Laplace変換小話

KENZOU

2013 年 7 月 30 日
2013 年 8 月 11 日
(付録追記)

目 次

1 Laplace 変換とは **3**
1.1 積分変換 3

2 Laplace 変換 **4**
2.1 因果関数 4
2.2 初等関数のラプラス変換 5
2.3 ラプラス変換の性質 5
2.4 畳み込み積分とそのラプラス変換 8
2.4.1 畳み込み積分 8
2.4.2 畳み込み積分のラプラス変換 9
2.5 その他代表的な関数のラプラス変換 10
2.5.1 単位階段関数 10
2.5.2 デルタ関数 11
2.5.3 周期関数のラプラス変換 11
2.5.4 級数で展開された関数のラプラス変換 12

3 逆 Laplace 変換 **13**
3.1 有理関数の逆 Laplace 変換 13
3.2 畳み込み積分の逆 Laplace 変換 17

4 微分方程式の解法への応用 **17**
4.1 定数係数線形微分方程式 17
4.1.1 1 階微分方程式 17
4.1.2 2 階微分方程式 18
4.1.3 連立微分方程式 19
4.2 変数係数線形微分方程式 20
4.3 線形偏微分方程式 20

付録 **22**

1 ラプラス変換の存在と収束座標について 22
1.1 ラプラス変換の存在 22
1.2 収束座標と収束域 24

2 ラプラス変換とフーリエ変換について 25

ラプラス変換は微分方程式を代数演算に置きかえて解を求める方法として，大変強力な武器の一つとなっています。例えば LR 回路での電流 J の時間変化は次の線形微分方程式 $L\dot{J}(t)+RJ(t)=E$ で記述されますが，この微分方程式をラプラス変換すると

$$(Ls+R)I(s)=\frac{E}{s}, \quad \therefore\ I(s)=\frac{E}{s(Ls+R)}=\frac{E}{R}\left(\frac{1}{s}+\frac{1}{s+R/L}\right) \tag{0.1}$$

となり，$J(t)$ をラプラス変換した $I(s)$ が代数的に求められます。後は $I(s)$ を逆ラプラス変換して $J(t)$ を求めるわけですが，この作業は逆ラプラス変換表を使って容易にでき，その結果 $J(t)=\frac{E}{R}\left(1-e^{-(R/L)t}\right)$ となります。

この小稿ではラプラス変換の導入から簡単な常（偏）微分方程式の解き方まで，数学的な厳密さは無視してその主なエッセンスだけを要約してまとめました。尚，複素関数論からのアプローチはまた別の機会に取り上げたいと思います。

※参考図書：杉山昌平「ラプラス変換入門」実教出版，1977。鈴木隆「自動制御理論演習」学献社,1979

1　Laplace 変換とは

1.1　積分変換

ある関数 $f(t)$ を，積分を使って

$$g(s)=\int_a^b K(s,t)f(t)dt \tag{1.1}$$

関数 $g(\alpha)$ に変換することを考えます。これは何をしているのかというと，t 領域で定義された関数 $f(t)$ を s 領域のもう一つの関数 $g(s)$ へ映し変えているわけです。このような積分を使った変換を一般に**積分変換**と呼び、2 変数関数 $K(s,t)$ は**核関数**とか**核**と呼ばれます[1]。

積分変換を演算子 $\mathcal{L}$ で表わすと (1.1) は形式的に

$$g(s)=\mathcal{L}\{f(t)\} \tag{1.2}$$

と書けます。ここで両辺に左から**逆演算子**$\mathcal{L}^{-1}$ を作用させると[2]

$$\mathcal{L}^{-1}\{g(s)\}=\mathcal{L}^{-1}\mathcal{L}\{f(t)\} \quad \therefore\ f(t)=\mathcal{L}^{-1}\{g(s)\} \quad (\because \mathcal{L}^{-1}\mathcal{L}\equiv 1) \tag{1.3}$$

(1.3) は**逆変換**と呼ばれます。さて，なぜこのような変換を考えるのかということですが，初めの座標系 (t 領域) では容易に解けなかった問題が，積分変換して s 領域での問題に焼きなおすと簡単に解けるというようなことがあるからです[3]。s 領域で解いて得られた解を，今度は逆変換して t 領域に戻せば求める解が得られることになりますね！(このあたりの事は後ほどやっていきます)。

積分変換の意義を理解したところで核関数 $K(s,t)$ について少し触れておきます。核関数は問題に応じていろいろなものが考えられていますが (詳細は Wiki の「積分変換」を参照)，ここでは代表的な次の 2 つを紹介します。

$$K(\omega,t)\equiv e^{-i\omega t} \longrightarrow \quad g(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt \tag{1.4}$$

$$K(s,t)\equiv e^{-st} \longrightarrow \quad g(s)=\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt \tag{1.5}$$

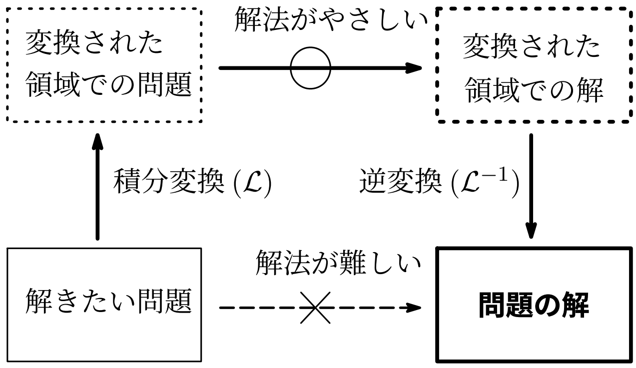
---

[1] K は $Kernel$（核）の K

[2] 逆演算子 $\mathcal{L}^{-1}$ が存在すると仮定して。

[3] ラプラス変換すると微分や積分は s 領域では単なる s の多項式となります！

(1.4) はいわずと知れた**フーリエ変換**ですね[4]。そして (1.5) が本レポートのテーマである**ラプラス変換**です。ラプラス変換では s は実数でも複素数でもいいのですが，一般的に複素数をとります。したがって $g(s)$ は複素関数ということになります。また，積分区間が $[0, \infty]$ となっていることに留意ください。これは積分の収束性と関係があり[5]，そのお話は次の項でやります。



積分変換は以下の式が成り立つことから**線形変換**であることがわかります。c_1, c_2, c を定数として

$$\int_a^b K(s,t)\{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\}dt = \int_a^b c_1 K(s,t) f_1(t) dt + \int_a^b c_2 K(s,t) f_2(t) dt \tag{1.6}$$

$$\int_a^b K(s,t) c f(t) = c \int_a^b K(s,t) f(t) dt \tag{1.7}$$

2 Laplace 変換

ラプラス変換は定数係数の線形微分方程式を簡単に解く方法として発展してきました。具体的なお話は順を追ってやっていくとして，まずラプラス変換の存在から話を進めていきましょう。

2.1 因果関数

複素数 s を実部と虚部に分解して

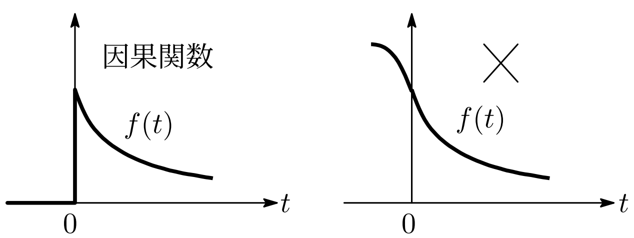
$$s = \sigma + i\omega \qquad (\sigma, \omega : \text{実数, かつ } \sigma > 0) \tag{2.1}$$

と表わすと，ラプラス変換 (1.5) は

$$F(s) = \int_0^\infty \Big\{ f(t) e^{-\sigma t} \Big\} e^{-i\omega t} dt \tag{2.2}$$

となり[6]，積分区間の違いを除けばフーリエ変換と同じ形をしていますね[7]。いま，関数 $f(t)$ が $t \to \infty$ で発散するような関数であったとします。そのような関数でもラプラス変換では指数関数 $e^{-\sigma t}(\sigma > 0)$ を $f(t)$ に掛けているので，その収束性により発散が抑え込まれ，ラプラス変換は存在します（とはいっても $f(t) = e^{t^2}$ のような関数では $t \to \infty$ での発散が強烈なためにラプラス変換は存在しません）。指数関数 $e^{-\sigma t}(\sigma > 0)$ のことを**収束因子**と呼んでいます。

ところで，$t \to -\infty$ となると話しは別で，指数関数 $e^{-\sigma t}$ が強く発散してしまうためにラプラス変換は存在しないことになります。ラプラス変換の積分区間を $[0, \infty]$ としているのはこのようなことからきています。ということで，ラプ



[4]係数 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ は省略しています。
[5]積分が発散してしまえば変換の意味がないですね。
[6]関数 $g(s)$ を $F(s)$ と書き改めておきます。
[7]詳細は略しますが，ラプラス変換はフーリエ変換を拡張したものとなっています。

ラス変換では関数 $f(t)$ としては $t=0$ 以前はすべてゼロで $t=0$ 以後に有限な値を持つ関数（因果関数）[8]に対してのみ適用できることになります。

$$\text{因果関数}\begin{cases} f(t)=0 & t<0 \\ f(t):\text{有限値} & t\geqq 0 \end{cases} \tag{2.3}$$

