積分定理－GSG－

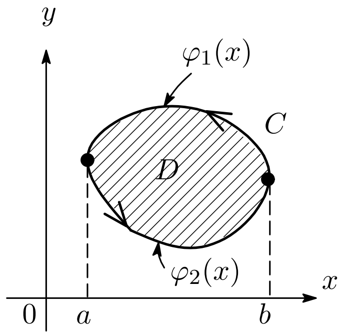
第１話：グリーンの定理，第２話：ストークスの定理，第３話：ガウスの定理の積分３定理についてのお話です。いずれの定理も電磁気学や流体力学をはじめとして物理のいろんな分野で登場しますので慣れ親しんでおいて損はないと思います。おかしな議論をしているところがあれば，気軽にご指摘いただけるとありがたい。

2017.4.30 by $\mathcal{KENZOU}$

第１話. 平面におけるグリーンの定理

グリーンの定理は領域 D の境界線上の線積分が領域 D の面積分（２重積分）に変換できる（逆も同様）ことを示す有名な定理です。

1.1　グリーンの定理（その１）－線積分と２重積分－



xy 平面上に自分自身とは交差しない正の向き（反時計回り）の単純閉曲線 C があり，その周と内部の領域を D とします。このとき，領域 D で C^1 級の関数 $P(x,y)$, $Q(x,y)$[1]に対して，C に沿った**線積分**と領域 D に関する**面積積分**[2]について次の関係式が成立する。

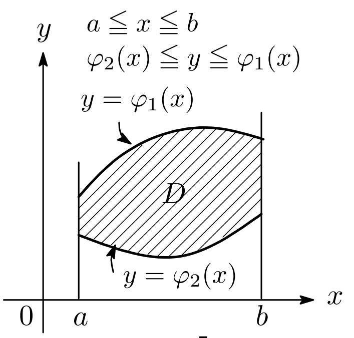
$$\oint_C (Pdx + Qdy) = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy \tag{1.1}$$

これを**グリーンの定理**といいます。要するに，線積分を２重積分に，２重積分を線積分に変換する変換公式とみてよいでしょう。グリーンの定理の証明は後でやるとして，まずは具体的な計算例を見ていくことにします。

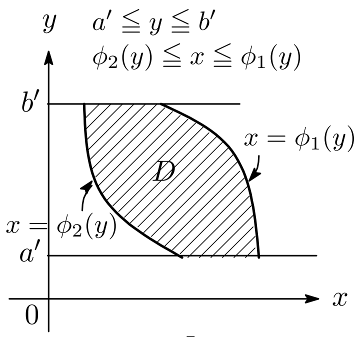
(1.1) の左辺の線積分の計算は $x = x(t)$, $y = y(t)$ とパラメータ表示して次のように積分計算します。

$$\oint_C (Pdx + Qdy) = \oint_C \left\{ P(x(t), y(t)) \frac{dx}{dt} + Q(x(t), y(t)) \frac{dy}{dy} \right\} dt \tag{1.2}$$

…………………………………………………………………



２重積分の計算



$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left[\int_{\varphi_2(x)}^{\varphi_1(x)} f(x,y)dy \right] dx$$

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_{a'}^{b'} \left[\int_{\phi_2(y)}^{\phi_1(y)} f(x,y)dx \right] dy$$

[1] C^1 級の関数とは１階微分可能でかつその（偏）導関数が連続な関数のこと。ちなみに何回でも微分可能な関数は C^∞ 級。
[2] 領域 D の面積を求める積分と早とちりしないように。D はあくまで被積分関数に対する積分領域です。例３も参照。

次に，右辺の 2 重積分は，領域 D が

$$a \leqq x \leqq b, \quad \varphi_2(x) \leqq y \leqq \varphi_1(x)$$

で囲まれていて，$y = \varphi_2(x)$ と $y = \varphi_1(x)$ が領域 D の境界を表すとすると次の累次積分で計算されます。

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left[\int_{\varphi_2(x)}^{\varphi_1(x)} f(x,y)dy \right] dx, \qquad f(x,y) \equiv \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} \tag{1.3}$$

x を定数とみなして [ ] 内の積分を最初に行ないます。そうするとこの積分結果は x のある関数 $F(x)$ になりますね。続いて $F(x)$ を x について a から b まで積分することで (1.3) の 2 重積分が計算できます。要するに単一積分を反復しているわけです。なお，$x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ と変数変換した場合，面積素 $dxdy$ と $dudv$ の関係は次のようになります。J を**ヤコビアン**とか**ヤコビ行列**といいます。

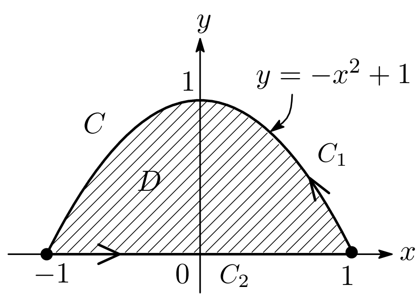
$$dxdy = |J|\,dudv, \quad |J| = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} \tag{1.4}$$

さて，ストークスの定理を具体例で見ていきましょう。

例１． $P(x,y)=y$, $Q(x,y)=3x^2$ とします。単純閉曲線 C は xy 平面上の放物線 $y=-x^2+1$ と x 軸との交点 $(1,0)$ から出発して放物線上を移動してもう一つの交点 $(-1,0)$ に達し，その後元の点 $(1,0)$ に戻ってくる経路とします。まず，経路 C に沿った線積分

$$\oint_C (Pdx + Qdy) = \oint_C (ydx + 3x^2dy)$$

を計算します。経路 C を放物線上の経路 C_1 と x 軸上の経路 C_2 に分解し，各経路上の点 x, y をパラメータ表示すると



$$\begin{cases} C_1 \ : \ x = -t, \quad y = -t^2 + 1 & (-1 \leqq t \leqq 1) \\ C_2 \ : \ x = t & (-1 \leqq t \leqq 1) \end{cases}$$

となるので，経路 C に沿った線積分は

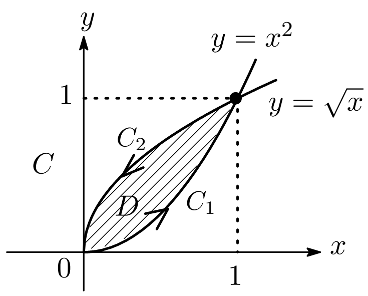
$$\begin{aligned} \oint_C (ydx + 3x^2dx) &= \int_{C_1} \{(-t^2+1)(-dt) + 3(-t)^2(-2tdt)\} + \int_{C_2} \{0 \cdot dt + 3t^2 \cdot 0\} \\ &= \int_{-1}^{1} (-6t^3 + t^2 - 1)dt = -\frac{4}{3} \end{aligned}$$

と求められます。次に 2 重積分ですが，積分範囲は $-1 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq y \leqq -x^2+1$ となるので

$$\begin{aligned} \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \iint_D (6x-1)\,dxdy &= \int_{-1}^{1} \left[\int_0^{-x^2+1} (6x-1)dy \right] dx \\ &= \int_{-1}^{1} (6x-1)(1-x^2)dx = \int_{-1}^{1} (-6x^3 + x^2 + 6x - 1)dx \\ &= -\frac{4}{3} \end{aligned}$$

となります。この結果は線積分の値と一致しますね。

例２． $P(x,y)=x^2-y^2$, $Q(x,y)=y-xy$ とします。閉曲線 C は $y=x^2$ と $y=\sqrt{x}$ で囲まれた曲線とし，原点から出発して $y=x^2$ 上を移動して 2 曲線の交点に達する経路を C_1，そこから $y=\sqrt{x}$ 上を移動して原点に戻る経路を C_2 とします。次の線積分を求めます。



$$\oint_C (Pdx+Qdy)=\oint_C \big((x^2-y^2)dx+(y-xy)dy\big)$$

それぞれの経路上の点 x, y をパラメータ表示すると

$$\begin{cases} C_1 \ : \ x=t, \quad y=t^2 \quad (0 \leqq t \leqq 1) \\ C_2 \ : \ x=t, \quad y=\sqrt{t} \quad (0 \leqq t \leqq 1) \end{cases}$$

