対話・線積分

KENZOU

2004 年 10 月 2 日/10 月 6 日改訂

これは某月・某日、K氏とコニーの線積分を巡る会話の記録を採録したのものである。。。コニーが線積分のイメージを掴めず、K氏にそのあたりを相談しているところから始まる。

1 実関数の線積分

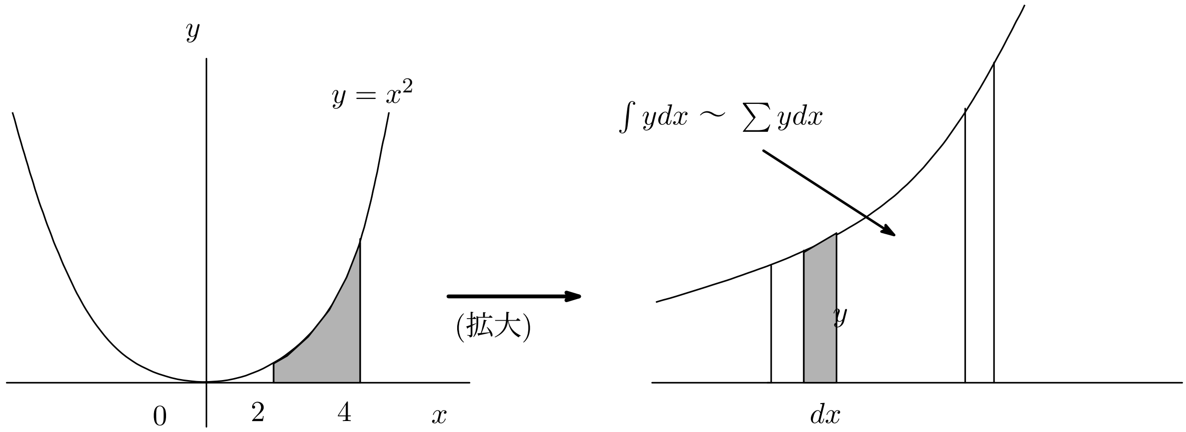
1.1 スカラーの線積分

- コニー：こんにちわ〜、Kさん、そんなところでなにをボンヤリとしているの？
- K氏 ：オ〜、コニー、久しぶりだね。いや、ついつい宇治川の流れを見とれていたんだよ。（K氏重い腰を上げながら。。。）ところで今日はなにかい、平等院でも見学にきたのかい？それじゃ案内するよ〜。そういやぁ、君の友達のアリスは最近みかけないねぇ。
- コニー：ありがとう、だけど案内はまた今度にお願いするわ。アリスはいろいろな疑問を一杯もっていて、そのうちにKさんに相談を持ちかけてくるとおもうけど、ここ最近はいろいろと忙しそうなの。ところで、今日は、ちょっと引っかかるモノがあって、それをスッキリしたくお尋ねしたの。
- K氏：なんだい、その引っかかるモノっていうのは？
- コニー：うん、最近、ベクトル解析で線積分というものを習ったのだけれどイマイチピンとこないのよ。(近くにあった棒切れを拾い、地面に絵を絵がきながら）普通、積分というのは面積を求める計算方法でしょう。たとえば 2 次元平面で x 軸と $y = x^2$ の間で $x = 2〜4$ の間で囲まれた面積を求めよというのは、面積を S とすると

  $$S = \int_2^4 x^2 dx = 1/3[x^3]_2^4 = \frac{56}{3}$$

  でスッキリ分かるのね。ザックリだけど絵を書くとこうなって、求める面積は x 軸を非常に細かく刻んでできる微細な面積片を足し合わせたものなのね。つまり、縦かける横という面積の公式に他ならないわけね。

- K氏：そうだね。その通りだよ。まぁ、数学的にはいろいろうるさいことがあるかも知れないけど、、、
- コニー：数学的に厳密な話は今はどうでもいいの。なにか直感に訴えるものが欲しいわけ。そこで線積分の話になるのだけど、、、これはKさんも学生時代に、なにかミミズが這っているような奇妙な印象を持ったとどこかで言われていたと思うけど、いまいちピンとこないのよね。



- K氏：（ひょっとしたら自分の学生時代の悩みと同じか、いやいや数学的にうるさいことを持ち出すのじゃないだろうなと警戒しながら、、、）なっ、なんだい（←少しどもり気味に）そのピンとこないやつというのは。