2.2 初等関数のラプラス変換

ラプラス変換

$$F(s)=\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt \tag{2.4}$$

を演算子 $\mathcal{L}$ を使って

$$F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\} \tag{2.5}$$

と表わすことにします。ラプラス変換を使って実際に問題を解いていくにはラプラス変換のいろいろな性質を活用します。ラプラス変換の性質はこの後すぐ調べるとして，まず手慣らしに初等関数[9]をラプラス変換してみましょう。積分の具体的なやり方は省略するとして結果は次の通りです。尚，Re は複素数の実部を意味します。

$$\begin{aligned}
&f(t)=1 && \mathrm{Re}\,s>0 &&: F(s)=\int_0^\infty e^{-st}dt=\frac{1}{s}\\
&f(t)=t && \mathrm{Re}\,s>0 &&: F(s)=\int_0^\infty e^{-st}t\,dt=\frac{1}{s^2}\\
&f(t)=t^n && \mathrm{Re}\,s>0,\ n>-1 &&: F(s)=\int_0^\infty e^{-st}t^n dt=\frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}\quad(\Gamma:\text{ガンマ関数})\\
&f(t)=e^{at} && \mathrm{Re}(s-a)>0 &&: F(s)=\int_0^\infty e^{-st}e^{at}dt=\int_0^\infty e^{-(s-a)t}dt=\frac{1}{s-a}\\
&f(t)=\cosh\omega t && \mathrm{Re}\,s>|\omega| &&: F(s)=\int_0^\infty e^{-st}\cosh\omega t dt=\int_0^\infty e^{-st}\frac{1}{2}(e^{\omega t}-e^{-\omega t})dt=\frac{s}{s^2-\omega^2}\\
&f(t)=\sinh\omega t && \mathrm{Re}\,s>|\omega| &&: F(s)=\int_0^\infty e^{-st}\cosh\omega t dt=\int_0^\infty e^{-st}\frac{1}{2}(e^{\omega t}+e^{-\omega t})dt=\frac{\omega}{s^2-\omega^2}\\
&f(t)=\cos\omega t && \mathrm{Re}\,s>0 &&: F(s)=\int_0^\infty e^{-st}\cos\omega t dt=\frac{s}{s^2+\omega^2}\\
&f(t)=\sin\omega t && \mathrm{Re}\,s>0 &&: F(s)=\int_0^\infty e^{-st}\sin\omega t dt=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}
\end{aligned} \tag{2.6}$$

2.3 ラプラス変換の性質

ラプラス変換の性質を調べていきます。

●線形性： 任意の定数 c_1, c_2 に対して

$$\mathcal{L}\big\{c_1f_1+c_2f_2\big\}=c_1\mathcal{L}\big\{f_1\big\}+c_2\mathcal{L}\big\{f_2\big\} \tag{2.7}$$

が成立します。これは既に述べたように積分変換の性質ですね。

[8]因果関数というのは、ある時刻 t 以前では値を持たない関数です。原因は結果に先行しない。

[9]初等関数といっても初等の簡単な関数というわけではありません。Wiki によれば「初等関数とは、複素数を変数とする多項式関数・指数関数・対数関数主値の四則演算・合成によって表示できる関数である。三角関数や双曲線関数、そして両者の逆関数主値も初等関数と考えることが出来る。初等関数は一価関数に限る。」となっています。

(**例**)：$A\sin(\omega t+\theta)$ をラプラス変換します。

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\sin(\omega t+\theta)\} &= A\mathcal{L}\{\sin\omega t\cos\theta+\cos\omega t\sin\theta\}\\ &= A\cos\theta\mathcal{L}\{\sin\omega t\}+A\sin\theta\mathcal{L}\{\cos\omega t\}\\ &= A\left(\cos\theta\frac{\omega}{s^2+\omega^2}+\sin\theta\frac{s}{s^2+\omega^2}\right)=A\left(\frac{\omega\cos\theta+s\sin\theta}{s^2+\omega^2}\right)\end{aligned}$$

●移動性： $e^{at}f(t)$, $f(t\pm a)$ の変換

$\mathcal{L}\{f(t)\}=F(s)$ とすれば

$$\mathcal{L}\big\{e^{at}f(t)\big\}=F(s-a) \tag{2.8}$$

$$\mathcal{L}\big\{f(t\pm a)\big\}=e^{\pm as}F(s) \tag{2.9}$$

$$\begin{aligned}\because\quad \mathcal{L}\big\{e^{at}f(t)\big\} &= \int_0^\infty e^{-(s-a)t}f(t)dt=F(s-a)\\ \mathcal{L}\big\{f(t\pm a)\big\} &= e^{\pm as}\int_0^\infty e^{-su}f(u)du=e^{\pm as}F(s) \qquad (u\equiv t\pm a)\end{aligned}$$

$a>0$ として座標の正負の移動が $e^{\pm as}$ という形で現われます。

(**例**)：$e^{-at}\cos\omega t$ をラプラス変換します。$\mathcal{L}\{\cos\omega t\}=F(s)=s/(s^2+\omega^2)$ なので

$$\mathcal{L}\{e^{-at}\cos\omega t\}=\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$$

●相似性： $f(at)$ の変換

$\mathcal{L}\{f(t)\}=F(s)$ とすれば任意の定数 a に対して

$$\mathcal{L}\big\{f(at)\big\}=\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right) \tag{2.10}$$

$$\because\quad \mathcal{L}\big\{f(at)\big\}=\int_0^\infty e^{-st}f(at)dt=\frac{1}{a}\int_0^\infty e^{-(s/a)u}f(u)du=\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$$

(**例**)：$\cos\omega t$ をラプラス変換します。$\mathcal{L}\{\cos t\}=F(s)=s/(s^2+1)$ なので

$$\mathcal{L}\{\cos\omega t\}=\frac{1}{\omega}\frac{s/\omega}{(s/\omega)^2+1}=\frac{s}{s^2+\omega^2}$$

●導関数の変換： $f'(t)$, $f^{(n)}$ の変換

(1) $f(t)$ は $0<t<\infty$ で連続で，$\lim_{t\to+0}f(t)=f(+0)$ が存在し[10]，$f'(t)$ は $0<t<\infty$ で区分的に連続とすれば

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}f(t)\right\}=s\mathcal{L}\{f(t)\}-f(+0) \tag{2.11}$$

$$\begin{aligned}\because\quad \mathcal{L}\{f'(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st}f'(t)dt=\Big|e^{-st}f(t)\Big|_0^\infty-\int_0^\infty(-se^{-st})f(t)dt=-f(+0)+sF(s)\\ &= s\mathcal{L}\{f(t)\}-f(+0)\end{aligned}$$

微分演算子 d/dt は s に変換されると覚えておけばいいでしょう。ただし，定数項 $f(+0)$ が現われることも留意しておいてください。

[10]簡単に $f(0)$ としても差し支えはありません。

(2) $f(t),\, f'(t), \cdots, f^{(n-1)}(t)$ はすべて $0 < t < \infty$ で連続で，$\lim_{t \to +0} f^{(k)}(t)$ $(k = 0, 1, \cdots, n-1)$ が存在し，$f^{(k)}g(t)$ は $0 < t < \infty$ で区分的に連続とすれば

$$\mathcal{L}\left\{\left(\frac{d}{dt}\right)^n f(t)\right\} = s^n\mathcal{L}\{f(t)\} - s^{n-1}f(+0) - s^{n-2}f'(+0) - \cdots - sf^{(n-2)}(+0) - f^{(n-1)}(+0) \tag{2.12}$$

$\because$　(1) の結果を使って

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f''(t)\} &= s\mathcal{L}\{f'(t)\} - f'(+0) = s(sF(s) - f(+0)) - f'(+0)\\ &= s^2F(s) - sf(+0) - f'(+0)\end{aligned}$$

同様にして

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n\mathcal{L}\{f(t)\} - \sum_{k=1}^{n} s^{n-k}f^{(k-1)}(+0)$$

n 階微分は s^n に変換されると覚えておけばいいでしょう。ただし，定数項として $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} s^{n-k}f^{(k-1)}(+0)$ が現われることに留意。

(**例**)：$f(t) = \sin\omega t$ として $f'(t)$ のラプラス変換を求めます。

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \omega\mathcal{L}\{\cos\omega t\} = s\mathcal{L}\{\sin\omega t\} = \frac{\omega s}{s^2 + \omega^2}$$

これから $\mathcal{L}\{\cos\omega t\} = s/(s^2 + \omega^2)$ がでてきます。

●積分の変換： $\displaystyle\int_0^t f(u)du,\ \int_0^t t^n f(t)dt$ の変換

(1) $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ とすれば

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u)du\right\} = \frac{1}{s}F(s) \tag{2.13}$$

積分は $1/s$ に変換されます。

(2) $t^n f(t)$ の変換　$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ とすれば

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t t^n f(t)dt\right\} = (-1)^n\left(\frac{d}{ds}\right)^n F(s) \qquad (n = 1, 2, \cdots) \tag{2.14}$$

多項式倍は微分演算子に変換されます。

(**例**)：$f(t) = t\sin\omega t$ のラプラス変換を求めます。

$$\mathcal{L}\{t\sin\omega t\} = (-1)\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{\sin\omega t\} = \frac{2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2}$$

●その他の変換： $\dfrac{f(t)}{t}$ の変換

$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ とし，$\displaystyle\lim_{t \to +0}\frac{f(t)}{t}$ が存在すれば

$$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(s)ds \tag{2.15}$$

$$\because \quad \int_s^\infty F(s)ds = \int_s^\infty \left\{ \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt \right\} ds = \int_0^\infty f(t) \left(\int_s^\infty e^{-st} ds \right) dt$$
$$= \int_0^\infty f(t) \left[-\frac{1}{t} e^{-st} \right]_s^\infty dt = \int_0^\infty e^{-st} \frac{f(t)}{t} dt = \mathcal{L}\left\{ \frac{f(t)}{t} \right\}$$

(**例**)：$f(t) = \dfrac{\sin \omega t}{t}$ $(\omega > 0)$ のラプラス変換を求めます。

$$\mathcal{L}\left\{ \frac{\sin \omega t}{t} \right\} = \int_s^\infty \frac{\omega}{s^2+\omega^2} ds = \left[\tan^{-1} \frac{s}{\omega} \right]_s^\infty = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \frac{s}{\omega}$$