となるので

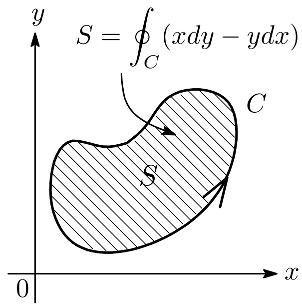
$$\oint_C \big((x^2-y^2)dx+(y-xy)dy\big)=\int_0^1 \big\{(t^2-t^4)dt+2(t^2-t^3)tdt\big\} \\ +\int_1^0 \left\{(t^2-t)dt+\frac{1}{2\sqrt{t}}(\sqrt{t}-t\sqrt{t})dt\right\}=\frac{3}{20}$$

次に，$P(x,y)=x^2-y^2$, $Q(x,y)=y-xy$ とおくと，積分範囲は $0 \leqq x \leqq 1$, $x^2 \leqq y \leqq \sqrt{x}$ となるので

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\iint_D ydxdy=\int_0^1\left[\int_{x^2}^{\sqrt{x}} ydy\right]dx=\int_0^1 \frac{x-x^4}{2}dx=\frac{3}{20}$$

線積分の結果と一致します。

例３． 任意の閉曲線 C があり，$P=-y$, $Q=x$ の場合を考えます。(1.1) は

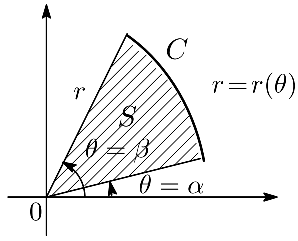


$$\oint_C (Pdx+Qdy)=\oint_C(-ydx+xdy)=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy \\ =2\iint_D dxdy=2S$$

ここで S は閉曲線 C で囲まれた領域 D の面積です。これから任意の閉曲線 C で囲まれた面積は次の公式で与えられることになります。

$$S=\frac{1}{2}\oint_C (xdy-ydx) \tag{1.5}$$

x, y が極座標で表される場合は



$$\begin{cases} x=r\cos\theta \quad dx=\cos\theta\, dr-r\sin\theta\, d\theta \\ y=r\sin\theta \quad dy=\sin\theta\, dr+r\cos\theta\, d\theta \end{cases}$$

となるので，(1.5) から極方程式の面積公式としてよく知られた

$$S=\frac{1}{2}\int_C r^2 d\theta \tag{1.6}$$

が得られます。(1.5) の公式を使って

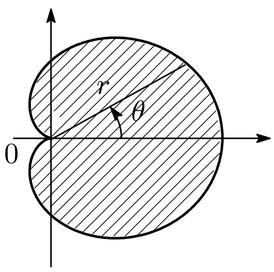
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

で表される楕円の面積を求めてみましょう。$x=a\cos\theta$, $y=b\sin\theta$ とパラメータ表示すると $dx=-a\sin\theta\, d\theta$，$dy=b\cos\theta\, d\theta$ となり，これを (1.5) に代入して楕円の面積

$$S=\frac{1}{2}\oint_C(xdy-ydx)=\frac{1}{2}ab\int_0^{2\pi}d\theta=\pi ab$$

と求められます。

次に極方程式で表されるカージオイド（心臓形）の面積を求めてみましょう。



$$r = a(1+\cos\theta) \qquad (0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$$

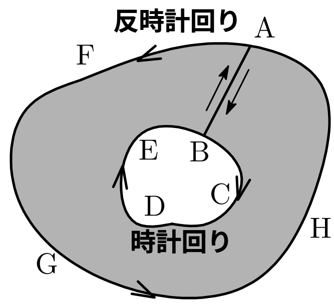
(1.6) より

$$S = \frac{1}{2}\int_C r^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a^2(1+\cos\theta)^2 d\theta = \frac{3}{2}\pi a^2$$

1.2　グリーンの定理（その２）－多重連結領域－

前節では領域 D がすべて埋まっている場合を考えました。ここでは領域 D に穴があるドーナツ領域となっている場合を考えます。なお，ネーミングですが，前者を**単連結領域**，後者を**多重連結領域**といいます[3]。穴の内部では関数 $P(x,y), Q(xy)$ は微分可能ではありません。領域 D が右図のように多重連結領域となっている場合，グリーンの定理はどのように表されるかを考えます。

ドーナツの外周上の 1 点 A から内周上の 1 点 B を結んで経路 ABCDEB−AFGHA を考えます。そうするとこれは一つの単純閉曲線となりますね。これを C とすると，C で囲まれた領域は微分可能領域ですからグリーンの定理が成立して

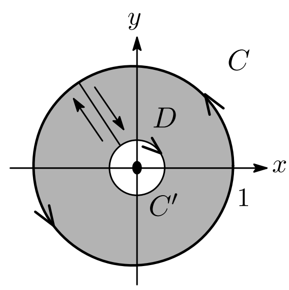


$$\begin{aligned}
\oint_C (Pdx+Qdy) &= \oint_{\mathrm{ABCDEBAFGHA}} \\
&= \int_{\mathrm{AB}} - \oint_{\mathrm{BCDE}} + \int_{\mathrm{BA}} + \oint_{\mathrm{FGHA}} = -\oint_{\mathrm{BCDE}} + \oint_{\mathrm{FGHA}} \\
&= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy \qquad \left(\because \int_{\mathrm{AB}} = -\int_{\mathrm{BA}}\right)
\end{aligned}$$

$$\therefore\ -\oint_{\mathrm{BCDE}} + \oint_{\mathrm{FGHA}} = \oint_{\mathrm{BEDC}} + \oint_{\mathrm{FGHA}} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy \tag{1.7}$$

となります。つまり，(1.1) の線積分がドーナツの外周の線積分と内周の線積分の和（内周の周回方向に注意！）で表されるということですね。なぜこのような領域を考えるかは次の例を見てください。

$$P(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2}, \quad Q(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$$



とし，閉曲線 C として

$$x^2+y^2 = 1$$

を考えます。単純にグリーンの定理を適用すると，$x=\cos\theta$, $y=\sin\theta$ $(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ とパラメータ表示して線積分を計算すると

$$\oint_C (Pdx+Qdy) = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$$

一方，2 重積分の方は

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = \iint_D \left(-\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\right) = 0$$

となり，グリーンの定理は成立しないことが分かります。

[3]任意の閉曲線を縮めていって点になる閉曲線を単連結，（ドーナツの穴に邪魔されて）点に縮めることができない閉曲線を多重連結と呼んでいます。

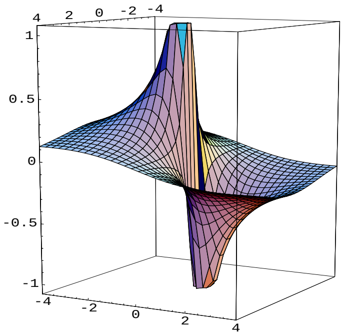


図 1: $-\frac{y}{x^2+y^2}$ のグラフ

これは閉曲線 C で囲まれた領域内に関数 P, Q の**特異点**（微分不可）$(0,0)$ が含まれていることが原因です。そこで特異点を取り除くために原点の周りに微小な円経路 C' をとり，C と C' を連結した閉曲線 $\mathcal{C}=C+C'$ を考え，この閉曲線で囲まれた領域を D とします。領域 D ではグリーンの定理が適用できるので，その結果は

