======================================

Fourier級数 , Fourie変換アレコレ

2001.9.

by KENZOU

======================================

有限の領域$(-L/2<x<L/2,\ 0<x<T)$で定義される関数をFourie級数で表現することを考える。Fourie級数でこれらを表現すると、$(-L/2<x<L/2)$や$(0<x<T)$を周期とする周期関数が得られる。
では、いったい周期を持たない関数はFourie展開できないのかというと、そうではなく、周期を持たない関数に議論を拡張しようと思ったら L を無限大にまでのばしてやるとよい。

1. Fourie級数

■ 三角関数の展開による**Fourie**級数について

① 領域 $-L/2<x<L/2$ で定義された関数$f(x)$を考える。

いま、積分

$$a_n=\frac{2}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dx\, f(x)\cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) \qquad (n=0,1,2,\cdots) \tag{1}$$

$$b_n=\frac{2}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dx\, f(x)\sin\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) \qquad (n=0,1,2,\cdots)$$

が存在するなら、これらをFourie係数と呼ぶ。これらを用いて作った級数

$$f(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n\cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right)+b_n\sin\left(\frac{2\pi n}{L}x\right)\right\} \tag{2}$$

をFourie級数と呼ぶ。

② 領域を $0<x<T$ にずらすと

$$a_n=\frac{2}{T}\int_0^T dx\, f(x)\cos\left(\frac{2\pi n}{T}x\right) \qquad (n=0,1,2,\cdots) \tag{3}$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_0^T dx\, f(x)\sin\left(\frac{2\pi n}{T}x\right) \qquad (n=0,1,2,\cdots) \tag{4}$$

$$f(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n\cos\left(\frac{2\pi n}{T}x\right)+b_n\sin\left(\frac{2\pi n}{T}x\right)\right\} \tag{5}$$

また、$\dfrac{2\pi}{T}=\omega$ として角振動数を導入すると

$$a_n=\frac{\omega}{\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} dx\, f(x)\cos(n\omega x) \qquad (n=0,1,2,\cdots) \tag{6}$$

$$b_n=\frac{\omega}{\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} dx\, f(x)\sin(n\omega x) \qquad (n=0,1,2,\cdots) \tag{7}$$

$$f(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\{a_n\cos(nwx)+b_n\sin(nwx)\} \tag{8}$$

[注意]もし $f(x)=0$ ならすべての*Fourie*級数の係数は0である。逆にすべての*Fourie*級数の係数が0であれば $f(x)=0$である。

$$a_n=0,\ b_n=0\quad(n=0,1,2,\cdots)$$

■ 指数関数の展開による*Fourie*級数について

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{L}}\sum_{n=0,\pm1,\cdots}f_n\exp(ik_nx),\quad k_n=\frac{2p}{L}n \tag{9}$$

$$f_n=\frac{1}{\sqrt{L}}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}dx\,f(x)\exp(-ik_nx) \tag{10}$$

$$f_{-n}=\frac{1}{\sqrt{L}}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}dx\,f(x)\exp(ik_nx) \tag{11}$$

$f(x)$が実関数であれば　$f_{-n}=f_n^*$　(12)

【例】波動方程式と調和振動子

波動方程式 $$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \tag{13}$$

ただし、弦の両端は$(0,0)$と$(0,L)$で固定されているとする。すると波動方程式を満たす波動関数は実は 波動関数 $y(x,t)$ は調和振動子の集まりである ということが証明できる。

[証明]

波動関数$y(x,t)$を指数関数展開による*Fourie*級数に展開すると

$$y(x,t)=\frac{1}{\sqrt{L}}\sum_n q_n(t)\exp(ik_nx) \tag{14}$$

ただし、$y(x,t)$は実であるから $q_n(t)=q^*_{-n}(t)$。(14)を(13)に代入すると

$$\sum_n\left[\frac{d^2}{dt^2}q_n(t)+c^2k_n^2q_n(t)\right]\exp(ik_nx)=0 \tag{15}$$

上記[注意]書きから(15)式は

$$\frac{d^2}{dt^2}q_n(t)+c^2k_n^2q_n(t)=0 \tag{16}$$

を意味する。これは角振動数 $w_n=c|k_n|$の調和振動子の式にほかならない！！ nは無限大であるから波動方程式を満たす$y(x,t)$は無限個の調和振動子の線形結合であるということになる。//

2. *Fourie*積分変換

有限の領域から無限の領域へ話を広げる。$k_n=(2\pi/L)n$ でL を無限にのばしていくと、k を連続変数として取り扱える。また、n についての和は k についての積分になる。

$L\to\infty$の極限では $dk=k_{n+1}-k_n=\dfrac{2\pi}{L}$ と書けるから

$$\sqrt{L}f_n\to\sqrt{2\pi}\,\hat{f}(k)\ ,\quad \frac{1}{L}\sum_n\to\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dk$$