2.4 畳み込み積分とそのラプラス変換

2.4.1 畳み込み積分

$t > 0$ で定義されている 2 つの関数 $f(t), g(t)$ に対して，積分

$$h(t) = \int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau \tag{2.16}$$

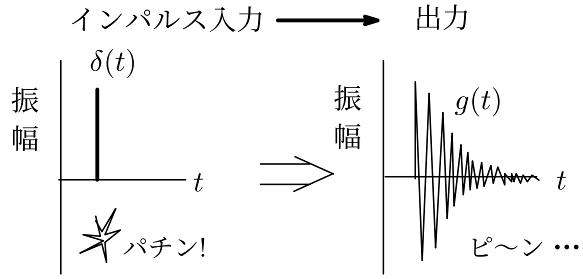
が存在するとき，$h(t)$ を f と g の**畳み込み積分**といいます。一般的に畳み込み積分は記号 $*$ を使って

$$h \equiv f * g \tag{2.17}$$

で表わします。ここで畳み込み積分の意味について少し触れておきます。直感的な理解を目的としてインパルス応答の話をしましょう。

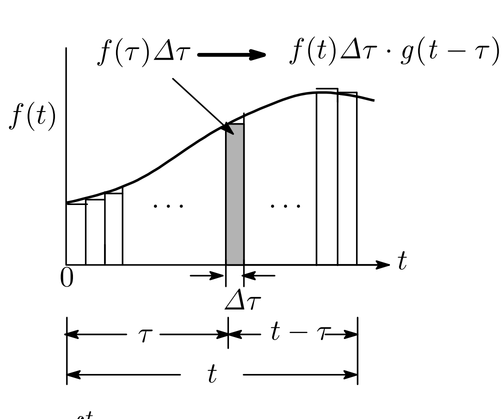
インパル応答というのは

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}, \quad \int_{-\infty}^\infty \delta(t) dt = 1 \tag{2.18}$$



で表わされる**単位インパルス関数**（デルタ関数）に対するシステムの出力（応答）のことで，早い話，マイクの前で手をパチンと叩けば部屋の反響音なども加わりスピーカーからピーンという音がでて次第に減衰していきますね，このようなものをイメージしてください。

さて，下図に示すように，任意の入力信号 $f(t)$ の場合を考えます。入力信号 $f(t)$ を $\Delta\tau$ の微小時間幅で区切れば幅 Δt の方形パルスが得られます。つまり，$f(t)$ は幅 $\Delta\tau$ の方形パルスが連続したものとして近似できます。



いま，単位インパルス入力 $\delta(t)$ に対する応答を $g(t)$ とすると，時刻 τ における $\delta(t-\tau)$ に対する応答は $g(t-\tau)$ なので，時刻 t までの すべての微小方形インパルスに対する応答の総和をとり，$\Delta\tau \to 0$ の極限をとると

$$h(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \sum f(\tau)\Delta\tau g(t-\tau) = \int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau$$

となって，(2.16) が得られます。また，t をこの原点にとり過去にさかのぼってインパルス応答の総和をとると，$y = t - \tau$ とおいて

$$h(t) = \int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau = -\int_t^0 f(t-y) g(y) dy = \int_0^t f(t-\tau) g(\tau) d\tau \tag{2.19}$$

となります。この式は，出力応答の現在の値 $h(t)$ は，現在より時間 τ 前の入力信号 $f(t-\tau)$ に $g(\tau)$ の重みを掛けて 現時点まで積分したもの であるということを示しています。$g(\tau)$ は時刻 τ だけ以前の単位インパルス入力の出力に対してもっている重みと捉えることができます。この意味で $g(\tau)$ のことを**重み関数**と呼んだりします。
(2.19) と (2.19) を見比べると畳み込み積分の性質の一つである交換可能性が成立することが分かります。

$$f * g = g * f \tag{2.20}$$

また，証明は略しますが畳み込み積分は分配則，結合則が成立します。

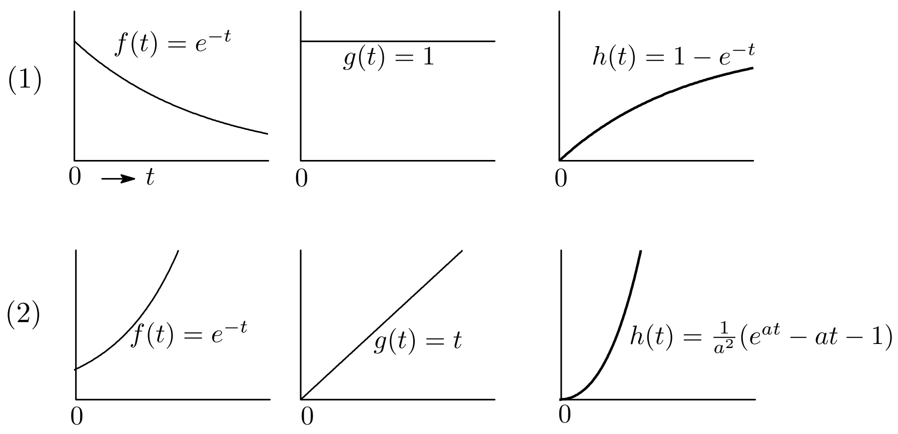
$$f*(g+h) = f*g + f*h \qquad \text{（分配則）} \tag{2.21}$$

$$(f*g)*h = f*(g*h) \qquad \text{（結合則）} \tag{2.22}$$

以上，簡単な説明でしたが，畳み込み積分の“ 畳み込み ”という言葉に込められた意味，つまり過去の影響を現時点にすべて畳み込んでいる… を理解できたのではないかと思います。

(**例**)：(1)$f(t)=e^{-t}, g(t)=1$, (2)$f(t)=e^{at}, g(t)=t$ の畳み込み積分を求めます。

$$(1) \quad h(t) = \int_0^t e^{-t}\cdot 1dx = 1-e^{-t}, \quad (2) \quad h(t)=\int_0^t e^{a\tau}(t-\tau)d\tau = \frac{1}{a^2}(e^{at}-at-1)$$



2.4.2 畳み込み積分のラプラス変換

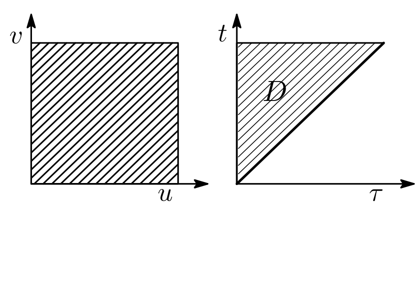
畳み込み積分のラプラス変換はラプラス変換の積になります。$\mathcal{L}\{f\}=F(s)$, $\mathcal{L}\{g\}=G(s)$ とすると

$$\mathcal{L}\{f*g\} = \mathcal{L}\{f\}\cdot\mathcal{L}\{g\} = F(s)\cdot G(s) \tag{2.23}$$

$\because$

$$F(s)\cdot G(s) = \int_0^\infty e^{-su}f(u)du\int_0^\infty e^{-sv}g(v)dv = \iint_0^\infty e^{-s(u+v)}f(u)g(v)dudv$$

この 2 重積分の積分領域は u,v 平面の第 1 象限です。ここで変数変換 $u+v=t,\ v=\tau$ をすると積分範囲は t,τ 平面の斜線領域



D となり，$dudv = dtd\tau$ なので

$$\begin{aligned} F(s)G(s) &= \iint_D e^{-st} f(t-\tau)g(\tau)d\tau dt \\ &= \int_0^\infty e^{-st} \left(\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau \right) dt \\ &= \mathcal{L}\{f * g\} \end{aligned}$$

(**例**)：次のラプラス変換 $\mathcal{L}\{f * g\}$ を求めます。

$$\begin{aligned} &(1) \qquad f(t) = e^{at},\ g(t) = t \\ &(2) \qquad f(t) = \sin t,\ g(t) = \cos t \\ &(3) \qquad \int_0^t e^{-a(t-\tau)} \sinh \omega\tau \, d\tau \end{aligned}$$

(1)

$$\begin{aligned} &f * g = \int_0^t e^{-\tau}(t-\tau)d\tau \\ &\mathcal{L}\{f * g\} = \mathcal{L}\{f\} * \mathcal{L}\{g\} = \mathcal{L}\{e^{at}\}\mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s-a} \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{1}{s^2(s-a)} \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} &f * g = \int_0^t \sin\tau \cos(t-\tau)d\tau \\ &\mathcal{L}\{f * g\} = \mathcal{L}\{f\} * \mathcal{L}\{g\} = \mathcal{L}\{\sin t\}\mathcal{L}\{\cos t\} = \frac{s}{(s^2+1)^2} \end{aligned}$$

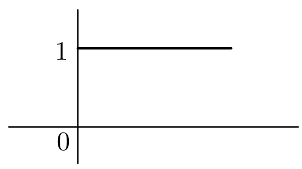
(3)

$$\mathcal{L}\left\{ \int_0^t e^{-a(t-\tau)} \sinh \omega\tau \, d\tau \right\} = \mathcal{L}\{e^{-at}\}\mathcal{L}\{\sinh \omega t\} = \frac{1}{s+a} \cdot \frac{\omega}{s^2 - \omega^2}$$

2.5 その他代表的な関数のラプラス変換

2.5.1 単位階段関数

単位階段関数は物理でよく登場しますが，次のような関数[11]です。



$$\theta(t) = \begin{cases} 1 & (t > 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases} \tag{2.24}$$

原点を $t = a(a \geqq 0)$ にずらせた単位階段関数 $\mathcal{U}(t-a)$ のラプラス変換は

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\theta(t-a)\} &= \int_0^\infty e^{-st}\theta(t-a)dt = \int_0^a e^{-st} \cdot 0dt + \int_a^\infty e^{-st} \cdot 1dt \\ &= \left[-\frac{e^{-st}}{s} \right]_a^\infty = \frac{e^{-as}}{s} \end{aligned} \tag{2.25}$$