- コニー：うん、（ノートを開きながら）例えば次の問題を取り上げるわね。

例題：スカラーの線積分

原点 O から点 $A(12,16,20)$ に向かう線分を C とするとき、

$$\int_C (x+y+z)ds$$

を求めよ。

という問題で、ds は線素ね。つまり積分経路に当たる線路の微小長さというわけで先程の $y=x^2$ の求積問題の dx に相当する。だけど、、、そうなると、高さに相当するものはなに？となるわけよ。今の場合、$\Phi\left(x,y,z\right)=x+y+z$ が高さなのかしら、しかし、積分経路は 3 次元空間の中の曲線だから、、、一体高さは。。。となってもう頭が混乱してくるのよ。

- K氏：（なるほど自分が学生時代に感じた同じ疑問だなと思いながら）うん、よく分かるよ、その悩み、僕も似たようなことを味わったから。

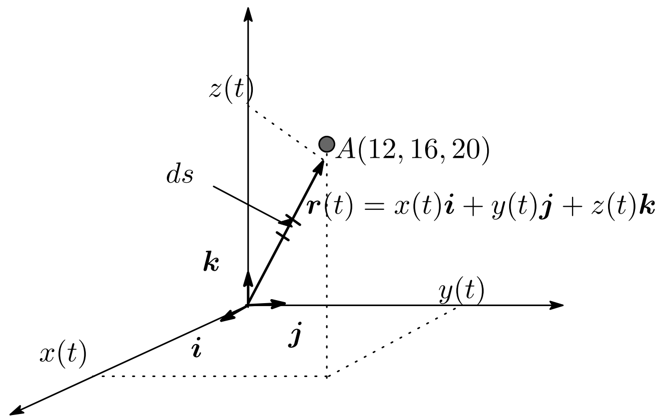


図 1: 積分経路

- コニー：だったら分かりやすく説明してくれる。
- K氏：うん。先程の例題を取り上げるよ。（棒切れで地面になにやら書き込みながら）まず積分経路を C として、こいつは空間内の直線だよね。C を 3 次元の位置ベクトルであらわすと、つまり、$x-, y-, z-$ 軸方向の単位ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ とすると

  $$C \quad \boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{z}$$

  となるが、これはいいよね。次に線素 ds だが、これはピタゴラスの定理より (※)$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ だね。変数 x は 1 つのパラメータ t の関数だから、$dx = (dx/dt)dt$ とかけるよね。これから $dx^2 = (dx/dt)^2dt^2$ となるだろ。y, z について同じようなことをやって、ピタゴラスの定理を使うと、求める線素は結局

  $$ds = \sqrt{(dx/dt)^2 + (dy/dt)^2 + (dz/dt)^2}\, dt$$

  となるよね。
  ※正誤 (09.11.23/Thank's 学部 3 年生さん)(誤)$dx^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \to$ (正)$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$
- コニー：そこまでは分かるわ。テキストに書いてあるとおりだものね。
- K氏：ご・ふぉ〜ん（←大きな咳きをして）、そうだよね。ところで今日は暑いね（←額の汗を拭きながら）。。。さて、そうするとこの積分 $\int_C (x + y + z)ds$ をどう料理するかということになるのだけど、被積分関数 $x + y + z$ はパラメータ t で表せるよね。というのは r は点 $A(12, 16, 20)$ を通るから

  $$\begin{aligned} \boldsymbol{r}(t) &= x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{z} & (1) \\ \boldsymbol{OA} &= 12t\boldsymbol{i} + 16t\boldsymbol{j} + 20t\boldsymbol{k} & (2) \end{aligned}$$

  となって、(1)(2) を比較すると結局 $\boldsymbol{r}(t)$ は $x(t) = 12t,\ y(t) = 16t,\ z(t) = 20t$ と表すことができるだろ。積分経路は原点から点 A までの範囲だからパラメータ t の範囲は $(0 \le t \le 1)$ となるよね。つまり、t が 0 の時は原点で、t が 1 に近づくにつれて原点から点 A に向かって積分経路が延びていき、$t = 1$ 点 A に到達するのだよね。
- コニー：よく分かるわ。続けて。
- K氏：はい、すると次に線素 ds の料理にかからねばならないが、これは先程計算した式 $ds = \sqrt{(dx/dt)^2 + (dy/dt)^2 + (dz/dt)^2}\, dt$ を使えば $ds = 20\sqrt{2}dt$ となるだろ。いよいよこの線積分の計算も最後を迎えるよ。今までの話を総合すると

  $$\int_C (x + y + z)\, ds \Longrightarrow \int_0^1 (12t + 16t + 20t)20\sqrt{2}dt = 20\sqrt{2}\int_0^1 48t\, dt = 480\sqrt{2}$$