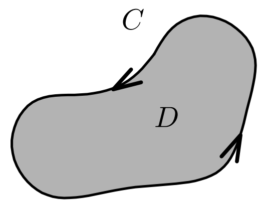
$$\oint_{\mathcal{C}}(Pdx+Qdy)=\oint_C+\oint_{C'}=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=0$$

$$\therefore\quad \oint_C=-\oint_{C'}$$

となります。C' の反時計回りの経路を $\bar{c}'$ とすると $\oint_{\bar{c}'}(Pdx+Qdy)=2\pi$ となるので

$$\oint_C(Pdx+Qdy)=\oint_{\bar{c}'}(Pdx+Qdy)=\int_0^{2\pi}d\theta=2\pi$$

1.3　グリーンの定理（その３）ーコーシーの積分定理ー



コーシーの積分定理[4]を証明します。コーシーの積分定理は『**複素関数** $f(z)$ **が閉曲線** C **と** C **の内部の領域** D **で正則であるなら** C **に沿っての周回積分は** $\oint_C f(z)dz=0$ **になる**』というものでした。

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$$

で表され，$f(z)$ が正則であれば u, v は次のコーシー・リーマンの関係式を満たします。

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

さて，

$$\oint_C f(z)dz=\oint_C(u+iv)(dx+idy)=\oint_C(udx-vdy)+i\oint_C(vdx+udy)$$

と表せるので，右辺の各項にグリーンの定理を適用すると

$$\oint_C f(z)dz=-\iint_D\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)dxdy+i\iint_D\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy$$

右辺にコーシー・リーマンの関係式を代入すると実部，虚部とも 0 になるので，コーシーの積分定理

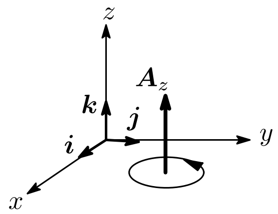
$$\oint_C f(z)dz=0$$

が得られます。

1.4　グリーンの定理（その４）ーベクトル場ー

[4]詳しくは「駆け足で眺める複素積分」を参照。

2 次元ベクトル場 $\boldsymbol{A}(x,y)$ の回転は



$$\mathrm{rot}\boldsymbol{A} = \nabla\times\boldsymbol{A} = \left(0,\,0,\,\frac{\partial Ay}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$$

で表されます。いま $\boldsymbol{A}(P,Q)$ とすると $\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}$ は $\nabla\times\boldsymbol{A}$ の z 成分を表しすので，z 方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{k}$ とすると

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dS = \iint_D \boldsymbol{k}\cdot\nabla\times\boldsymbol{A}dS$$

と書けます。また，

$$\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} = Pdx + Qdy$$

と書けるので，グリーンの定理は

$$\oint_C \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} = \iint_D \boldsymbol{k}\cdot\nabla\times\boldsymbol{A}\,dS \tag{1.8}$$

と表されます。この表式は第 2 話のストークスの定理のところで再び登場しますのでマークしておいてください。ところで $\boldsymbol{A}$ を保存力 $\boldsymbol{F}$，$\boldsymbol{r} = (x,y)$ とすると

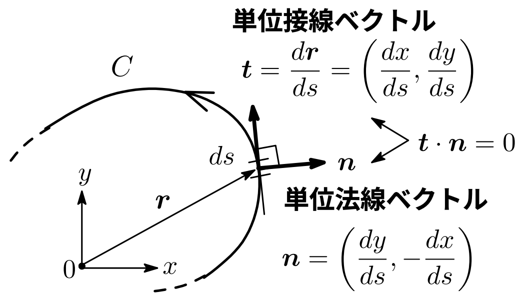
$$W = \oint \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$$

は閉曲線 1 周まわりの仕事 W で，保存力場では $W = 0$ になりますね。したがって，(1.8) から $\nabla\times\boldsymbol{F} = 0$，つまり保存力には回転成分がないということが簡単に導かれます。

次に，$\boldsymbol{A} = (Q, -P)$ とおくと

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \qquad \left(\nabla \equiv \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

$$\begin{aligned}\oint_C (Pdx + Qdy) &= \oint_c \left(P\frac{dx}{ds} + Q\frac{dy}{ds}\right) ds \\ &= \oint_C \boldsymbol{A}\cdot\left(\frac{dy}{ds}, -\frac{dx}{ds}\right) ds \\ &= \oint_C \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}ds\end{aligned}$$



となるので。グリーンの定理は

$$\oint_C \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}ds = \iint_D \nabla\cdot\boldsymbol{A}dxdy \tag{1.9}$$

と表せます。

また，

$$P(x,y) = -\frac{\partial w}{\partial y}, \quad Q(x,y) = \frac{\partial w}{\partial x}$$

と表せるものとすると

$$\oint_C (Pdx + Qdy) = \oint_C \left(-\frac{\partial w}{\partial y}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dy}{ds}\right) ds = \oint_C \nabla w\cdot\boldsymbol{n}ds = \oint_C \frac{\partial w}{\partial n}ds$$

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \iint_D \nabla^2 w\,dxdy$$

上第 1 式の $\nabla w \cdot \boldsymbol{n}$ は C の外向き法線方向の w の勾配を表すので，この方向の方向微分係数を $\partial w/\partial n$ と書きました。グリーンの定理は

$$\oint_C \frac{\partial w}{\partial n} ds = \iint_D \nabla^2 w \, dxdy \tag{1.10}$$

と表されます。

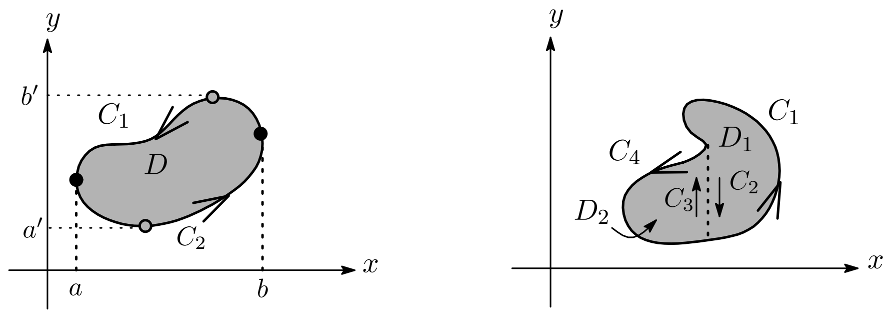
1.5　グリーンの定理の証明

いよいよ第 1 話も終盤にきました。道具として使う立場からすると定理の証明などはあまり意欲をかきたてられませんが（小生は），結末としてグリーンの定理の証明をやって第 1 話を終えることにします。１．１節の 2 重積分の説明も必要に応じて読み返してください。

反時計回りの閉曲線 C が y 軸に平行な直線と 3 点以上で交わらない場合から考えます。C に接する y 軸に平行な直線は 2 本となるので，その接点のところで C を上下 2 つの部分 C_1, C_2 に分け，それぞれの曲線を $y = \varphi_1(x), y = \varphi_2(x)$ とします。 そうすると

$$\begin{aligned} -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy &= -\int_a^b \left[\int_{\varphi_2(x)}^{\varphi_1(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy \right] dx = \int_a^b [-P(x, \varphi_1(x)) + P(x, \varphi_2(x)] \, dx \\ &= \int_{C_1} P(x,y) dx + \int_{C_2} P(x,y) dx \quad \left(\because \ -\int_a^b = \int_b^a \right) \\ &= \oint_C P(x,y) dx \end{aligned} \tag{1.11}$$

となります。



次に x 軸に平行な直線と C の接点のところで左右 2 つの部分に分けて，左側と右側の曲線をそれぞれ C_1': $x = \phi_1(y)$, C_2': $x = \phi_2(y)$ とし，先ほどと同様反時計回りの閉曲線を C とします。そうすると

