{du}\right)^2 = \frac{c^2(1+f'^2)}{u^2(u^2-c^2)}$$

よって求める測地線の方程式は

$$v = \pm c \int \frac{\sqrt{1+f'^2}}{u\sqrt{u^2-c^2}} du$$

となります。
$c=0$ の場合は $v=$ 定数 となり，測地線は子午線となります。

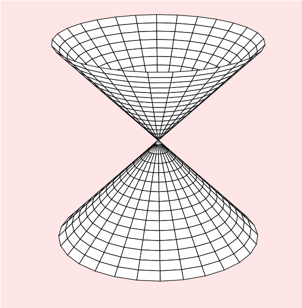
※【注】 x_1, x_2, x_3 座標系で x_3 軸を回転軸として x_1 軸から角度 v 回転した場合の座標を x'_1, x'_2, x'_3 とすると

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos v & -\sin v & 0 \\ \sin v & \cos v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \tag{3.133}$$

曲線 C が $x_i = f_i(u)$ で与えられたとき，x_3 軸を回転軸とすると回転面は

$$\begin{cases} x_1 = f_1(u)\cos v - f_2(u)\sin v \\ x_1 = f_1(u)\sin v + f_2(u)\cos v \\ x_3 = f_3(u) \end{cases} \tag{3.134}$$

で与えられます。



この曲面の u 曲線は C を回転してできる外縁曲線（回転軸を含む平面による切り口の曲線）で，これを**子午線**と呼んでいます。v 曲線は回転軸に垂直な平面上の円となり，これを**平行円**とか**平行環**と呼んでいます。x_1x_3 平面による切り口が $x_3 = f(x_1)$ で与えられれば，つまり，x_1x_3 平面上の曲線として $x_1 = u$, $x_3 = f(x_1)$ と表されれば，x_3 の回りに回転して得られる回転面は

$$\begin{cases} x_1 = u\cos v \\ x_2 = u\sin v \\ x_3 = f(u) \end{cases} \tag{3.135}$$

で与えられることになります。u 曲線は子午線です。ちなみに $x_1 = u\cos v$, $x_2 = u\sin v$, $x_3 = u$ とするとこの回転体の曲面は直円錐となります（上図参照）。

今回のお話はこの辺で終わります。測地線については次回も少し触れる予定で，その他の内容についてはお楽しみに。。。

ーーーーーーーーーーーーーーーーーーーーーーーーーーーーーーーーー

GOOD LUCK ！
SEE YOU AGAIN ！

2011.12.03
by KENZOU

（了）

1. 2011.12.17　§3.4.1 例.22 を追加。