とくに $a = 0$ のときは

$$\mathcal{L}\{\theta(t)\} = \mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s} \tag{2.26}$$

[11] 英国の物理学者 Heaviside が導入したのでヘビサイド関数とも呼ばれます。ヘビサイド関数では $t = 0$ のとき $f(t) = 1/2$ と定義されることがあります。

2.5.2 デルタ関数

デルタ関数は (2.18) で登場しましたが，あらためてその定義を書いておきます。

$$\begin{cases} \delta(t) = 0 \quad (t \neq 0) \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1 \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)dt = f(0) \longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-a)dt = f(a) \end{cases} \tag{2.27}$$

デルタ関数のラプラス変換は上の関係式を使えば

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st}\delta(t)dt = 1 \tag{2.28}$$

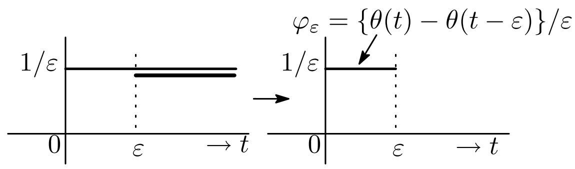
$$\mathcal{L}\{\delta(t-a)\} = \int_0^{\infty} e^{-st}\delta(t-a)dt = e^{-as} \tag{2.29}$$

となります。ついでにデルタ関数のことをもう少し書いておきます。デルタ関数は先ほどの単位階段関数 $\theta(t)$ の微分としても定義でき[12]，この関係はしばしば活用されます。

$$\delta(t) = \frac{d}{dt}\theta(t) \tag{2.30}$$

いま，

$$\varphi_\varepsilon(t) = \frac{\theta(t) - \theta(t-\varepsilon)}{\varepsilon} \quad (\varepsilon \neq 0)$$



という関数を考えると $\varepsilon \to 0$ の極限で

$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \varphi_\varepsilon(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\theta(t) - \theta(t-\varepsilon)}{\varepsilon} = \frac{d}{dt}\theta(t)$$

また，$f(t)$ を任意の連続関数として

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_\varepsilon(t)dt = 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi_\varepsilon(t)dt = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\varepsilon} f(t)dt \to f(0) \quad (\varepsilon \to 0)$$

が成立します。

2.5.3 周期関数のラプラス変換

関数 $f(t)$ を周期 T の周期関数とします。

$$f(t+T) = f(t) \tag{2.31}$$

周期関数のラプラス変換は

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1-e^{-Ts}}\int_0^T e^{-st}f(t)dt \tag{2.32}$$

で与えられます。

$\because$ 積分区間を周期 T で区分してその総和をとっていくと

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st}f(t)dt = \int_0^T e^{-st}f(t)dt + \int_T^{2T} e^{-st}f(t)dt + \cdots + \int_{nT}^{(n+1)T} e^{-st}f(t)dt + \cdots$$

[12] これ以外にもいろいろな定義がありますので，興味があれば調べてみてください。

ここで右辺の各項を対象に $t = nT + \tau \, (n = 0, 1, 2, \cdots)$ と変数変換すると，例えば n 項目は

$$\int_{nT}^{(n+1)T} e^{-st} f(t) dt = \int_0^T e^{-s(nT+\tau)} f(nT+\tau) d\tau = e^{-snT} \int_0^T e^{-s\tau} f(\tau) d\tau$$

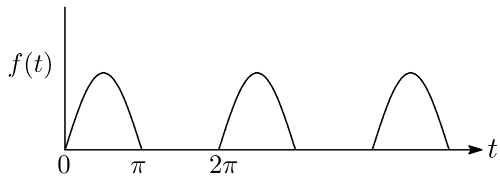
となるので

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f(t)\} &= \int_0^T e^{-s\tau} f(\tau) d\tau + e^{-sT} \int_0^T e^{-s\tau} f(\tau) d\tau + \cdots + e^{-snT} \int_0^T e^{-s\tau} f(\tau) d\tau + \cdots \\
&= (1 + e^{-sT} + \cdots + e^{-snT} + \cdots) \int_0^T e^{-s\tau} f(\tau) d\tau \\
&= \frac{1}{1 - e^{-Ts}} \int_0^T e^{-s\tau} f(\tau) d\tau \quad (\text{ただし } s > 0)
\end{aligned}$$

(**例**)：次の周期関数のラプラス変換を求めます。

$$f(t) = \begin{cases} \sin t & 2n\pi < t < (2n+1)\pi \\ 0 & (2n+1)\pi < t < (2n+2)\pi \end{cases} \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

周期は $T = 2\pi$ なので



$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f(t)\} &= \frac{1}{1 - e^{-2\pi s}} \int_0^{2\pi} e^{-st} \sin t dt \\
&= \frac{1}{1 - e^{-2\pi s}} \int_0^{\pi} e^{-st} \sin t dt \\
&= \frac{1}{1 - e^{-2\pi s}} \cdot \frac{1 + e^{-\pi s}}{1 + s^2} = \frac{1}{(1 - e^{-\pi s})(1 + s^2)}
\end{aligned}$$

2.5.4 級数で展開された関数のラプラス変換

関数 $f(t)$ が次のような級数展開で表わされている場合。

$$f(t) = t^{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \qquad (|t| < +\infty \text{ で絶対収束}) \tag{2.33}$$

この関数のラプラス変換は

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{s^{n+\alpha+1}} \tag{2.34}$$

となります。

$\because$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f(t)\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+\alpha} dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^{\infty} e^{-st} t^{n+\alpha} dt \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \mathcal{L}\{t^{n+\alpha}\} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{s^{n+\alpha+1}}
\end{aligned}$$

3 逆 Laplace 変換

ラプラス変換で t 領域から s 領域へ移し変える手法を学んできました。今度は s 領域から t 領域へ戻す**逆ラプラス変換**を学習していきます。

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) \tag{3.1}$$

であるとき，

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} \tag{3.2}$$

を**逆ラプラス変換**といいます[13]。逆ラプラス変換も次の線形性を持ちます。c_1, c_2, c を定数として

$$\mathcal{L}^{-1}\{c_1F(s) + c_2G(s)\} = c_1\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} + c_2\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} \tag{3.3}$$

$$\mathcal{L}^{-1}(cF(s)) = c\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} \tag{3.4}$$

逆ラプラス変換を求めるにはラプラス変換の結果を利用します。そこで基本的な逆ラプラス変換を以下にまとめておきます。

$$\left\{\begin{array}{lcllcl}
f(t) & \longleftrightarrow & F(s) & f(t) & \longleftrightarrow & F(s) \\
1 & \longleftrightarrow & 1/s & e^{at}\cos\omega t & \longleftrightarrow & (s-a)/\{(s-a)^2+\omega^2\} \\
t^n\ (n：\text{自然数}) & \longleftrightarrow & n!/s^{n+1} & e^{at}\sin\omega t & \longleftrightarrow & \omega/\{(s-a)^2+\omega^2\} \\
t^\alpha\ (\alpha > -1) & \longleftrightarrow & \Gamma(\alpha+1)/s^{\alpha+1} & tf(t) & \longleftrightarrow & -F'(s) \\
e^{at} & \longleftrightarrow & 1/(s-a) & f(t-a) & \longleftrightarrow & e^{-as}F(s) \\
t^ne^{at} & \longleftrightarrow & n!/(s-a)^{n+1} & f(at) & \longleftrightarrow & (1/a)F(s/a) \\
\cos\omega t & \longleftrightarrow & s/(s^2+\omega^2) & f'(t) & \longleftrightarrow & sF(s)-f(0) \\
\sin\omega t & \longleftrightarrow & \omega/(s^2+\omega^2) & f''(t) & \longleftrightarrow & s^2F(s)sf(0)-f'(0) \\
t\cos\omega t & \longleftrightarrow & (s^2-a^2)/(s^2+a^2)^2 & \displaystyle\int_0^t f(t)dt & \longleftrightarrow & (1/s)F(s)
\end{array}\right. \tag{3.5}$$

(**例**)：次の関数の逆ラプラス変換を求めます。

(1) $F(s) = \dfrac{2s-3}{s^2+4}$,　　(2) $F(s) = \dfrac{1}{s^2+25}$

$$(1)\quad f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s-3}{s^2+4}\right\} = 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+2^2}\right\} - \frac{3}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+2^2}\right\} = 2\cos 2t - \frac{3}{2}\sin 2t$$

$$(2)\quad f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s-a)}\right\} = \frac{1}{a}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s}\right\} = \frac{1}{a}(e^{at-1})$$

3.1 有理関数の逆 Laplace 変換

$P(s)$, $Q(s)$ を s の多項式とした有理関数

$$F(s) = \frac{Q(s)}{P(s)} = \frac{q_0 + q_1s + q_2s^2 + \cdots + q_ms^m}{p_0 + p_1s + p_2s^2 + \cdots + p_ns^n} \tag{3.6}$$

[13] 逆ラプラス変換は一意的ではありませんが，関数 $f(t)$ が連続関数であれば一意的となります。

は必ず部分分数に展開できます。分母の $P(s)$ を因数分解して

$$\begin{aligned} P(s) &= p_0 + p_1 s + p_2 s^2 + \cdots + p_n s^n \\ &= p_n(s-a_1)(s-a_2)\cdots(s-a_n) = p_n \prod_{k=1}^{n}(s-a_k) \end{aligned} \tag{3.7}$$

と表わされたとすると，$a_1,\, a_2,\, \cdots, a_n$ は $P(s)=0$ の根となります。

(1)$P(s)=0$ **が** n **個の相異なる根を持つ場合：** この場合は

$$F(s) = \frac{Q(s)}{P(s)} = \frac{c_1}{s-a_1} + \frac{c_2}{s-a_2} + \cdots + \frac{c_n}{s-a_n} \tag{3.8}$$

