ロジスティック曲線

KENZOU

2005 年 2 月 13 日

最近、日本の出生比率が極端に下がってきたと新聞を賑わしています。日本人類存亡の危機に瀕しているとは少し大袈裟ですが、全世界で比類ない独特の日本文化を継承する子孫が少なくなってくるというのは寂しいことです。さて、以下は生物の自然増加現象等を説明する際によく引き合いにだされるロジスティック曲線についてのレポートです。これは非線形微分方程式の解となります。

1 ロジスティック曲線

1.1 マルサスのモデルとロジステック方程式

生物の増える速さは現在の生物の個体数に比例する、これをマルサスのモデルという。

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = kx, \qquad k = \frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \qquad (k > 0 \text{ は常数で個体数増加率}) \tag{1}$$

マルサスのモデルは生物個体が指数関数的に増大することを表すが、これは現実とは合わない。実際には、増加率そのものが個体数の大きさによって変化する。個体数が増加すれば個体数増加を抑制する力（えさが不足するとか）が加わると考えた方が現実的である。即ち、ある程度までは急激に増えて、増えすぎると抑制しようとする力が働いてきて、最後にある値で安定してくる。このことを考慮してオランダの数理生物学者 Verhulst（ヴェアファルスト）が 1987 年に人口増加の方程式を提案した。これが有名なロジステック方程式である。人口の上限を Q とし、その時点での人口を P とすると

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = kP\left(\frac{Q-P}{Q}\right) \tag{2}$$

この微分方程式は P について１次ではないので、非線形微分方程式である。$P = Q$ となると右辺はゼロ、つまり人口増加率はゼロとなるから人口の増加が止まる。

さて、これからこのロジスティク方程式を解いていくが、(2) の方程式を次のように簡略化して書くことにする[1]。

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = R(x)x, \qquad R(x) = a - bx \quad (a > 0,\, b > 0) \tag{3}$$

a は増殖率またはマルサス係数であり、環境的影響を受けない成長率である。 b は混雑定数 (crowdness constant) と呼ばれる。

[1]式 (2) との関係は $Q = a/b,\, k = a$ で結ばれる。Q は環境容量とも呼ばれ、すぐ後でその意味が明らかになる。

1.2　ロジスティック方程式を解く

ロジスティック方程式を解く。

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = (a - bx)x \qquad (a > 0,\, b > 0) \tag{4}$$

ロジスティック方程式 (4) を Mathematica で解いてみる。初期条件は $t = 0$ で $x[0] = x0$ とする。

$\mathsf{In[1] := sol1 = x[t]/.DSolve[\{x'[t] == (a - bx[t])\,x[t],\, x[0] == x0\}, x[t], t\}][[1]]}$

$\mathsf{Out[1]} = \dfrac{\mathsf{ae^{at}x0}}{\mathsf{a - bx0 + be^{at}x0}}$

解 sol を整理してみよう。分母分子を $\mathsf{be^{at}x0}$ で割ると分母は

$\mathsf{In[2] := a - bx0 + be^{at}x0)/(be^{at}x0)//Expand}$
$\mathsf{Out[2]} = 1 - \mathsf{e^{-at}} + \frac{\mathsf{ae^{-at}}}{\mathsf{bx0}}$

となる。従って解は次の形に整理される[2] 。

$$x[t] = \left(\frac{a}{b}\right)\frac{1}{1 + c\,e^{-at}}, \qquad \text{但し}\, c = \frac{a}{bx0} - 1 \tag{5}$$

ここで解 sol1 の $t \to \infty$ の極限をとってみよう。(5) より目視で

$$\lim_{t\to\infty} x[t] = a/b$$

となるのは明らかだが、ここでは $\mathsf{Out[1]} = \frac{\mathsf{ae^{at}x0}}{\mathsf{a-bx0+be^{at}x0}}$ の解から求めてみる。 Mathematica でこのような式の $Limit$ を計算する場合、定数 $a, b, x0$ の符号を明確にしてやらないと計算してくれない。そこで組み込み関数 $Assuming$ を使って符合を明確にして、$Limit$ 計算をする。

$\mathsf{In[3] := Assuming[a > 0\,\&\&\, b > 0\,\&\&\, x0 > 0,\; Limit[sol,\; t \to \infty]]}$
$\mathsf{Out[3]} = \dfrac{\mathsf{a}}{\mathsf{b}}$

以上のことから、x(個体数) はどんなに増えても定数 a/b を超えることがない。a/b は環境容量とも呼ばれる。

1.3　ロジスティク曲線を描く

$f(t) = \dfrac{1}{1 + c\,e^{-at}}$ のそれぞれ定数 a, c を変化させた場合のグラフのアウトラインを調べてみよう。

(1) c を一定にして a を変えていった場合：$f(t) = \dfrac{1}{1 + 10\,e^{-at}}$

$\longrightarrow$ 曲線の立ち上がりが a の増加につれて急峻になってくる。

$\mathsf{Plot[Table[\frac{1}{1+10e^{-at}}, \{a, 20, 100, 20\}]//Evaluate, \{t, -.15, .4\}]}$ ··· 図 (1)

[2] この形は Fermi 分布関数（$f(\epsilon) = \frac{1}{1+e^{(\epsilon-\mu)/k_BT}}$）によく似ていることは興味深い。