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy &= \int_{b'}^{a'} \left[\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \frac{\partial Q}{\partial x} dx \right] dy = \int_{b'}^{a'} [Q(\phi_1(x), y) - Q(\phi_2(x), y)] \, dy \\ &= \int_{b'}^{a'} Q(\phi_1(x), y) dy + \int_{b'}^{a'} Q(\phi_2(x), y) dy \\ &= \int_{C_1'} Q(x,y) dy + \int_{C_2'} Q(x,y) dy \\ &= \oint_C Q(x,y) dy \end{aligned} \tag{1.12}$$

(1.11) と (1.12) の辺々を足すと

$$\oint_C (Pdx + Qdy) = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial x} \right) \tag{1.13}$$

となってグリーンの定理が証明できました。

次に，C が y 軸に平行な直線と 3 点以上で交わる場合を考えます。この場合は領域をいくつかの領域に分割して考えればいいわけで，例えば上図右のような場合，D を D_1 と D_2 と分割します。そうすると (1.11) より

$$-\iint_{D_1} \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \oint_{C_1+C_2} P(x,y)dx$$
$$-\iint_{D_2} \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \oint_{C_3+C_4} P(x,y)dx$$

が得られます。C_2 と C_3 の経路は互いに逆向きのためその線積分は相殺し合うので上の 2 式を足すと

$$-\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \oint_{C_1+C_2+C_3+C_4} P(x,y)dx = \oint_{C_1+C_4} P(x,y)dx = \oint_C P(x,y)dx$$

となります。あとは上でやった議論がそのまま踏襲すればいいわけで，複雑な閉曲線の場合もグリーンの定理が成立することが分かります。

***** お疲れ様でした。これで第 1 話を終了します *******

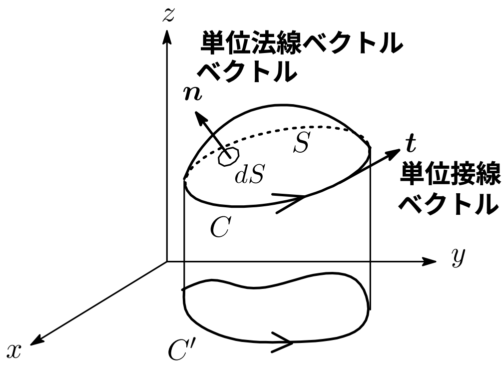
第 2 話. ストークスの定理

第 1 話では，平面の領域 D の境界線上の線積分はその領域上の 2 重積分に変換できる，というグリーンの定理について述べました。第 2 話はグリーンの定理を 3 次元空間に拡張した**ストークスの定理**についてのお話です。

2.1　ストークスの定理（その１）－直感的な理解を目指して－

単純閉曲線 C をその境界とする曲面 S と S 上で連続な 1 階偏導関数をもつベクトル関数 $\boldsymbol{F}(x,y,z)$ に対して

$$\oint_C \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{t}\,ds = \iint_S \boldsymbol{n}\cdot\nabla\times\boldsymbol{F}dS \tag{2.1}$$



が成り立つ[5]。これを**ストークスの定理**といいます。この表式は第 1 話の (1.8) を 3 次元に拡張したものですね[6]。$\boldsymbol{n}$ は面積素 dS の単位法線ベクトル。いうまでもないことですが，左辺はベクトル関数 $\boldsymbol{F}(x,y,z)$ を曲面の境界 C で線積分したものでスカラー量。右辺はベクトル $\boldsymbol{F}(x,y,z)$ の回転を曲面 S 全体にわたって面積分したもので，$\boldsymbol{n}$ との内積をとっているのでスカラー量。(2.1) はこの両者が等しいことを示しています。

ベクトル場 $\boldsymbol{F}(x,y,z)$ で回転が $\nabla\times\boldsymbol{F}\neq 0$ のところは，そこに**渦**があるといい，$\nabla\times\boldsymbol{F}$ を**渦度**といいます。ストークスの定理は，渦のある所に閉曲線 C を考え，C を境界線とする曲面 S 上で渦度ベクトル $\nabla\times\boldsymbol{F}$ の法線方向成分を積分した $\iint_S \boldsymbol{n}\cdot\nabla\times\boldsymbol{F}dS$ は，C についての線積分 $\oint_C \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{t}\,ds$ に等しい[7]ということをいっています。

いま，任意の曲面 S とその境界 C について次式が成り立ちます。

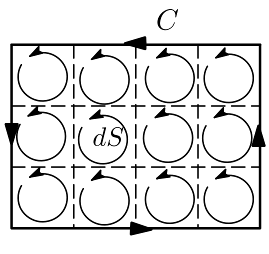
$$\text{if}\quad \iint_S \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{G}dS = \oint_C \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{t}ds \Longrightarrow \boldsymbol{G}=\nabla\times\boldsymbol{F} \tag{2.2}$$

$$\because\ \iint_S \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{G}dS = \oint_C \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{t}ds = \iint_S \boldsymbol{n}\cdot\nabla\times\boldsymbol{F}dS$$

$$^\forall S\text{ に対して}\quad \iint_S \boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{G}-\nabla\times\boldsymbol{F})dS = 0 \quad \therefore\ \boldsymbol{G}=\nabla\times\boldsymbol{F}$$

●ストークスの定理の直感的な理解

ストークスの定理は次のように考えると直感的に理解しやすいと思います。曲面 S を有限個のセル（面積素 dS）に分割します。分割線は右図に示すように上下左右に隣接する各セルを区分けする境界となりますね。各セルにおける面積積分はグリーンの定理によってセルの境界を 1 周する線積分に等しい。そして各セルの面積積分を曲面全体にわたって足し合わせたものが $\iint_S \boldsymbol{n}\cdot\nabla\times\boldsymbol{F}dS$ です。ところで，各セルの境界に沿った線積分を総和すると，上下左右に隣接する



[5] $\nabla\times\boldsymbol{F}\equiv\mathrm{rot}\boldsymbol{F}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ F_x & F_y & F_z\end{vmatrix}=\left(\dfrac{\partial F_z}{\partial y}-\dfrac{\partial F_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\dfrac{\partial F_x}{\partial z}-\dfrac{\partial F_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\dfrac{\partial F_y}{\partial x}-\dfrac{\partial F_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}$

[6] 逆に言うと，平面におけるグリーンの定理はストークスの定理の特別な場合ということです。

[7] パンチパーマの頭は鉢巻きで支えられているというイメージ !?

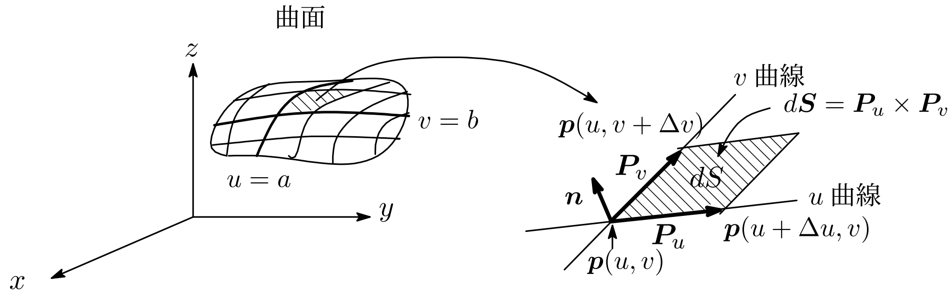
セル間では周回方向が互いに逆向きとなるため相殺し合い (破線)，この結果，最終的に残るのは曲面の境界 C の回りの線積分 $\oint_C \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{t}ds$ ということになります。