と部分分数に展開できます。係数 $c_k\ (k=1,2,\cdots,n)$ は次の手順で求められます。両辺に $(s-a_k)$ を掛けると

$$(s-a_k)\frac{Q(s)}{P(s)} = (s-a_k)\left\{\frac{c_1}{s-a_1} + \frac{c_2}{s-a_2} + \cdots\right\} + c_k + (s-a_k)\left\{\frac{c_{k+1}}{s-a_{k+1}} + \cdots + \frac{c_n}{s-a_n}\right\}$$

ここで $s \to a_k$ の極限をとると

$$\lim_{s\to a_k}\left\{(s-a_k)\frac{Q(s)}{P(s)}\right\} = c_k$$

が得られます。左辺は 0/0 の不定形の極限値となるのでロピタルの定理[14]を使うと

$$\lim_{s\to a_k}\left\{(s-a_k)\frac{Q(s)}{P(s)}\right\} = \lim_{s\to a_k}\frac{Q(s)-(s-a_k)Q'(s)}{P'(s)} = \frac{Q(a_k)}{P'(a_k)}$$

となるので

$$c_k = \frac{Q(a_k)}{P'(a_k)} \tag{3.9}$$

また

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-a_k}\right\} = e^{a_k t}$$

なので

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \sum_{k=1}^{n}\frac{Q(a_k)}{P'(a_k)}e^{a_k t} \tag{3.10}$$

(3.10) は **Heaviside の展開定理**と呼ばれます。

(**例**)：$F(s) = \dfrac{2s+3}{s^2+5s+6}$ の逆ラプラス変換を求めます。Heaviside の展開定理を使えば $F(s)$ を部分分数に展開しなくても直接ラプラス逆変換ができます。

$$\begin{cases} P(s) = s^2+5s+6 = (s+2)(s+3),\ P'(s) = 2s+5 \\ P'(-2) = 1,\ Q(-2) = -1,\ P'(-3) = -1,\ Q(-3) = -1 \end{cases} \qquad \therefore\ f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = -e^{-2t} + 3e^{-3t}$$

(補注)

$$\frac{2s+3}{s^2+5s+6} = \frac{2s+3}{(s+2)(s+3)} = \frac{c_1}{s+2} + \frac{c_2}{s+3}$$

[14] $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0,\ \lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$ のとき，$\lim\limits_{x\to 0} f(x)/g(x) = \lim\limits_{x\to 0} f'(x)/g'(x)$

(2)$P(s)=0$ **が** r **個** $(r \leqq n)$ **の重根** (a_0) **を持つ場合：** この場合は

$$
\begin{aligned}
F(s) = \frac{Q(s)}{P(s)} &= \frac{Q(s)}{(s-a_0)^r A(s)} = \frac{c_1}{s-a_0} + \frac{c_2}{(s-a_0)^2} + \cdots + \frac{c_r}{(s-a_0)^r} + F_1(s) \\
&= F_0(s) + F_1(s) \qquad (3.11)
\end{aligned}
$$

と部分分数に展開できます。右辺最後の項の $F_1(s)$ は $(s-a_0)$ を含まない項をひとまとめにしたものです。両辺に $(s-a_0)^r$ を掛けると

$$
(s-a_0)^r \frac{Q(s)}{P(s)} = c_1(s-a_0)^{r-1} + c_2(s-a_0)^{r-2} + \cdots + c_r + F_1(s)(s-a)^r \qquad (3.12)
$$

これから

$$
c_r = \lim_{s \to a_0} \left\{ (s-a_0)^r \frac{Q(s)}{P(s)} \right\}
$$

係数 c_{r-1} は (3.12) を s で微分し，$s \to a_0$ の極限をとって得られます。

$$
c_{r-1} = \lim_{s \to a_0} \frac{d}{ds} \left\{ (s-a_0)^r \frac{Q(s)}{P(s)} \right\}
$$

同様にして係数 c_{r-2} は (3.12) を s で 2 回微分し，$s \to a_0$ の極限をとって

$$
c_{r-2} = \frac{1}{2\,!} \lim_{s \to a_0} \frac{d^2}{ds^2} \left\{ (s-a_0)^r \frac{Q(s)}{P(s)} \right\}
$$

同じことを繰り返せば，係数 c_1 は (3.12) を s で $r-1$ 回微分し，$s \to a_0$ の極限をとって

$$
c_1 = \frac{1}{(r-1)\,!} \lim_{s \to a_0} \frac{d^{r-1}}{ds^{r-1}} \left\{ (s-a_0)^r \frac{Q(s)}{P(s)} \right\}
$$

以上の結果をまとめると係数 c_k $(k \leqq r)$ は

$$
c_k = \frac{1}{(r-k)!} \lim_{s \to a_0} \frac{d^{r-k}}{ds^{r-k}} \left\{ (s-a_0)^r \frac{Q(s)}{P(s)} \right\} \qquad (3.13)
$$

で与えられます。ラプラス逆変換の公式

$$
\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s-a)^n} \right\} = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^a t
$$

を使えば

$$
\begin{aligned}
f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} &= \left\{ c_1 t + c_2 t^2 + \cdots + c_r \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} \right\} e^{at} + \mathcal{L}^{-1}\{F_1(s)\} \\
&= e^{a_0 t} \lim_{s \to a_0} \sum_{k=1}^{r} \frac{t^{k-1}}{(r-k)!(k-1)!} \frac{d^{r-k}}{ds^{r-k}} \left\{ (s-a_0)^r \frac{Q(s)}{P(s)} \right\} + \mathcal{L}^{-1}\{F_1(s)\} \qquad (3.14)
\end{aligned}
$$

(3.16) は重根の場合の Heaviside の展開定理です。$\mathcal{L}^{-1}\{F_1(s)\}$ は **(1)** でやった方法で求められます。

(**例**)：$F(s) = \dfrac{3s+4}{(s-1)^2(s+2)}$ の逆ラプラス変換を求めます。

$$
F(s) = \frac{c_1}{s-1} + \frac{c_2}{(s-1)^2} + \frac{c_3}{s+2} = F_0(s) + F_1(s)
$$

(3.13) より

$$\begin{cases} c_1 = \lim_{s\to 1} \dfrac{d}{ds}\{(s-1)^2 F(s)\} = \lim_{s\to 1} \dfrac{2}{(s+2)^2} = \dfrac{2}{9} \\ c_2 = \lim_{s\to 1}\{(s-1)^2 F(s)\} = \lim_{s\to 1} \dfrac{3s+4}{(s+2)} = \dfrac{7}{3} \end{cases}$$

(3.9) より

$$c_3 = \left.\frac{Q(s)}{P'(s)}\right|_{s=-2} = \left.\frac{3s+4}{3(s^2-1)}\right|_{s=-2} = -\frac{2}{9}$$

$$\therefore \quad f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \left(\frac{2}{9}t + \frac{7}{3}t^2\right)e^t - \frac{2}{9}e^{-2t}$$

(3)$P(s)=0$ **が共役複素根を持つ場合：** この場合は

$$F(s) = \frac{Q(s)}{P(s)} = \frac{Q(s)}{(s+\alpha+j\beta)(s+\alpha-j\beta)P_0(s)} = \frac{c_1 s + c_2}{(s+\alpha)^2+\beta^2} + F_1(s) \tag{3.15}$$

と書けます。両辺に $(s+\alpha)^2+\beta^2$ を掛けると

$$\left\{(s+\alpha)^2+\beta^2\right\}\frac{Q(s)}{P(s)} = \frac{Q(s)}{P_0(s)} = c_1 s + c_2 + \{(s+\alpha)^2+\beta^2\}F_1(s)$$

ここで $s=-\alpha+j\beta$ を上式に代入すると

$$\frac{Q(-\alpha+j\beta)}{P_0(-\alpha+j\beta)} = Q_1 + jQ_2 = c_1(-\alpha+j\beta)+c_2 \tag{3.16}$$

実部と虚部の比較より

$$Q_1 = -\alpha c_1 + c_2,\ Q_2 = \beta c_1, \quad \therefore \quad c_1 = \frac{Q_2}{\beta}, \quad c_2 = Q_1 + \frac{\alpha}{\beta}Q_2$$

したがって

$$F(s) = \frac{1}{\beta}\frac{(s+\alpha)Q_2+\beta Q_1}{(s+\alpha)^2+\beta^2} + F_1(s) = \frac{1}{\beta}\left\{Q_2\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\beta^2} + Q_1\frac{\beta}{(s+\alpha)^2+\beta^2}\right\} + F_1(s)$$

ラプラス逆変換の公式

$$\begin{cases} \quad F(s) & & f(t) \\ (s-a)/\{(s-a)^2+\omega^2\} & \longleftrightarrow & e^{at}\cos\omega t \\ \omega/\{(s-a)^2+\omega^2\} & \longleftrightarrow & e^{at}\sin\omega t \end{cases}$$

より

$$\begin{aligned} f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} &= \frac{1}{\beta}e^{-\alpha t}(Q_1\sin\beta t + Q_2\cos\beta t) + \mathcal{L}^{-1}\{F_1(s)\} \\ &= \frac{1}{\beta}\sqrt{Q_1^2+Q_2^2}e^{-\alpha t}sin\,(\beta t+\gamma) + \mathcal{L}^{-1}\{F_1(s)\}, \quad \gamma = \tan^{-1}\frac{Q_2}{Q_1} \end{aligned} \tag{3.17}$$