  となるね。この式をよく見てごらん、結局パラメータに関する積分となっているだろう。つまり、線積分の積分路はパラメータ表示で与えられるよね。被積分関数もパラメータ表示に書き換えることができるね。パラメータは 1 個だから、結局、線積分はパラメータについての積分に書き換えることができる。イメージとしてはパラメータ t が増加するにつれて積分路が進んでいくが、同時にパラメータで表された被積分関数も変化する。ここまでくれば、線積分は求積問題と一緒になるね。つまり x 軸の変わりにパラメータ t をとり、高さの変わりにパラメータで表された被積分関数の値ということになるわけだよ。

- コニー：そうなんだ。なんとなく分かったような気になってきたわ。つまり、パラメータ空間における積分に焼きなおせるわけね。ちょっと演習問題だしてくれない。理解度をチェックしたいの。
- K氏：OK！それでは次の問題をやってごらん。

演習問題

原点 O から点 $A(12, 16, 0)$ を通り、点 $B(12, 16, 20)$ に向かう折れ線を C とするとき、

$$\int_C (x+y+z)ds$$

を求めよ。

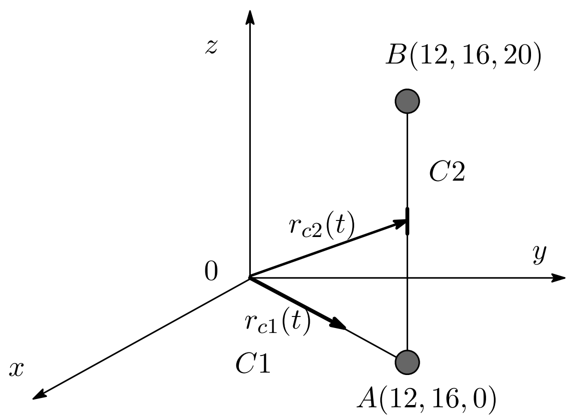


図 2: 積分経路

- コニー：エ〜っと、線積分の積分経路は原点から出発して点 $A(12, 16, 0)$ に向かい、次に点 A から最終点の点 $B(12, 16, 20)$ に向かうのね。線積分の要点は線素も被積分関数もすべてパラメータで表現し、パラメータについての積分に焼き直すことだったわね。そこで積分路を $C1$ と $C2$ に分けて $C1$、$C2$ をパラメータ表示で表し、それからそれぞれの積分路の線素もパラメータ表示でかくと（先程の例題を参考にして）

＜積分路と線素＞

$$\begin{aligned} C1 \quad \boldsymbol{r}_{c1}(t) &= 12t\boldsymbol{i} + 16t\boldsymbol{j},\ (0 \le t \le 1) \\ ds &= \sqrt{12^2 + 16^2}dt = 20dt \\ C2 \quad \boldsymbol{r}_{c2}(t) &= 12\boldsymbol{i} + 16\boldsymbol{j} + 20t\boldsymbol{k},\ (0 \le t \le 1) \\ ds &= \sqrt{20^2}dt = 20dt \end{aligned}$$

となるわね。次に被積分関数 $x+y+z$ を $C1$、$C2$ の積分路に応じてパラメータ表示でかくと

＜被積分関数＞

$$\begin{aligned} C1 \quad x+y+z &= 12t + 16t,\ (0 \le t \le 1) \\ C2 \quad x+y+z &= 12 + 16 + 20t,\ (0 \le t \le 1) \end{aligned}$$

となり、求める線積分は

$$\int_C (x+y+z)ds = \int_0^1 (12t+16t)20tdt + \int_0^1 (12+6+20t)20dt = 1040$$

となるわけね。

- K氏:ご明解！
- コニー：なるほどね、これで納得したわ。

1.2　ベクトルの線積分

- K氏：ここまできたんだからついでにベクトルの線積分もやっておこうか。。。ところで、先程、向こうの川中で大きなハエが釣りあがっていたよ。日の光でキラッと輝く魚体は綺麗だね。そういえば最近、僕は宇治川で釣りをしなくなったなぁ。昔は結構はまっていたが。。。
- コニー：エ〜っと、魚 (うお) 釣りの話はまたの機会に聞くとして、ベクトルの線積分の話を進めましょう。
- K氏：はいはい、了解。ところでベクトルの線積分については、コニーはすでによく知っているはずだよ。
- コニー：というと？
- K氏：力学でエネルギーというか仕事を計算したりする場合、仕事を W とすると $W=\int_a^b \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$ なんてやるだろう。あれはベクトルの線積分なんだよ。
- コニー：あら、そうね！今まで特に意識しなかったわ。なるほど、それでは早速はじめて。
- K氏：実は先程のスカラーの線積分と基本は何もかわらないんだ。そこで次の例題をやることにしよう。