2.2　ストークスの定理（その２）ー曲面の面積素ー

ストークスの定理では 3 次元曲面の微小面積（面積素）が登場しますので，曲面の面積の求め方について少し復習しておきます。曲面は 2 つのパラメーター u, v を使って

$$\boldsymbol{p}(u,\, v) = (x(u,v),\, y(u,v),\, z(u,v)) \tag{2.3}$$

と表すことができます。v を固定すると u をパラメーターとする曲線を描き，同様に u を固定すると v をパラメーターとする曲線を描きます。曲面は u 曲線を経糸，v 曲線を横糸に例えると，経・横の糸が織りなしてできる織物のようですね。



曲面の微小面積ベクトル $d\boldsymbol{S}$ は 2 つの微小ベクトル $\boldsymbol{P}_u$ と $\boldsymbol{P}_v$ のベクトル積で与えらます。

$$d\boldsymbol{S} = \boldsymbol{n}dS = \boldsymbol{P}_u \times \boldsymbol{P}_v$$

ただし，

$$\begin{cases} \boldsymbol{P}_u = \boldsymbol{p}(u+\Delta u, v) - \boldsymbol{p}(u,v) \xrightarrow{\Delta u\to 0} \dfrac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial u}du \\[2ex] \boldsymbol{P}_v = \boldsymbol{p}(u, v+\Delta v) - \boldsymbol{p}(u,v) \xrightarrow{\Delta v\to 0} \dfrac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial v}dv \end{cases}$$

したがって

$$\boldsymbol{n}dS = \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial u}du \times \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial v}dv, \quad dS = \left|\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial v}\right| dudv \tag{2.4}$$

と表されます。

曲面の式が $z = f(x,y)$ で与えられているとき，$x = u,\, y = v,\, z = f(u,v)$ と u, v パラメータ表示すると

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{p}(u,v) = (u, v, f(u,v)) \\ &\quad \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial u} = \boldsymbol{p}_u = \left(\frac{\partial u}{\partial u}, \frac{\partial v}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial u}\right) = (1,\, 0,\, f_u) \\ &\quad \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial v} = \boldsymbol{p}_v = \left(\frac{\partial u}{\partial v}, \frac{\partial v}{\partial v}, \frac{\partial f}{\partial v}\right) = (0,\, 1,\, f_v) \end{aligned}$$

したがってこの曲面の微小面積ベクトル $d\boldsymbol{S}$ は

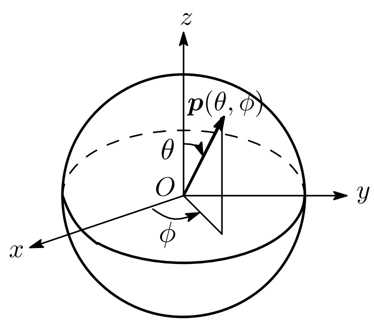
$$\boldsymbol{n}dS = \boldsymbol{p}_u du \times \boldsymbol{p}_v dv = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 0 & f_u \\ 0 & 1 & f_v \end{vmatrix} dudv = (-f_x,\, -f_y,\, 1)dxdy \tag{2.5}$$

$$dS = |\boldsymbol{n}dS| = \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}\, dxdy \tag{2.6}$$

となります。それでは，回転放物曲面 $z = x^2 + y^2$ の微小面積ベクトルを求めてましょう。$z_x = 2x,\ z_y = 2y$ なので

$$\boldsymbol{n}dS = (-2x\boldsymbol{i} - 2y\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k})dxdy$$
$$dS = \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}\, dxdy \tag{2.7}$$

となります。



次に曲面の式が $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ で与えられる球面の場合を見てみましょう。曲面を表す 2 つのパラメータを $u = \theta,\ v = \phi$ とすると

$$\boldsymbol{p}(\theta, \phi) = (r\sin\theta\cos\phi,\ r\sin\theta\sin\phi,\ r\cos\theta)$$
$$(0 \leqq \theta \leqq \pi, \varnothing \leqq \phi \leqq 2\pi)$$

で表されます。これから

$$\boldsymbol{n}dS = \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \phi} = (r^2\sin^2\theta\cos\phi,\ r^2\sin^2\theta\sin\phi,\ r^2\sin\theta\cos\theta) \tag{2.8}$$

$$dS = \left|\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \phi}\right| = r^2\sin\theta \tag{2.9}$$

となります。球面の表面積は

$$S = \iint_D \left|\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \phi}\right| d\theta d\phi = \int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\pi} r^2 \sin\theta d\theta\right] d\phi = 4\pi r^2$$

それでは，具体的にストークスの定理を使った例をみていきましょう。

例１．

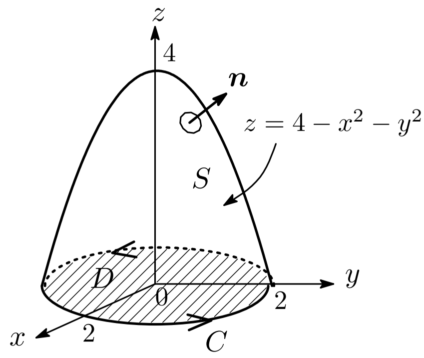
曲面 $z = 4 - x^2 - y^2$ の $z \geqq 0$ の部分を S としします。ベクトル関数 $\boldsymbol{F} = (x^2 + y - 4)\boldsymbol{i} + 3xy^2\boldsymbol{j} + (2xz + z^2)\boldsymbol{k}$ に対し，$\displaystyle\iint_S \boldsymbol{n}\cdot\nabla\times\boldsymbol{F}dS$ を求めてみます。ただし単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ は上向きにとります。

$$\nabla\times\boldsymbol{F}(x, y, z) = (0,\ -2z,\ 3y^2 - 1)$$

で曲面の微小面積ベクトルは (2.5) より

$$\boldsymbol{n}dS = (2x,\ 2y,\ 1)dxdy$$

1）直接 2 重積分を計算すると。。。$(x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, z = 4 - r^2)$



$$
\begin{aligned}
\iint_S \boldsymbol{n}\cdot\nabla\times\boldsymbol{F}dS &= -\iint_S (4yz - 3y^2 + 1)dxdy \\
&= -\int_0^{2\pi}\left[\int_0^2 (4r\sin\theta(4-r^2) - 3r^2\sin^2\theta + 1)rdr\right]d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\left[\int_0^2 (4r^4\sin\theta + 3r^3\sin^2\theta - 16r^2\sin\theta - r)dr\right]d\theta \\
&= 8\pi
\end{aligned}
$$

2）次にストークスの定理を使うと。。。2 重積分は曲面 $z = 4 - x^2 - y^2$ を $z = 0$ の xy 平面でカットした境界線の線積分の値に焼き直せるので

$$
\begin{aligned}
\iint_S \boldsymbol{n}\cdot\nabla\times\boldsymbol{F}dS &= \oint_C \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{t}ds = \oint_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = \oint_C \boldsymbol{F}\cdot(\boldsymbol{i}dx + \boldsymbol{j}dy) \\
&= \oint_C \left\{(x^2 + y - 4)dx + 3xy^2dy\right\}
\end{aligned}
$$

ここで，$P(x,y) = x^2 + y - 4,\ Q(x,y) = 3xy^2$ とおいて右辺にグリーンの定理を適用すると

$$
\begin{aligned}
\oint_C (Pdx + Qdy) &= \oint_C \left\{(x^2 + y - 4)dx + 3xy^2dy\right\} \\
&= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \iint_D (3y^2 - 1)dxdy
\end{aligned}
$$

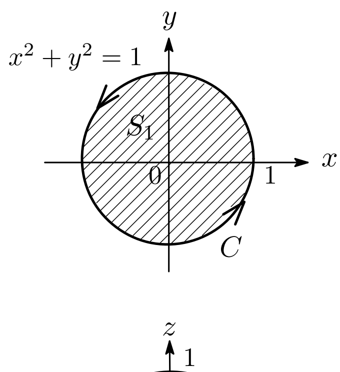
となり，$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,\ dxdy = rdrd\theta,\ (0 \leqq r \leqq 2,\ 0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ と変数変換して

$$
\begin{aligned}
\iint_D (3y^2 - 1)dxdy &= \int_0^{2\pi}\left[\int_0^2 (3r^2\sin^2\theta - 1)rdr\right]d\theta \\
&= 8\pi
\end{aligned}
$$

これは１）の直接 2 重積分した値と一致します。

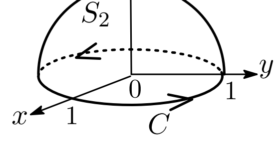
例２.