したがって，$f(t)$ は α, β, Q_1, Q_2 が分かればただちにが求まります。

(**例**)：$F(s) = \dfrac{s+1}{s^2-6s+13}$ の逆ラプラス変換を求めます。

$$F(s) = \frac{Q(s)}{P(s)} = \frac{s+1}{(s-3+j2)(s-3-j2)}$$

とおくと $\alpha=-3,\ \beta=2,\ P_0(s)=1$ で (3.16) より

$$Q(3+j2)=4+j2=Q_1+jQ_2, \quad \therefore\ Q_1=4,\ Q_2=2$$

したがって (3.17) より

$$f(t)=\sqrt{5}\,e^{3t}\sin\left(2t+\tan^{-1}\frac{1}{2}\right) \tag{3.18}$$

3.2 畳み込み積分の逆 Laplace 変換

畳み込み積分とラプラス変換の関係をまとめておきます。$F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\},\ G(s)=\mathcal{L}\{g(s)\}$ として

$$f*g=\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau \tag{3.19}$$

$$\mathcal{L}\{f*g\}=F(s)\cdot G(s) \tag{3.20}$$

(3.20) の逆ラプラス変換は

$$f*g=\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\cdot G(s)\} \tag{3.21}$$

となります。$f(t),\ g(t)$ の畳み込み積分は直接積分計算するか，(3.21) より求めることができます。

(**例 1**)：$f(t)=e^{-at},\ g(t)=e^{-bt}\ (a>b>0)$ の畳み込み積分を求めます。

$$F(s)=\frac{1}{s+a},\ G(s)=\frac{1}{s+b}$$

$$f*g=\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\cdot G(s)\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+a)(s+b)}\right\}=\frac{1}{a-b}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+b}-\frac{1}{s+a}\right)=\frac{1}{a-b}(e^{-bt}-e^{-at})$$

(**例 2**)：$f(t)=e^{at},\ g(t)=t$ の畳み込み積分を求めます。

$$F(s)=\frac{1}{s-a},\ G(s)=\frac{1}{s^2}$$

$$f*g=\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\cdot G(s)\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s-a)}\right\}=\frac{1}{a^2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-a}-\frac{1}{s}-\frac{a}{s^2}\right\}=\frac{1}{a^2}(e^{at}-at-1)$$

4 微分方程式の解法への応用

4.1 定数係数線形微分方程式

ラプラス変換を用いて微分方程式を解く方法は，微分方程式にラプラス変換を施して s 領域での代数方程式に変換し，s 領域で求めた解を逆変換して求める解を得るというやり方です。ただし，ラプラス変換は線形演算であるので，原則的に線形微分方程式への適用となります。

4.1.1 1 階微分方程式

$a,\ f(t)$ を既知として 1 階微分方程式

$$y'(t)+ay(t)=f(t) \tag{4.1}$$

をラプラス変換すると

$$\mathcal{L}\{y'(t)\}+a\mathcal{L}\{y(t)\}=\mathcal{L}\{f(t)\}, \quad F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}$$

導関数のラプラス変換は

$$\mathcal{L}\{y'(t)\} = s\mathcal{L}\{y(t)\} - y(0) = sY(s) - y(0) \qquad (\text{ただし } Y(s) \equiv \mathcal{L}\{y(t)\}\,)$$

なので (4.2) は

$$sY(s) - y(0) + aY(s) = F(s)$$

となり，これから

$$Y(s) = \frac{F(s)}{s+a} + \frac{y(0)}{s+a}$$

が得られます。したがって求める解はこれをラプラス逆変換して

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s+a}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{y(0)}{s+a}\right\}$$

右辺第 1 項は畳み込み積分により

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s+a}\right\} = f * g = \int_0^t f(t-\tau)e^{-a\tau}d\tau = e^{-at}\int_0^t f(\tau)e^{a\tau}d\tau$$

と書け，第 2 項は

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{y(0)}{s+a}\right\} = y(0)e^{-at}$$

となるので

$$y(t) = e^{-at}\int_0^t f(\tau)e^{a\tau}d\tau + y(0)e^{-at}$$

となります。

(**例**)：次の 1 階微分方程式を与えられた初期条件のもとで解きます。

$$y'(t) + ay(t) = b, \quad y(0) = c$$

ラプラス変換すると

$$sY(s) - y(0) + aY(s) = b\frac{1}{s} \longrightarrow Y(s) = \frac{b}{s(s+a)} + \frac{c}{s+a} = \frac{b}{a}\left\{\frac{1}{s} - \frac{1}{s+a}\right\} + \frac{c}{s+a}$$

したがって，

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \frac{b}{a}(1 - e^{at}) + ce^{-at}$$

4.1.2 2 階微分方程式

a_1, a_0 を定数とする次の 2 階微分方程式を

$$y''(t) + a_1y'(t) + a_0y(t) = f(t) \tag{4.2}$$

ラプラス変換すると

$$\mathcal{L}\{y''(t)\} + a_1\mathcal{L}\{y'(t)\} + a_0\mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\}$$

導関数のラプラス変換の公式より

$$\mathcal{L}\{y''(t)\} = sY(s) + sy(0) - y'(0), \quad \mathcal{L}\{y'(t)\} = sY(s) - f(0)$$

これを上式に入れて整理すると

$$Y(s) = \frac{y'(0) + a_1 y(0) + sy(0) + F(s)}{s^2 + a_1 s + a_0} \tag{4.3}$$

これをラプラス逆変換すれば求める解 $y(t)$ が得られます。

(例)：$y''(t) + 2y' + y = \sin t, \quad y(0) = y'(0) = 0$
ラプラス変換すると

$$s^2 Y(s) + 2sY(s) + Y(s) = \frac{1}{s^2+1} \longrightarrow Y(s) = \frac{1}{(s+1)^2(s^2+1)} = \frac{1}{2}\frac{1}{s+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{(s+1)^2} - \frac{1}{2}\frac{s}{s^2+1}$$

したがって

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}te^{-t} - \frac{1}{2}\cos t$$

4.1.3 連立微分方程式

連立微分方程式

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + ax + by = f(t) \\ \dfrac{dy}{dt} + cx + dy = g(t) \end{cases} \tag{4.4}$$

を初期条件 $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$ のもとで解きます。ラプラス変換して

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s), \quad \mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s)$$
$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s), \quad \mathcal{L}\{g(t)\} = G(s)$$

とおくと (4.4) は次の連立方程式となります。

$$\begin{cases} (s+a)X(s) + bY(s) = x_0 + F(s) \\ cX(s) + (s+d)Y(s) = y_0 + G(s) \end{cases}$$

$X(s)$, $Y(s)$ について解いて

$$X(s) = \frac{\begin{vmatrix} x_0 + F(s) & b \\ y_0 + G(s) & s+d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s+a & b \\ c & s+d \end{vmatrix}} = \frac{x_0 s + dx_0 - by_0 + (s+d)F(s) - bG(s)}{s^2 + (a+d)s + ad - bc}$$

$$Y(s) = \frac{\begin{vmatrix} s+a & x_0 + F(s) \\ s+d & y_0 + G(s) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s+a & b \\ c & s+d \end{vmatrix}} = \frac{y_0 s + ay_0 - cx_0 + (s+a)G(s) - cF(s)}{s^2 + (a+d)s + ad - bc}$$

これらをラプラス逆変換して $x(t)$, $y(t)$ が求められます。

4.2 変数係数線形微分方程式

定数係数の場合は，上で見てきたようにラプラス変換をすることで微分方程式を s 領域での代数方程式に変換し，容易に解くことができました。しかし係数が変数の場合は一般には解けません。しかし，係数が多項式で表わされる場合には，多項式倍は次のように微分演算子に変換される[15]

$$\mathcal{L}\left\{t^m y^{(n)}\right\} = (-1)^m \frac{d^m}{ds^m}\mathcal{L}\{y^{(n)}\} \tag{4.5}$$

ので，導関数のラプラス変換を使って解くことができます。

(**例**)：$ty'' + 2(t-1)y' + (t-2)y = 0, \quad y(0) = y'(0) = 0$ ラプラス変換して

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}\{ty''\} + 2\mathcal{L}\{(t-1)y'\} + \mathcal{L}\{(t-2)y\} = 0 \\
&-\frac{d}{ds}\{s^2 Y(s)\} - 2\frac{d}{ds}\{sY(s)\} - 2sY(s) - \frac{d}{ds}Y(s) - 2Y(s) = 0 \\
\therefore \quad &(s+1)Y'(s) + 4Y(s) = 0
\end{aligned}$$

が得られます。これから

$$\begin{aligned}
&\frac{Y'(s)}{Y(s)} = -\frac{4}{s+1} \longrightarrow Y(s) = \frac{c_1}{(s+1)^4} \quad (c_1\text{：定数}) \\
\therefore \quad &y = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{c}{(s+1)^4}\right\} \longrightarrow y = c\,t^3 e^{-t} \quad (c\text{：定数})
\end{aligned}$$

4.3 線形偏微分方程式

x, t を独立変数とする $y(x,t)$ についての線形偏微分方程式

$$\frac{\partial^i y}{\partial t^i} = a(x)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + b(x)\frac{\partial y}{\partial x} + c(x)y + \varphi(x,t) \qquad (i = 1, 2) \tag{4.6}$$

を考えます。線形偏微分方程式の具体例を上げると次のようなものです。

$$\begin{cases}
Laplace\text{ 方程式：} & \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}y(x,t) + \dfrac{\partial^2}{\partial t^2}y(x,t) = 0 \\
\text{熱伝導方程式：} & \dfrac{\partial}{\partial t}y(x,t) = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}y(x,t) \\
\text{波動方程式：} & \dfrac{\partial^2}{\partial t^2}y(x,t) = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}y(x,t)
\end{cases}$$