例題：スカラーの線積分

$\boldsymbol{F}=x\boldsymbol{i}+2(x+z)\boldsymbol{j}+y\boldsymbol{k}$ で積分路 C が原点 O から点 $A(1,2,2)$ に向かう場合、次の線積分を求めよ。

$$\int_c \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$$

例によって積分路をパラメータを使って表すと $\boldsymbol{r}(t)=t\boldsymbol{i}+2t\boldsymbol{j}+2t\boldsymbol{k},\ (0\leq t\leq 1)$ となるね。つまり $\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}+z(t)\boldsymbol{k}$ より $x=t,\ y=2t,\ z=2t$ となるわけだ。するとこの積分路では被積分関数 $\boldsymbol{F}$ は $\boldsymbol{F}=x\boldsymbol{i}+2(x+z)\boldsymbol{j}+y\boldsymbol{k}=t\boldsymbol{i}+6t\boldsymbol{j}+2t\boldsymbol{k}$ となるだろ。また、ベクトル線素 $d\boldsymbol{r}$ は $d\boldsymbol{r}=(\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k})dt$ となるね。ここまでいいかな？

- コニー：いいわよ。あとは積分するだけね。つまりこういうことになるのでしょう。ベクトルの内積を使って

$$\int_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}=\int_0^1 (t\boldsymbol{i}+6t\boldsymbol{j}+2t\boldsymbol{k})\cdot(\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k})dt=\int_0^1 17tdt$$

- K氏：なかなか冴えているじゃない。
- コニー：ポイントを掴むと簡単ね！
- K氏：そうだよね。

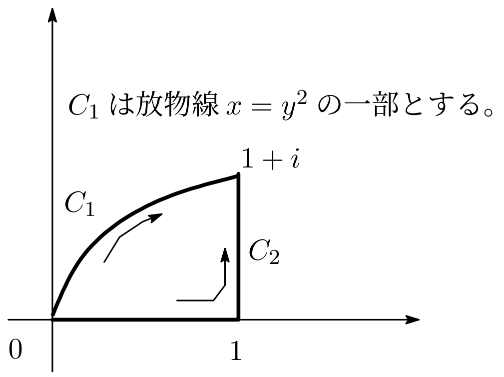
2 複素関数の線積分

- コニー：最初のモヤモヤしていた気分もスッキリしてきたわ。ところで今までの話は実関数に関するものね。複素積分ってあるでしょう。あれはチラッと見たところ線積分のオンパレードって感じね。釣りの話は別途ゆっくり聞かせてもらうとして、お疲れでなかったら複素積分の線積分の話も聞かせてくれない。
- K氏：ようござんす。渓流、海釣り、川釣りで鍛えた体（？）、この程度で疲れはしませんよ。しかしコニーもよく勉強するね。
- コニー：よろしく〜。
- K氏：線積分のコツは今までの話で理解しただろう。複素積分でもこのコツはそのまま通用するんだ。例によって例題をやってみよう。

複素関数の線積分

0 から $1+i$ に至る図のような曲線 C_1, C_2 に沿って次の関数を積分せよ。

$$f(z) \;=\; \bar{z}$$



まず、積分路 C_1 をパラメータ表示することを考える。C_1 上の点 z は $z=x+iy$ だよね。$\bar{z}=x-iy$ はいいよね。$x=y^2$ だから、$y(t)=t$ とおくと $x(t)=y(t)^2=t^2$ となるね。すると $z(t)=x(t)+iy(t)=t^2+it$ と書ける。C_1 の終着点は点 $(1+i)$ だからパラメータ t のとり得る範囲は $(0\le t\le 1)$ となるね。$dz=(2t+i)dt$ となるから、積分路 C_1 についての線積分は次のようになるね。

$$\int_{C1}\bar{z}dz=\int_0^1(t^2-it)(2t+i)dt=1-i/3$$

次に経路 C_2 についてだが、こいつは点 $(1,0)$ の前後で分けて考える。前半の部分は $y=0$ で実軸 x 軸上を動くから $z=x+iy=x=t,\ (0\le t\le 1)$ とパラメータで書くことができる。$dz=dt$。次に後半の部分は $z=x+iy=1+iy=1+it,\ (0\le t\le 1)$ とパラメータで書き換えることができる。また、$dz=idt$ だね。ここまでくるとあとは積分を実行すればいいだけだ。つまり