曲面 S を単位円 $x^2 + y^2 = 1$ の円周 C を境界としてもつ xy 平面上の単位円板を S_1 とします。C に沿ってのベクトル関数 $\boldsymbol{F}(x,y,z) = (x^2 + y)\boldsymbol{i} + (x^2 + 2z)\boldsymbol{j} + 2y\boldsymbol{k}$ の線積分 $\oint_C \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{t}ds$ を１）直接求める，２）ストークスの定理を用いて求める，３）C を境界としてもつ xyz 空間内の上半球面とした場合，ストークスの定理を用いて $\oint_C \boldsymbol{F}\cdot tdS = \iint_{S_2} \boldsymbol{n}\cdot\nabla\times\boldsymbol{F}dS$ を求めます。



1）直接線積分：x, y を極座標に変数変換します。

$$
x = \cos\theta,\ y = \sin\theta \quad (0 \leqq \theta \leqq 2\pi)
$$



線積分は

$$
\begin{aligned}
\oint_C \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{t}ds &= \oint_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = \oint_C (F_xdx + F_ydy) \\
&= \int_0^{2\pi}(\cos^2\theta + \sin\theta)\cdot(-\sin\theta)d\theta + \int_0^{2\pi}\cos^2\theta\cdot\cos\theta d\theta \\
&= -\pi
\end{aligned}
$$

２）ストークスの定理：

$$\nabla\times\boldsymbol{F}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ x^2+y & x^2+2z & 2y\end{vmatrix}=(2x-1)\boldsymbol{k}$$

$$\begin{aligned}\iint_{S_1}\boldsymbol{n}\cdot\nabla\times\boldsymbol{F}dS&=\iint_{S_1}\boldsymbol{k}\cdot\nabla\times\boldsymbol{F}dS\\ &=\iint_{S_1}(2x-1)dxdy=\int_0^{2\pi}\left[\int_0^1(2r\cos\theta-1)rdr\right]d\theta=-\pi\end{aligned}$$

線積分の値と一致します。

３）曲面 S を上半球面とした場合：$0\leqq\theta\leqq\pi/2,\ 0\leqq\phi\leqq 2\pi$ で (2.8) より

$$\iint_{S_2}\boldsymbol{n}\cdot\nabla\times\boldsymbol{F}dS=\int_0^{\pi/2}\left[\int_0^{2\pi}\sin\theta\cos\theta(2\sin\theta\cos\phi-1)d\phi\right]d\theta=-\pi$$

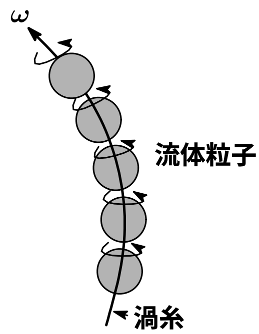
線積分の値と一致します。

2.3　ストークスの定理（その３）－渦度と循環－

さて，ストークスの定理が一通りわかったところで，具体的な適用例として流体力学から話題をピックアップします。理想流体[8]を考えます。速度ベクトルを $\boldsymbol{v}$ とすると流体粒子の回転の強さを表す**渦度** $\boldsymbol{\omega}$ は

$$\boldsymbol{\omega}=\nabla\times\boldsymbol{v} \tag{2.10}$$

で定義されるベクトル量で，大きさと向きをもちます[9]。



空間上の各点に渦度の矢印を描くき，渦度ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ の矢印を結んだ曲線を**渦糸**とか**渦線**といいます。流れの中に**渦**が存在するかどうかは**循環**という物理量が 0 かどうかで判定されます。循環は流体中に反時計回りの勝手な閉曲線 C をとり，C の沿っての線積分

$$\Gamma(C)=\oint_C v\cdot ds=\oint_C v_S\,ds \tag{2.11}$$

で定義されます。ここで $d\boldsymbol{s}$ は閉曲線 C 上の線素ベクトル[10]，v_s は速度ベクトル $\boldsymbol{v}$ の接線方向成分です。

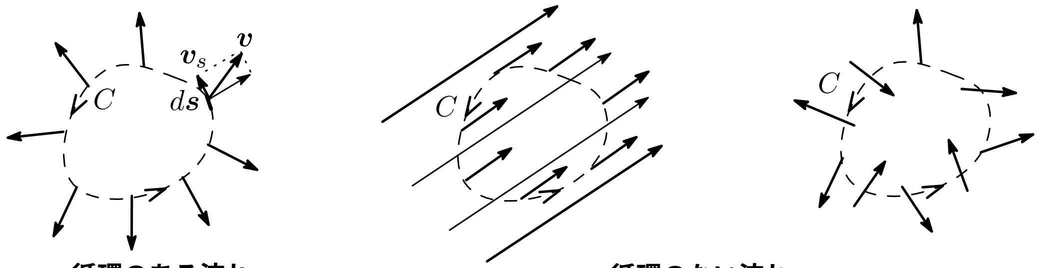
循環は (2.11) からわかるように閉曲線 C 上の各線素ベクトルと速度ベクトルの内積を閉曲線 C の全周にわたって加え合わせたもので，閉曲線に沿った特定の方向に流れがある場合には循環 $\Gamma(C)\neq 0$ となりますが，一様な流れや一様に乱れた流れでは $\boldsymbol{v}_s\cdot d\boldsymbol{s}$ は全体として打ち消し合うので $\Gamma(C)=0$ となります。渦には右巻き，左巻きのように巻く渦があり，閉曲線 C の巡回方向の渦巻きなら $\Gamma(C)>0$，それと逆向きなら $\Gamma(C)<0$ となります。

ストークスの定理を使って (2.11) を書き直すと

$$\Gamma(C)=\iint_S\boldsymbol{n}\cdot\nabla\times\boldsymbol{v}dS=\iint_S(\nabla\times\boldsymbol{v})_n dS=\iint_S\boldsymbol{\omega}_n\cdot dS \tag{2.12}$$

となりますね。下付き添え字の n はベクトルの $\boldsymbol{n}$ 方向の成分です。

[8]粘性と圧縮性がないと仮定した流体。
[9]大きさは流体粒子の回転の角速度の 2 倍。
[10]$d\boldsymbol{s}=\boldsymbol{t}ds$



循環のある流れ　　　　**循環のない流れ**

2.4　ストークスの定理の証明

第 2 話の最後にストークスの定理を証明しておきます。ストークスの定理

$$\iint_S \boldsymbol{n}\cdot\nabla\times\boldsymbol{F}dS = \oint_C \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{t}\,ds$$