(2) a を一定にして c を変えていった場合：$f(t) = \dfrac{1}{1 + c\,e^{-20t}}$

$\longrightarrow$ 曲線の y 切片が c の増加につれて下方に向かう。

$\mathsf{Plot[Table[\frac{1}{1+ce^{-20t}}, \{c, 1, 10, 1\}]//Evaluate, \{t, -.15, .4\}]}$ ··· 図 (2)

(3) c がマイナス、即ち $x0 > a/b$ の場合：$f(t) = \dfrac{1}{1 - 10\,e^{-20t}}$

$\longrightarrow$ グラフの様相は一変する。··· 図 (3)

$\mathsf{Plot[\frac{1}{1-10e^{-20t}}, \{t, -/15, .4\}]}$

このケースは初期値 $(x0)$ が環境容量 (a/b) より大きいということで、物理的には意味がない。

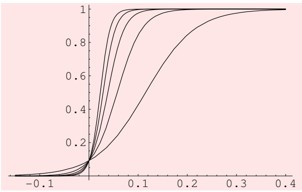

図 1: c 一定で a を変えた場合

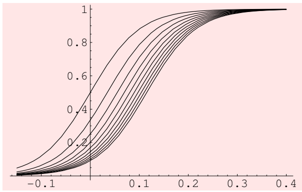

図 2: a 一定で c を変えた場合

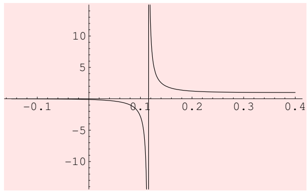

図 3: $c < 0$ の場合

さて、ロジスティック方程式の解 sol1 のグラフを描くこととする。ここで $a = 20,\ x0 = 10$ とし、b を 0.1 から 0.15 まで 0.01 刻みに変えた。

$\mathsf{In[4] := sol2 = sol1/.a \to 20/.x0 \to 10;}$

$\mathsf{Plot[Table[sol2, \{b, 0.1, 0.15, 0.01\}]//Evaluate, \{t, -.2, .5\}, GridLines \to Automatic, Frame \to True]}$

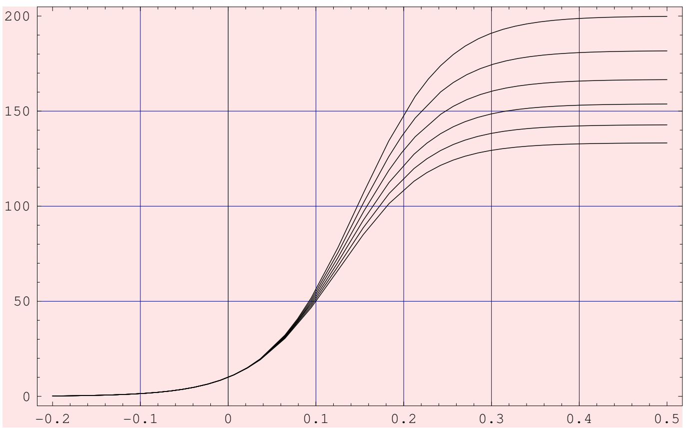

図 4: ロジスティク曲線

1.4　生物が一定の割合で捕獲される場合のロジスティク曲線

捕獲率を $\alpha (0 < \alpha < 1)$ とすると、ロジスティック方程式は

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = (a - bx)x - \alpha x \qquad (a > 0,\ b > 0,\ 0 < \alpha < 1) \tag{6}$$

となる。この微分方程式の解を sol3 としておく。

$\mathsf{In[5] := sol3 = x[t]/.DSolve[x'[t] == (a - bx[t])x[t] - cx[t], x[0[== x0, x[t], t][[1]]}$

$a = 20,\ b = 0.1,\ c = 0.9,\ x0 = 10$ として sol2, sol4 の曲線を描いてみよう。

$\mathsf{In[6] := sol2 = sol1/.a \to 20/.x0 \to 10/.b \to 0.1;}$
$\mathsf{sol4 = sol3/.a \to 20/.x0 \to 10/.b \to 0.1;}$
$\mathsf{Plot[sol2, sol4, t, -0.2, 0.5, GrifLines \to Automatic, Frame \to True]}$

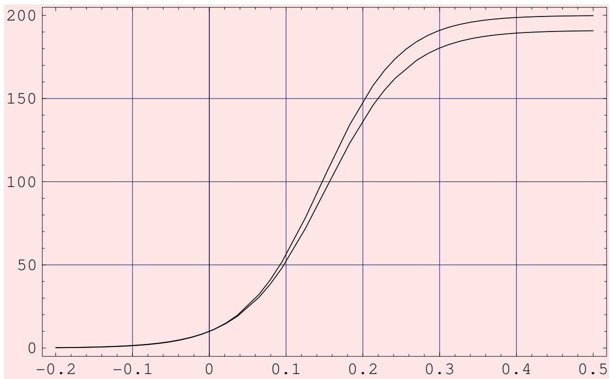

図 5: 一定の捕獲がある場合との比較

sol3 の $t \to \infty$ の極限値を求めてみると

$\mathsf{In[7] := Assuming[(a - c) > 0\&\&} maths fb > 0\mathsf{\&\&x0 > 0\&\&c > 0,\ Limit[sol3,\ t \to \infty]]}$
$\mathsf{Out[7]} = \dfrac{\mathsf{a - c}}{\mathsf{b}}$

となって、一定の捕獲率がない場合の環境容量 a/b より小さい値となることが分かる。

（おしまい）