$$\int_{C2}\bar{z}dz=\int_0^1 tdt+\int_0^1(1-it)idt=1+i$$

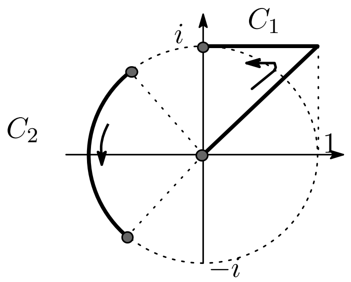
- コニー：よくわかったわ。それじゃ、理解をチェックするために問題をだしてくれる。
- K氏：了解、そうくると思ったよ。それじゃ次の問題をやってみるかい。

演習問題

図のような積分路 $C_, C_2$ に対し、次の積分を求めよ。

$$(1) \qquad \int_{C_1} (z + i\bar{z})dz$$

$$(2) \qquad \int_{C2} \frac{z+1}{z} dz$$



- コニー：そうね、それじゃ2番の問題をやってみるわ[1]。経路 C_2 は複素平面上の半径 1 の円周だから偏角 θ をパラメータとすればいいわけね。すると $z = e^{i\theta}, (\frac{3}{4}\pi \leq \theta \leq \frac{5}{4}\pi)$ だから、$dz = ie^{i\theta}$ となるわね。あとはこれを積分するだけだわね。

$$\int_{C_2} \frac{z+1}{z} dz = \int_{3\pi/4}^{5\pi/4} (1 + \frac{1}{e^{i\theta}}) ie^{i\theta} d\theta = \left(-\sqrt{2} + \frac{\pi}{2} \right) i$$

意外と簡単に終っちゃった。Kさん、どうもありがとう。線積分の件はお陰様でスッキリと理解できたわ。あれ、そろそろ夕日で空が赤く染まりだしたわね、釣り人も随分少なくなってきたわ。そろそろ帰らなくっちゃ。まだ、ほかにいろいろ聞きたいことがあるのだけど、また今度にするわね。

- K氏：、、、どんなことなんだい？
- コニー：そうね、例えば『場の量子論』とか。
- K氏：(ちょっとドキマギしながら）そっ、その、、、場の量子論のどういうところなんだい？あまり専門的なところはだめだよ。
- コニー：わかっているわよ、別に専門的なところまで踏み込む積もりはないの。ほんのさわりだけでも知りたいなぁということなの。
- K氏：(ホッとして）あいかわらず旺盛な知識欲だね。いいよ、僕の理解している範囲だけど、また機会を見つけてやりましょう。ところで、今日話した線積分はちょっと技巧的な話がメインになってしまったけど、結構奥が深いよ。特に複素関数の線積分は今日の話をベースにじっくり自分でテキストを読んで欲しいな。

[1] ということで一番の問題は読者の挑戦に任す。

- コニー：はい、分かりました、そうするわ。さて、そろそろ帰らなくっちゃ。今日は短い時間だったけど本当に楽しかったわ。それじゃKさん、ありがとう、また今度よろしくお願いしま〜す、、、、

  と声の余韻を残しながら自転車の音軽やかにコニーは帰っていきました。

$$Goo\ bye.\ See\ You\ Later!!$$

おまけ

- B から A へ向かう逆向きの曲線を $-C$ で表すと

$$\int_{-C} f\,ds = -\int_C f\,ds$$

- スカラー関数 $\phi(x,y,z)$ を一価関数とすれば、点 P から点 Q にいたる曲線 C に沿っての $\nabla\phi(x,y,z)$ の線積分は

$$\int_{PQ} \nabla\phi(x,y,z)\cdot d\boldsymbol{r} = \phi(Q) - \phi(P)$$

  $\because \quad d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy + \frac{\partial\phi}{\partial z}dz = \nabla\cdot\boldsymbol{r}$ であるから

$$\int_{PQ} \nabla\phi\cdot d\boldsymbol{r} = \int_{PQ} d\phi = [\phi]_P^Q = \phi(Q) - \phi(P)$$

- ベクトル場 $\boldsymbol{F}$ がスカラーポテンシャル $-\phi$ をもてば ($\boldsymbol{F} = \nabla\phi$)、領域内の任意の閉曲線 C に対し

$$\int_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = 0$$

  が成り立つ。

- C が 2 つの曲線 C_1、C_2 があり、C_1 の終点と C_2 の始点が一致するとき、C_1 と C_2 を連結した曲線を $C_1 + C_2$ で表すと、次に式が成り立つ。

$$\int_{C_1+C_2} f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz$$