を成分表示して書くと

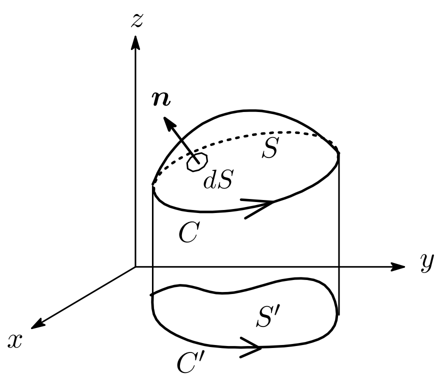
$$\iint_S \left[\left(\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z}\right)dydz+\left(\frac{\partial F_x}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial x}\right)dzdx+\left(\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}\right)dxdy\right]$$

$$= \oint_C (F_x dx + F_y dy + F_z dz) \tag{2.13}$$

と表されます。まず (2.13) の両辺の F_x を含む項の積分が等しいことを証明します。

$$\iint_S \left(\frac{\partial F_x}{\partial z}dzdx - \frac{\partial F_x}{\partial y}dxdy\right) = \oint_C F_x dx \tag{2.14}$$

S' を S の xy 平面への正射影とし，C' を S' の境界とします。曲面 S の式を $z=f(x,y)$ とすると，C についての線積分を xy 平面上の C' についての線積分として書き換えることができて



$$\oint_C F_x(x,y,z)dx = \oint_{C'} F_x(x,y,f(x,y))dx$$

となります。ここで平面に関するグリーンの定理を適用すると $P=F_x$, $Q=0$ とおいて

$$\begin{aligned}\oint_{C'} F_x(x,y,f(x,y))dx &= -\iint_{S'} \frac{\partial F_x(x,y,f(x,y))}{\partial y}dxdy \\ &= -\iint_{S'}\left[\frac{\partial F_x}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y}+\frac{\partial F_x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial y}+\frac{\partial F_x}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y}\right]_{z=f(x,y)}dxdy \\ &= -\iint_{S'}\left(\frac{\partial F_x}{\partial y}+\frac{\partial F_x}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y}\right)dxdy \end{aligned} \tag{2.15}$$

となります。積分の変数変換の公式 (1.4) を使えば

$$dzdx = \frac{\partial(z,x)}{\partial(x,y)}dxdy = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y}-\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial x}{\partial x}\right)dxdy = -\frac{\partial f}{\partial y}dxdy$$

となるので,

$$\begin{aligned}\iint_{S'}\left(\frac{\partial F_x}{\partial z}dzdx-\frac{\partial F_x}{\partial y}dxdy\right) &= -\left(\iint_{S'}\frac{\partial F_x}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y}dxdy+\frac{\partial F_x}{\partial y}dxdy\right) \\ &= \oint_{C'} F_x(x,y,f(x,y))dx \\ &= \oint_C F_x(x,y,z)dx \end{aligned}$$

となり，(2.14) が証明されます。まったく同様にして

$$\iint_S \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} dxdy - \frac{\partial F_y}{\partial z} dydz \right) = \oint_C F_y(x, y, z) dy \tag{2.16}$$

$$\iint_S \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} dydz - \frac{\partial F_z}{\partial x} dzdx \right) = \oint_C F_z(x, y, z) dz \tag{2.17}$$

を得るので (2.14)，(2.16)，(2.17) を足あわせるとストークスの定理 (2.13) が得られます。//

※補足：ストークスの定理は次のようにも表せます。曲面 S が閉曲線 C を境界にもつとき，S 上の任意のスカラー場を $f(x, y, z)$ とすると

$$\iint_S \boldsymbol{n} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial z} \boldsymbol{j} - \frac{\partial f}{\partial y} \boldsymbol{k} \right) dS = \oint_C f dx \tag{2.18}$$

$$\iint_S \boldsymbol{n} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x} \boldsymbol{k} - \frac{\partial f}{\partial z} \boldsymbol{i} \right) dS = \oint_C f dy \tag{2.19}$$

$$\iint_S \boldsymbol{n} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial y} \boldsymbol{i} - \frac{\partial f}{\partial x} \boldsymbol{j} \right) dS = \oint_C f dz \tag{2.20}$$

***** お疲れ様でした。これで第 2 話を終了します。*******

第 3 話. ガウスの定理

最終話の第 3 話はガウスの定理についてのお話です。**ガウスの定理**は面積分と体積積分を関係付けるもので**ガウスの発散定理**ともいわれます。電磁気学や流体力学ではいやでも必ずお目にかかる奴で，お馴染みのモノと思いますので，簡単に話を進めることにします。

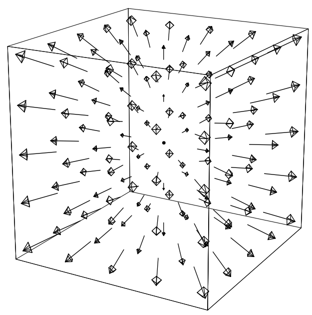
3.1 ガウスの定理（その１）－その意味するところ－

閉曲面 S の囲まれた領域 V において連続かつ連続な一階偏導関数をもつベクトル関数 $\boldsymbol{F}$ に対し

$$\iiint_V \nabla\cdot\boldsymbol{F}dV = \iint_S \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{F}dS \tag{3.1}$$

が成り立つ。ただし，$\boldsymbol{n}$ は曲面の外側を向く単位法線ベクトル。これを**ガウスの定理**といいます。ベクトル場 $\boldsymbol{F}$ をなにかの流れとすると，流れ場 $\boldsymbol{F}$ の中に任意の閉曲面 S をとった場合，S を貫いて外にでる流れの量は，閉曲面の体積 V の内部に含まれる湧きだしの総量に等しい，ということを意味しています[11]。

V を球面 $S : x^2+y^2+z^2 = 2^2$ の内部とするとき，ベクトル関数 $\boldsymbol{F} = 4x\boldsymbol{i}+4y\boldsymbol{j}-2z\boldsymbol{k}$（右図参照）に対してガウスの定理が成立することを確かめましょう。(2.8) より



$$\begin{aligned}
\boldsymbol{n}dS &= 4(\sin^2\theta\cos\phi,\, \sin^2\theta\sin\phi,\, \sin\theta\cos\theta)\\
\boldsymbol{F} &= (4\sin\theta\cos\phi,\, 8\sin\theta\sin\phi,\, -4\cos\theta)\\
\nabla\cdot\boldsymbol{F} &= \left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z})\cdot(4x\boldsymbol{i}+4y\boldsymbol{j}-2z\boldsymbol{k}\right) = 4+4-2=6
\end{aligned}$$

これから

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{F}dS &= 4(8\sin\theta\cos\phi,\, 8\sin\theta\sin\phi,\, -4\cos\theta)\cdot(\sin^2\theta\cos\phi,\, \sin^2\theta\sin\phi,\, \sin\theta\cos\theta)\\
&= 32\sin^3\theta\cos^2\phi + 32\sin^3\theta\sin^2\phi - 16\sin\theta\cos^2\theta\\
&= 16(3\sin^3\theta - \sin\theta)
\end{aligned}$$

したがって，

$$\iint_S \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{F}dS = 16\int_0^\pi (3\sin^3\theta-\sin\theta)d\theta\int_0^{2\pi}d\phi = 64\pi$$

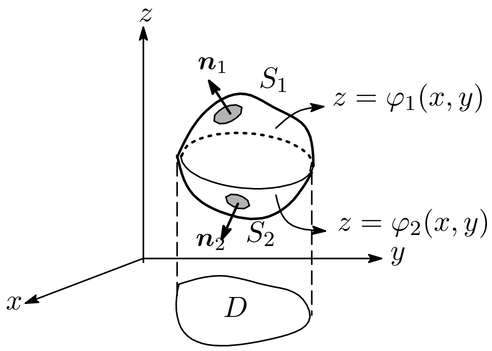
$$\iiint_V \nabla\cdot\boldsymbol{F}dV = 6\iiint_V dV = 6\iiint_V \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\phi)}\right| drd\theta d\phi = 6\int_0^2 r^2dr\int_0^\pi \sin\theta d\theta\int_0^{2\pi}d\phi = 64\pi \quad //$$