のような移行が得られる。式(9)は

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}dk\,\hat{f}(k)\exp(ikx) \tag{17}$$

係数 $\hat{f}(k)$を決める式は

$$\hat{f}(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}dx\,f(x)\exp(-ikx) \tag{18}$$

となる。多変数の場合

$$f(\mathbf{x})=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}dk\,\hat{f}(\mathbf{k})\exp(i\mathbf{kx}) \tag{19}$$

$$\hat{f}(\mathbf{k})=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}dx\,f(\mathbf{x})\exp(-i\mathbf{kx}) \tag{20}$$

$\hat{f}(k)$や$\hat{f}(\mathbf{k})$をそれぞれ $f(x)$ や $f(\mathbf{x})$の*Fourie*変換と呼ぶ。

関　数	*Fourie*変換
$f(x)=\delta(x-y)$	$f(x)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}dk\,e^{ik(x-y)}$
$f(x)=e^{-\alpha\|x\|}\quad(\alpha<0)$	$f(x)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{0}^{\infty}dk\frac{\alpha}{k^2+\alpha^2}\cos kx$
$f(x)=e^{-\alpha\|x\|}\epsilon(x)$ $\epsilon(x)=1\quad(x>0)$ $0\quad(x=0)$ $-1\quad(x<0)$	$f(x)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{0}^{\infty}dk\frac{k}{k^2+\alpha^2}\sin kx$ $\epsilon(x)=-\dfrac{i}{\pi}\displaystyle\lim_{\epsilon\to+0}\int_{-\infty}^{\infty}dk\frac{k}{k^2+\epsilon^2}e^{ikx}$ $=\dfrac{i}{\pi}\displaystyle\lim_{\epsilon\to+0}\int_{-\infty}^{\infty}dk\frac{k}{k^2+\epsilon^2}e^{-ikx}$
＜階段関数＞ $\theta(x)=1\qquad x>0$ $=1/2\qquad x=0$ $=0\qquad x<0$	$\theta(x)=-\dfrac{i}{2\pi}\displaystyle\lim_{\epsilon\to+0}\int_{-\infty}^{\infty}dk\frac{1}{k-i\epsilon}e^{ikx}$ $=\dfrac{i}{2\pi}\displaystyle\lim_{\epsilon\to+0}\int_{-\infty}^{\infty}dk\frac{1}{k+i\epsilon}e^{-ikx}$

関　数	Fourie変換
$e^{-at}\theta(t)\quad(a>0)$	$e^{-at}\theta(t)=\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\omega\frac{1}{\omega+ia}e^{-i\omega t}$
GaussのFTはGauss関数 $f(x)=e^{-\frac{1}{2}ax^2}$	$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi a}}\int_{-\infty}^{\infty}dk\,e^{-\frac{1}{2a}k^2}e^{ikx}$
$f(x)=\frac{e^{-ar}}{r}\quad(a>0)$	$f(x)=\frac{4\pi}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}d^3k\frac{1}{\mathbf{k}^2+a^2}e^{i\mathbf{kx}}$
$f(x)=\frac{e^{\pm ilr}}{r}\quad(l>0)$	$f(x)=\frac{4\pi}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}d^3k\frac{1}{\mathbf{k}^2-l^2\mp i\epsilon}e^{i\mathbf{kx}}$
$f(x)=\frac{e^{-ar}}{r^2}\quad(a>0)$	$f(x)=\frac{2}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}d^3k\frac{1}{k}\left[\tan^{-1}\frac{a}{k}-\frac{\pi}{2}\right]e^{i\mathbf{kx}}$

【例】分散関係式（Kramers-Kronigの分散関係式）

因果関数 $f(t)\equiv 0\quad t<0$ を考える（原因が結果に先行することはないので因果関数は $t<0$ では恒等的に0となる）。

$$f(t)=\theta(t)f(t) \tag{21}$$

$f(t)$をFourie変換すると

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}d\omega\hat{f}(\omega)e^{-i\omega t} \tag{22}$$

ここで(21)と階段関数のFourie変換を使うと

$$\begin{aligned}f(t)&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}d\omega\hat{f}(\omega)e^{-i\omega t}\\&=\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\omega'\frac{1}{\omega'+i\epsilon}e^{-i\omega' x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}d\omega''\hat{f}(\omega'')e^{-i\omega'' t}\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}d\omega'\left[\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\omega''\frac{1}{\omega'+i\epsilon}\hat{f}(\omega'')\right]e^{-i(\omega'+\omega'')t}\end{aligned}$$

$\omega=\omega'+\omega''$ と置くと

$$\begin{aligned}f(t)&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}d\omega\left[\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\omega''\frac{1}{\omega-\omega''+i\epsilon}\hat{f}(\omega'')\right]e^{-i\omega t}\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}d\omega\left[\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\omega'\frac{1}{\omega-\omega'+i\epsilon}\hat{f}(\omega')\right]e^{-i\omega t}\end{aligned}$$