さて，変数 x は無限区間（$-\infty \leqq x \leqq \infty$）を動くものとし，変数 t は $0 \leqq t < \infty$ の片側無限区間で動くものとします。このとき，$y(x,t)$ の x を固定し，t に関するラプラス変換を

$$Y(s,t) = \int_0^\infty e^{-st} y(x,t)dt \tag{4.7}$$

と表わすことにします[16]。ただし，境界条件として $y(x,t)$ は有界で

$$\lim_{x\to\infty} y(x,t) = 0 \tag{4.8}$$

---

[15] (2.14) 参照。

[16] もし，x が片側無限区間で動くときは x についてもラプラス変換できます。

を満たすものとします。境界条件のラプラス変換は

$$\lim_{x\to\infty} Y(x,s) = 0 \tag{4.9}$$

ここで，x についての偏導関数のラプラス変換を以下に示しておきます。

$$\begin{cases} \mathcal{L}\{y(x,t)\} = Y(x,s) \\ \mathcal{L}\left\{\dfrac{\partial}{\partial x}y(x,t)\right\} = \dfrac{\partial}{\partial x}Y(x,s) \\ \mathcal{L}\left\{\dfrac{\partial}{\partial t}y(x,t)\right\} = sY(x,s) - y(x,0) \\ \mathcal{L}\left\{\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}y(x,t)\right\} = s^2Y(x,s) - y(x,0) - y'(x,0) \\ \mathcal{L}\left\{\dfrac{\partial^2}{\partial x\partial t}y(x,t)\right\} = \dfrac{\partial}{\partial x}\mathcal{L}\left\{\dfrac{\partial}{\partial t}(y(x,t)\right\} = \dfrac{\partial}{\partial x}\{sY(x,s) - y(x,0)\} \end{cases} \tag{4.10}$$

偏微分方程式をラプラス変換で解くには，まず偏微分方程式をラプラス変換して s 領域での常微分方程式に変換します。次に常微分方程式を解き，その解をラプラス逆変換して所望の解を得ます。

(**例**)：次の偏微分方程式を解きます。

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial x} = 3\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} + y(x,t), \quad y(x,0) = 3e^{-8x}$$

変数 t についてラプラス変換し，整理すると次の 1 階常微分方程式が得られます。

$$\frac{d}{dx}Y(x,s) - (3s+1)Y(x,s) = -9e^{-8x}$$

この一般解は簡単に求めることができ[17]，次式となります。

$$Y(x,s) = \frac{3}{s+3}e^{-8x} + \frac{3c}{s+3}e^{3s+1}$$

$y(x,t)$ は有界という条件より $\lim_{x\to\infty} Y(x,s) = 0$ で，これを満たすには $c = 0$ でなければなりません。したがって

$$Y(x,s) = \frac{3}{s+3}e^{-8x} \longrightarrow y(x,t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(x,s)\} = 3e^{-8x}e^{-3t}$$

****

（了）

- 2013.8.11：付録を追記

[17] 解法は適当な常微分方程式のテキストを参照ください。

付録

ラプラス変換の実戦上の活用では特に不要かもしれませんが，少し補足しておきます。

1 ラプラス変換の存在と収束座標について

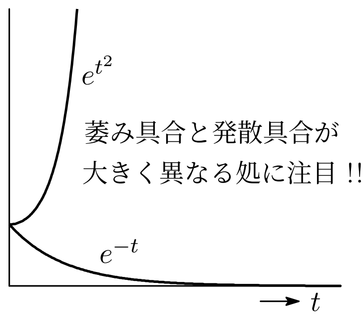
1.1 ラプラス変換の存在

§2.1 の (2.2) で示したように，$f(t)$ のラプラス変換を $F(s)$ とすると

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = \int_0^\infty \left\{ f(t)e^{-\sigma t} \right\} e^{-i\omega t} \quad (s = \sigma + i\omega,\, \sigma > 0) \tag{A. 1}$$

と表わされます。関数 $f(t)$ にかかっている $e^{-\sigma t}$ を収束因子とよび，この因子のお陰で $f(t)$ が $t \to \infty$ で発散するような関数であってもラプラス変換は存在するということを述べました。

しかし，関数 $f(t)$ の発散力が収束因子の収束力を上回るようなものであれば，この場合は積分が発散してしまうのでラプラス変換は存在しません。そのような例として関数 $f(t) = e^{t^2}$ を見てみると，(A. 1) より



$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = \int_0^\infty e^{-st} e^{t^2} dt = e^{-s^2/4} \int_0^\infty e^{(t-s/2)^2} dt$$

ここで $t - s/2 = u$ と変数変換すると

$$F(s) = e^{-s^2/4} \int_{-s/2}^\infty e^{u^2} du = +\infty$$

となって積分は発散し[18]，ラプラス変換は存在しません。ということで，ラプラス変換が存在するためには関数 $f(t)$ に少し条件を付ける必要があります。以下にラプラス変換の存在定理（A),(B) を上げておきます。

(A) $f(t)$ が指数 α 位の関数であれば，$\mathrm{Re}\, s > \alpha$ を満足する総ての s に対してラプラス変換は存在する。

$f(t)$ が $0 \leqq t < \infty$ で区分的に連続[19]で

$$|f(t)| \leqq Me^{\alpha t} \tag{A. 2}$$

が成り立つような正の定数 M, α が存在するとき，$f(t)$ は**指数 α 位の関数**といいます。つまり，$f(t)$ は有界ということを言っているわけですね。そこで $f(t)$ が指数 α 位の関数であれば，$\mathrm{Re}\, s > \alpha$ を満足する[20]すべての s に対してラプラス変換は存在することが証明されます。この証明は特に難しくはないので以下に紹介しておきます。

絶対値の大きさの比較をとると，積分してから絶対値をとったものより，先に絶対値をとったものを積分したものの方が等しいかそれより大きくなるので

$$|F(s)| = \left| \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt \right| \leqq \int_0^\infty \left| f(t)e^{-st} \right| dt \tag{A. 3}$$

が成り立ちます。また，$s = \sigma + i\omega$ なので，上式は

$$|F(s)| = \left| \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt \right| \leqq \int_0^\infty \left| f(t)e^{-(\sigma + i\omega t)} \right| dt \leqq \int_0^\infty \left| f(t)e^{-\sigma t} \right| \left| e^{-i\omega t} \right| dt \tag{A. 4}$$

[18]ただし，積分区間を有限にとればこの積分は収束し，虚数誤差関数で表わされる実数値をとります。
[19]ところどころの不連続な点を除いて連続な関数のこと。
[20]$s = \sigma + i\omega$ なので $\mathrm{Re} s > \alpha$ の条件は $\sigma > \alpha$ ということですね。

と表わせます。$\left|e^{-i\omega t}\right|$ はオイラーの関係式を使えば

$$\left|e^{-i\omega t}\right| = |\cos\omega t - i\sin\omega t| = \sqrt{\cos^2\omega t + \sin^2\omega t} = 1 \tag{A. 5}$$

となるので，$e^{-\sigma t} > 0$ を考慮すると

$$|F(s)| \leqq \int_0^\infty \left|f(t)e^{-\sigma t}\right| dt \leqq \int_0^\infty |f(t)|\, e^{-\sigma t}dt \tag{A. 6}$$

(A. 2) より $|f(t)| \leqq Me^{\alpha t}$ なので，この関係式を上式に入れると

$$|F(s)| \leqq M\int_0^\infty e^{-(\sigma-\alpha)t}dt \tag{A. 7}$$

が成立します。右辺の積分は $\mathrm{Re}\, s > \alpha$ $(\sigma > \alpha)$ であることに留意すると積分できて

$$|F(s)| \leqq M\int_0^\infty e^{-(\sigma-\alpha)t}dt = M\frac{1}{\sigma-\alpha} \tag{A. 8}$$

となり[21]，$|F(s)|$ は有界となってラプラス変換が存在することになります（証明を終わり）。
ただし，留意すべき点として条件 **(A)** はラプラス変換が存在するための 十分条件 であって，この条件を満たさない場合でもラプラス変換は存在し得ます。例えば§2.5.2 で取りあげたデルタ関数は (A. 2) の条件

$$|\delta(t)| \leqq Me^{\alpha t}$$

を満たすような M, α は存在しません。しかしデルタ関数のラプラス変換は

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}\delta(t)t = 1$$

となって存在しますね。

(B) 関数 $f(t)$ のラプラス変換が $s=s_0$ で存在すれば，任意の $\mathrm{Re}\, s > \mathrm{Re} s_0$ に対してラプラス変換は存在する。

この証明の要点は $\displaystyle\int_0^t e^{-su}f(u)du$ を考え，この積分が $t\to\infty$ の極限で $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\left|\int_0^t e^{-su}f(u)du\right|$ が収束することが言えればよいことになります。 仮定により $s=s_0$ でのラプラス変換が存在するので

$$F(s_0) = \int_0^\infty e^{-s_0t}f(t)dt \tag{A. 9}$$

次に，任意の $t\,(>0)$ に対して

$$G(t) = \int_0^t e^{-s_0u}f(u)du \tag{A. 10}$$

とおくと，(A. 9) より $\displaystyle\lim_{t\to\infty} G(t)$ が存在するので，$G(t)$ は有界です。そこで

$$|G(t)| \leqq K \tag{A. 11}$$

としておきます。

$$\int_0^t e^{-su}f(u)du = \int_0^t e^{-(s-s_0)u}\{e^{-s_0u}f(u)\}du = \int_0^t e^{-(s-s_0)t}G'(u)du \quad (G'(u) = dG/du)$$

---

[21] 仮に $\mathrm{Re}s < \alpha$ であれば積分は発散します。

と表わせるので，これを部分積分すれば

$$\int_0^t e^{-su}f(u)du = \left[e^{-(s-s_0)u}G(t)\right]_0^t + (s-s_0)\int_0^t e^{-(s-s_0)u}G(u)du$$
$$= e^{-(s-s_0)t}G(t) + (s-s_0)\int_0^t e^{-(s-s_0)u}G(u)du \qquad \text{(A. 12)}$$

となります。ここで $t\to\infty$ の極限をとると，$\mathtt{Re}\,(s-s_0)>0$ かつ $G(t)$ は有界であることから右辺第 1 項は

$$\lim_{t\to\infty}\left|e^{-(s-s_0)t}G(t)\right| = \lim_{t\to\infty} e^{-\mathtt{Re}\,(s-s_0)\cdot t}\,|G(t)| = 0$$