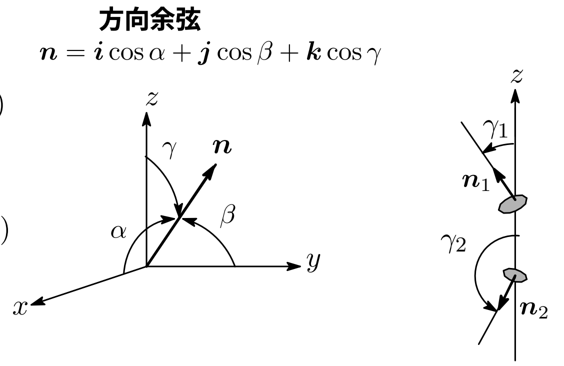
3.2 ガウスの定理（その２）－法線面積積分－

ベクトル場 $\boldsymbol{F}$ で曲面 S の単位法線ベクトルを $\boldsymbol{n}$ とするとき，面積分

$$\iint_S \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{F}dS \tag{3.2}$$

[11] 詳しくは「流体力学 Tips・第 1 話」などを参照されたし。





を曲面 S に関する $\boldsymbol{F}$ の法線面積分といいます。$\boldsymbol{n}$ の方向余弦を $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ とすると

$$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{i}\cos\alpha+\boldsymbol{j}\cos\beta+\boldsymbol{k}\cos\gamma$$
$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{F}=F_x\cos\alpha+F_y\cos\beta+F_z\cos\gamma$$

であるので

$$\iint_S \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{F}dS=\iint_S(F_x\cos\alpha+F_y\cos\beta+F_z\cos\gamma)dS$$

と書けます。これに

$$\begin{cases} dydz=\cos\alpha\,dS \\ dzdx=\cos\beta\,dS \\ dxdy=\cos\gamma\,dS \end{cases} \tag{3.3}$$

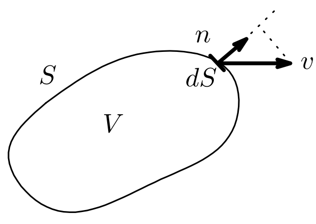
を代入すると

$$\iint_S \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{F}dS=\iint_S(F_xdydz+F_ydzdx+F_zdxdy)dS \tag{3.4}$$

となります。

3.3 ガウスの定理（その３）－連続の式－

流れの中に，空間に固定した任意の閉曲面 S を考えます。S に囲まれた領域を V とすると，任意の時刻で V に含まれる質量は $\iiint_V \rho\,dV$ となり，単位時間当たりの質量変化は $\frac{d}{dt}\iiint_V \rho\,dV$ で，この質量変化は流体が表面 S を通して領域 V に流れ込む，あるいは流れ出ることによって起こると考えられます。



表面 S の面積要素 dS に垂直な単位法線ベクトルを $\boldsymbol{n}$ をすると，dS を通って単位時間に流出する質量は流速を $\boldsymbol{v}$ として $\boldsymbol{n}\cdot\rho\boldsymbol{v}dS$ となります。したがって S 全面を通っての全流出量は，全表面積にわたっての積分で $\iint_S \boldsymbol{n}\cdot\rho\boldsymbol{v}dS$ となります。これは領域 V からでていく全流出量ですから，これにマイナス符号をつけたものが単位時間当たりの質量変化に等しく

$$\frac{d}{dt}\iiint_V \rho\,dV=-\iint_S \boldsymbol{n}\cdot\rho\boldsymbol{v}dS$$

右辺はガウスの定理より

$$\iint_S \boldsymbol{n} \cdot \rho \boldsymbol{v} dS = \iiint_V \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v}) dV$$

とおけるので

$$\iiint_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v}) \right) dV = 0$$

となります[12]。この式が任意の領域で成り立つには被積分関数が恒等的にゼロでなければならないから

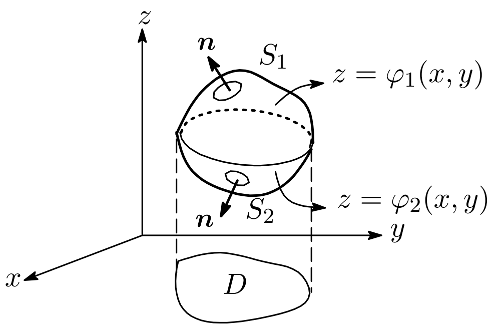
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v}) = 0$$

となって，連続の式が得られます。

3.4 ガウスの定理の証明

簡単のために，閉曲面 S は z 軸に平行な直線と 3 点以上で交わらないとします。曲面 S の xy 平面上への正射影を D とし，S 上の閉曲線 C の正射影が D の境界を作っているとします。このとき S は C によって上下 2 つの部分に分けられ，上の部分を S_1: $z = \varphi_1(x, y)$，下の部分を S_2: $z = \varphi_2(x, y)$ とします。

さて，(3.4) を使ってガウスの定理を次のように書き換えておきます。



$$\begin{aligned} &\iiint_V \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right) dxdydz \\ &= \iint_S (F_x dydz + F_y dzdx + F_z dxdy) \end{aligned}$$

ストークスの定理の証明でやったのと同様，この等式が成分ごとに成り立つことを示せば証明が完了しますので，まずは F_z 成分より

$$\iiint_v \frac{\partial F_z}{\partial z} dxdydz = \iint_S F_z dxdy \tag{3.5}$$

が成り立つことを確認します。左辺は

$$\begin{aligned} \iiint_v \frac{\partial F_z}{\partial z} dxdydz &= \iint_D \left(\int_{\varphi_2}^{\varphi_1} \frac{\partial F_z}{\partial z} dz \right) dxdy \\ &= \iint_D F_z(x, y, \varphi_1) dxdy - \iint_D F_z(x, y, \varphi_2) dxdy \end{aligned}$$

となります。右辺は

$$\iint_S F_z dxdy = \iint_{S_1} F_z dxdy + \iint_{S_2} F_z dxdy$$

で，S_1 においては単位法線ベクトルは z 軸と鋭角をなし，S_1 においては鈍角をなすので (3.3) より

$$\begin{cases} \displaystyle\iint_{S_1} F_z dxdy = \iint_D F_z(x, y, \varphi_1) dxdy \\ \displaystyle\iint_{S_2} F_z dxdy = -\iint_D F_z(x, y, \varphi_2) dxdy \end{cases}$$

[12]時間微分は被積分関数に直接作用しますから偏微分になります。

となり，以上のことから (3.5) の等式が証明できました。他の成分でも同様で，これら 3 つを加え合わせることでガウスの定理が証明できます。//

※補足：ガウスの定理は次のようにも表せます。空間内の領域 V が閉曲面 S で囲まれているとき，V 上の任意のスカラー場を $f(x, y, z)$ に対して次式が成り立ちます。

$$\iiint_V \frac{\partial f}{\partial x} dxdydz = \int_S f dydz = \int_S f\boldsymbol{n} \cdot idS = \int_S f \cos\alpha \, dS \tag{3.6}$$

$$\iiint_V \frac{\partial f}{\partial y} dxdydz = \int_S f dzdx = \int_S f\boldsymbol{n} \cdot jdS = \int_S f \cos\beta \, dS \tag{3.7}$$

$$\iiint_V \frac{\partial f}{\partial z} dxdydz = \int_S f dxdy = \int_S f\boldsymbol{n} \cdot kdS = \int_S f \cos\gamma \, dS \tag{3.8}$$

***** お疲れ様でした。これで第 3 話を終了します。*******

参考文献

１．千葉逸人「ベクトル解析からの幾何学入門」(現代数学社，2007）
２．寺田文行・福田隆「演習と応用ベクトル解析」（サイエンス社，2000）