したがって

$$\hat{f}(\omega)=\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\omega'\frac{1}{\omega-\omega'+i\epsilon}\hat{f}(\omega') \tag{23}$$

という関係が得られる。すなわち因果関数のFourie変換は(23)式を満たしていなければならない。一方

$$\lim_{e\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}dw'\frac{\hat{f}(w')}{w-w'+ie}=P\int_{-\infty}^{\infty}dw'\frac{\hat{f}(w')}{w-w'}-ip\hat{f}(w) \qquad (24)$$

が成り立つ。ただしPは$Cauchy$の主値である。(24)と(23)式を組み合わせると$\hat{f}(w)$の実部と虚部について

$$Re\hat{f}(w)=-\frac{1}{p}P\int_{-\infty}^{\infty}dw'\frac{Im\hat{f}(w')}{w-w'} \qquad (25)$$

$$Im\hat{f}(w)=\frac{1}{p}P\int_{-\infty}^{\infty}dw'\frac{Re\hat{f}(w')}{w-w'} \qquad (26)$$

が成り立つ。因果関数に対して成立する関係(26)を分散関係式（*Kramers - Kronig*の分散関係式）という。

3. *Fourie*変換の性質

$f(x)$, $g(x)$の*Fourie*変換を $\hat{f}(u)$, $\hat{g}(u)$とし、a, b を定数とすると

(1) $af(x)+bg(x)$の*Fourie*変換は $a\hat{f}(u)+b\hat{g}(u)$

(2) $f(x+a)$の*Fourie*変換は $e^{iau}\hat{f}(u)$

(3) $e^{iax}f(x)$の*Fourie*変換は $\hat{f}(u-a)$

(4) $f(ax)$の*Fourie*変換は $|a|^{-1}\hat{f}(u/a)$

(5) $\hat{f}(x)$の*Fourie*変換は $f(-u)$

(6) $x^n f(x)$が$(-\infty,\infty)$で絶対可積分ならば $\hat{f}(k)$はn回微分可能で $x^n f(x)$の*Fourie*変換は $(i)^n\hat{f}^{(n)}(u)$

(7) $f^{(n)}(x)$の*Fourie*変換は $(i)^n u^n\hat{f}(u)$

(8) $f(x)$と$g(x)$とのたたきこみの*Fourie*変換は$\sqrt{2p}\,\hat{f}(u)\hat{g}(u)$

たたきこみ：$f*g=\int_{-\infty}^{\infty}dt\,f(x-t)g(t)=\int_{-\infty}^{\infty}dt\,f(t)g(x-t)$

$f*g=g*f$,　$(f*g)*h=f*(g*h)$,　$f*(g+h)=f*g+f*h$

==【演習問題】===

次の関数の***Fourie***変換を求めよ。

(1) $f_1(x)=1$ $(0\leq|x|1)$,　$f_1(x)=0$ $(1\leq|x|)$

(2) $f_2(x)=-1$ $(-1<x<0)$,　$f_2(x)=1$ $(0<x<1)$,　$f_2(x)=0$ $(1\leq|x|)$

(3) $f_3(x)=x$ $(0\leq|x|1)$,　$f_3(x)=0$ $(1<|x|)$

(4) $f_4(x)=|x|$ $(0\leq|x|1)$,　$f_4(x)=0$ $(1\leq|x|)$

(5) $f_5(x)=x^2$ $(0\leq|x|1)$,　$f_5(x)=0$ $(1\leq|x|)$

［解］

$\hat{f}(u)$ を $f(x)$ のFourie変換とすると $\hat{f}(u)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}dx\,f(x)e^{-iux}$ となる。

(1) $\hat{f}_1(u)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1}dx\,e^{-iux}=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\dfrac{e^{-ixu}}{-iu}\right]_{-1}^{1}=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\,\dfrac{\sin u}{u}$

(2) $\hat{f}_2(u)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{\int_{0}^{1}dx\,e^{-iux}-\int_{-1}^{0}dx\,e^{-iux}\right\}=i\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\,\dfrac{\cos u-1}{u}$

(3) $f_3(x)=x\,f_1(x)$ であるから「Fourie変換の性質(6)」を用いて

$$\hat{f}_3(u)=i\,\hat{f}_1{}'(u)=i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin u-u\cos u}{u^2}$$

(4) $f_4(x)=x\,f_2(x)$ であるから「Fourie変換の性質(6)」を用いて

$$\hat{f}_4(u)=i\,\hat{f}_2{}'(u)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\cos u-1+u\sin u}{u^2}$$

(5) $f_5(x)=x\,f_3(x)$ であるから「Fourie変換の性質(6)」を用いて

$$\hat{f}_5(u)=i\,\hat{f}_3{}'(u)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{(u^3-2u)\sin u+2u^2\cos u}{u^4}$$

（以上）

[参考書]

○高橋 康著 「物理数学ノートＩ」講談社 1999年