となって消えます。次に第 2 項の積分ですが，(A. 11) と (A. 5) より，任意の $t_1, t_2\,(t_1<t_2)$ に対して次の不等式が成立します。

$$\left|\int_{t_1}^{t_2} e^{-(s-s_0)u}G(u)du\right| \leqq K\int_{t_1}^{t_2} e^{-\mathtt{Re}\,(s-s_0)\cdot u}du$$

ここで便宜上 $\lambda\equiv\mathtt{Re}(s-s_0)$ と置きかえると

$$\left|\int_{t_1}^{t_2} e^{-(s-s_0)u}G(u)du\right| \leqq K\int_{t_1}^{t_2} e^{-\lambda u}du < K\int_{t_1}^{\infty} e^{-\lambda u}du = K\lim_{T\to\infty}\int_{t_1}^{T} e^{-\lambda u}du$$
$$= K\lim_{T\to\infty}\left[-\frac{e^{-\lambda u}}{\lambda}\right]_{t_1}^{T} = K\lim_{T\to\infty}\frac{1}{\lambda}\left(e^{-\lambda t_1}-e^{-\lambda T}\right) = \frac{K}{\lambda}e^{-\lambda t_1} \qquad (\lambda>0)$$

となり，(A. 12) の第 2 項の積分は $t\to\infty$ で収束します。以上，整理すると $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\left|\int_0^t e^{-su}f(u)du\right|$ は収束するので **(B)** が証明されました。

(C)$s=s_0$ で $F(s_0)$ が絶対収束するとき，$\mathrm{Re}\,s \geqq s_0$ を満たす総ての s に対して $F(s)$ は絶対収束する。

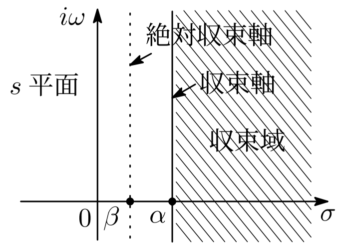
$s=\sigma+i\omega,\ s_0=\sigma_0+i\omega_0$ として，$\mathtt{Re}\,s \geqq \mathtt{Re}\,s_0$ のとき

$$\int_0^\infty \left|e^{-st}f(t)\right|dt = \int_0^\infty |f(t)|\,e^{-\sigma t}dt \leqq \int_0^\infty |f(t)|\,e^{-\sigma_0 t}dt$$

右辺の積分が収束（絶対収束）するから左辺の積分は $\mathtt{Re}\,s \geqq \mathtt{Re}\,s_0$ の右半平面で絶対収束します[22]。

1.2　収束座標と収束域

α を実数として，ラプラス変換 $F(s)$ が $\mathtt{Re}\,s>\alpha$ で収束し，$\mathtt{Re}\,s<\alpha$ で発散するとき，この α を**収束座標**，s 平面上の半平面 $\mathtt{Re}\,s>\alpha$ を**収束域**，$\mathtt{Re}\,s=\alpha$ の直線を**収束軸**と呼んでいます。$\mathtt{Re}\,s=\alpha$ の場合は $F(s)$ は収束することもあるし，発散することもあります。$F(s)$ がすべての s で収束するときは $\alpha=-\infty$ であり，$F(s)$ がすべての s にたいして発散するときは $\alpha=+\infty$ です。尚，$\mathtt{Re}\,s>\beta$ で $F(s)$ が絶対収束し，$\mathtt{Re}\,s<\beta$ で $F(s)$ が発散するとき，この β を**絶対収束座標**，$\mathtt{Re}\,s>\beta$ を**絶対収束域**と呼んでいます。収束座標 α と絶対収束座標 β のに関して $\alpha\leqq\beta$ が成立します。



具体的に次の関数のラプラス変換の収束座標を求めて見ましょう。

[22] $\displaystyle\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$ が収束するといっても $\displaystyle\int_0^\infty \left|e^{-st}f(t)\right|dt$ が収束するとは限りません。

Problem： (1) $f(t)=1$　(2) $f(t)=e^{at}$ (a：実数）　(3) $f(t)=e^{\alpha t}$　(4) $f(t)=\cos t$

Ans： (1)

$$F(s)=\int_0^\infty e^{-st}dt=\lim_{T\to\infty}\int_0^T e^{-st}dt=\lim_{T\to\infty}\left[\frac{-e^{-st}}{s}\right]_0^T=\lim_{T\to\infty}\frac{1-e^{-sT}}{s}$$

$s=\sigma+i\omega$ とすると

$$\begin{aligned}\lim_{T\to\infty}\left|e^{-sT}\right| &= \lim_{T\to\infty}\left|e^{-\sigma T}e^{-i\omega T}\right|=\lim_{T\to\infty}\left|e^{-\sigma T}(\cos\omega T-i\sin\omega T)\right|\\ &\leqq \lim_{T\to\infty}\left|e^{-\sigma T}\right|=\begin{cases}0 & \sigma>0\\ \infty & \sigma<0\end{cases}\end{aligned}$$

となるので，収束座標は 0 となります。

(2)$s=\sigma+i\omega$ として

$$F(s)=\int_0^\infty e^{-st}e^{at}dt=\int_0^\infty e^{-(s-a)t}dt=\lim_{T\to\infty}\left[-\frac{e^{-(s-a)t)}}{s-a}\right]_0^T$$

$$|F(s)|=\lim_{T\to\infty}\left|\left[-\frac{e^{-(\sigma-a)t}e^{i\omega t}}{s-a}\right]_0^T\right|\leqq\lim_{T\to\infty}\left|\left[-\frac{e^{-(\sigma-a)t}}{s-a}\right]_0^T\right|=\begin{cases}0 & \sigma>a\\ \infty & \sigma<a\end{cases}$$

となるので，収束座標は a となります。

(3)$s=\sigma+i\omega$, $\alpha=\alpha_0+i\omega_0$ として

$$\begin{aligned}|F(s)| &= \left|\int_0^\infty e^{-st}e^{\alpha t}dt\right|=\left|\int_0^\infty e^{-(\sigma-\alpha_0)t}\cdot e^{-i(\omega-\omega_0)t}dt\right|\\ &\leqq \left|\int_0^\infty e^{-(\sigma-\alpha_0)t}dt\right|=\lim_{T\to\infty}\left|\int_0^T e^{-(\sigma-\alpha_0)t}dt\right|=\lim_{T\to\infty}\left|\frac{1-e^{-(\sigma-\alpha_0)T}}{\sigma-\alpha_0}\right|=\begin{cases}\sigma>\alpha_0 & \text{収束}\\ \sigma<\alpha_0 & \text{発散}\end{cases}\end{aligned}$$

となるので，収束座標は $\mathtt{Re}\,\alpha=\alpha_0$ となります。

(4)

$$|F(s)|=\left|\int_0^\infty e^{-st}\cos t dt\right|=\left|\int_0^\infty e^{-st}\frac{1}{2}(e^{it}+e^{-it})dt\right|\leqq\frac{1}{2}\lim_{T\to\infty}\left|\int_0^T e^{-\sigma t}dt\right|$$

となり，$\sigma>0$ で収束，$\sigma<0$ で発散するので収束座標は $\mathtt{Re}\,s=\sigma=0$ です。

2　ラプラス変換とフーリエ変換について

ラプラス変換とフーリエ変換はよく似ていますが，ここではその違いなどについて少し触れておきます。関数 $f(t)$ のフーリエ変換とラプラス変換は

$$\begin{cases}\text{フーリエ変換}\quad G(\omega)=\displaystyle\int_{-\infty}^\infty f(t)e^{-i\omega t}dt\\ \text{ラプラス変換}\quad F(s)=\displaystyle\int_0^\infty f(t)e^{-st}f(t)dt\end{cases}\tag{B. 1}$$

と表わされました。ラプラス変換とフーリエ変換が存在するための条件をそれぞれピックアップすると

$$
\begin{aligned}
&\text{・ラプラス変換：}\quad f(t)\text{ は指数}\alpha\text{位の関数}\quad |f(t)| \leqq Me^{\alpha t} \quad (0 \leqq t < \infty) \quad \text{(十分条件)}\\
&\text{・フーリエ変換：}\quad f(t)\text{ は絶対可積分}\quad \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt < \infty \quad \text{（必要条件）}\\
&\qquad\qquad\qquad\quad f(t)\text{ は 2 乗可積分}\quad \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\, dt < \infty \quad \text{(十分条件)}
\end{aligned}
\tag{B. 2}
$$

といったところでしょうか。フーリエ変換の場合，絶対可積分の条件を満たさない $f(t)$ はフーリエ変換できないことになります。一方，ラプラス変換の場合，因果的な関数に対してのみしか適用できませんが，例えば変数 t を時間とするなら，“ 過去のことは不問にして[23]将来のことを解きたい ”場合，$f(t)$ が絶対可積分でなくてもラプラス変換の強い収束性を背景にラプラス変換することができます（§2.1 参照)。ラプラス変換の $s = \sigma + i\omega$ で $\sigma = 0$ とした場合，フーリエ変換に一致しますね。つまり，ラプラス変換はフーリエ変換を拡張したものと考えることができます。

また，詳細は省きますが，微分方程式を解く場合，フーリエ変換は初期値問題の取り扱いには適合しない，言い換えると初期条件を考慮せずに用いることができ，微分方程式の特殊解を得ることができます[24]が，ラプラス変換は初期値問題の取り扱いに便利，つまりある初期条件のもとで微分方程式の一般解を得ることができるという違いがあります。

$$
\begin{cases}
\text{フーリエ変換：}\quad \text{初期条件不要} \qquad \text{特殊解}\\
\text{ラプラス変換：}\quad \text{初期条件必須} \qquad \text{一般解}
\end{cases}
$$

[23] $f(t) = 0 \quad (t \leqq 0)$

[24] 系の初期状態によらない定常解。