

物理 Tips

～ポテンシャル～

KENZOU

2008年6月20日

♣ K氏が宇治川の畔のベンチでウトウトしていたとき、アリスからいきなり声をかけられた。

- アリス：こんにちは、Kさん。気持ちよくお昼ねですか、まだお昼までにはまだまだ時間があるけど。
- K氏：Oh! アリス、コンニチワ、元気そうじゃないか。いや、実は川の流れをぼんやり見ているうちについウトウトしちゃった。「行く川のながれは絶えずして、しかも本の水にあらず。よどみに浮ぶうたかたは、かつ消えかつ結びて久しくとゞまることなし。世の中にある人とすみかと、またかくの如し」か。。
- アリス：いいご気分のところ起こしちゃったようで申し訳なかったわ。いま、なにか寝言のようにウニャウニャ言われたのは方丈記ね。
- K氏：うん。ところで今日は朝の散歩かい？
- アリス：そう、朝の散歩をかねてここまで歩いてきたわけだけど、最近ポテンシャルのことを勉強しなおそうかと思って、Kさんをお尋ねすることにしたの。
- K氏：ポテンシャルか、こいつはどこにでも顔をだすからね。つまり、知識を整理しておこうというわけかな？
- アリス：そういうところね。もっとも、ポテンシャルといってもいわゆるニュートンポテンシャルでいいんだけど、きょうはそのあたりのお話をお伺いできればと思っているの。
- K：そうなんだ、だんだん目が覚めてきたよ。そういえば昔買った培風館の宇野利雄・洪妊植「ポテンシャル」というテキストが手元にあったな。それじゃそれを参考テキストとして、知っている話も多いと思うけど、話を進めようか。
- アリス：よろしくをお願いします。

1 力の場

2点 P_1, P_2 にそれぞれ質量 m_1, m_2 があるとき、これらの間に働く引力（万有引力）は、それらの質量の積に比例し、距離の2乗に反比例する。この力の方向は、2点を結ぶ直線に沿って作用する。これを式で表すと

$$\mathbf{F} = k \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (1.1)$$

となる。 k は比例定数で CGS 単位系では

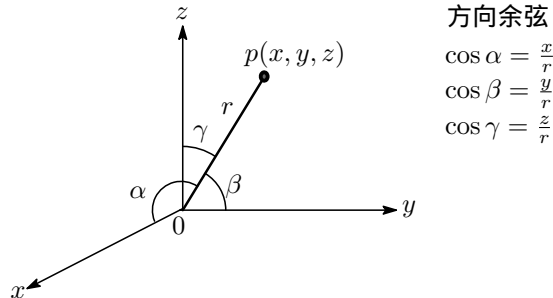
$$k = 6.67 \times 10^{-8} [\text{g} \cdot \text{cm} \cdot \text{s}^{-2}]$$

という値になる。いま、点 $Q(x_1, y_1, z_1)$ に質量 m の質点があるとして、点 Q から距離 r にある点 $P(x, y, z)$ における力を求めてみよう。直線 \overline{QP} の方向余弦を $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ とすると

$$\cos \alpha = \frac{x - x_1}{r}, \quad \cos \beta = \frac{y - y_1}{r}, \quad \cos \gamma = \frac{z - z_1}{r} \quad (1.2)$$

となる。点 P における力の成分は、したがって

$$\begin{aligned} F_x &= -\frac{m}{r^2} \cos \alpha = -\frac{m(x-x_1)}{r^3} \\ F_y &= -\frac{m}{r^2} \cos \beta = -\frac{m(y-y_1)}{r^3} \\ F_z &= -\frac{m}{r^2} \cos \gamma = -\frac{m(z-z_1)}{r^3} \end{aligned} \quad (1.3)$$



次に、 n 個の質点がある場合、質量 m_1, m_2, \dots, m_n 、位置を Q_1, Q_2, \dots, Q_n とし、質点全体の点 P における力の場¹を求めてみよう。 $Q_i(x_i, y_i, z_i)$ と $P(x, y, z)$ の距離を r_i とすると、点 P における力の場 (F_x, F_y, F_z) は各質点からの寄与の足し算になるから

$$\begin{aligned} F_x &= -\sum_{i=1}^n \frac{m_i(x-x_i)}{r_i^3} \\ F_y &= -\sum_{i=1}^n \frac{m_i(y-y_i)}{r_i^3} \\ F_z &= -\sum_{i=1}^n \frac{m_i(z-z_i)}{r_i^3} \end{aligned} \quad (1.4)$$

で与えられる。

1.1 3次元連続分布

質点がある有限な領域 V に連続分布している場合を考えよう。連続分布した質点からの点 P における力の場を求める。 V の中の1点 $Q(\xi, \eta, \zeta)$ における体積素片を $dV = d\xi d\eta d\zeta$ 、その質量を dm とし、この素片による点 P での力の場を f_x, f_y, f_z とすると

$$\begin{aligned} f_x &= -\frac{(x-x_i)dm}{r^3}, \quad f_y = -\frac{(y-y_i)dm}{r^3}, \quad f_z = -\frac{(z-z_i)dm}{r^3} \\ r^2 &= (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2 \end{aligned} \quad (1.5)$$

領域 V に分布している質点からの点 P における力の場は、これらの力をすべて足し合わせたものであるから

$$\begin{aligned} F_x &= -\iiint \frac{(x-\xi)}{r^3} dm \\ F_y &= -\iiint \frac{(y-\eta)}{r^3} dm \\ F_z &= -\iiint \frac{(z-\zeta)}{r^3} dm \end{aligned} \quad (1.6)$$

¹点 P には質量 1 の質点があると仮定する

となる。質量密度 ρ が位置の関数 $\rho = \rho(\xi, \eta, \zeta)$ として与えられていれば、 $dm = \rho dV$ となるので、(1.6) は次の体積積分となる。

$$\begin{aligned} F_x &= - \iiint \frac{(x - \xi)}{r^3} \rho dV \\ F_y &= - \iiint \frac{(y - \eta)}{r^3} \rho dV \\ F_z &= - \iiint \frac{(z - \zeta)}{r^3} \rho dV \end{aligned} \quad (1.7)$$

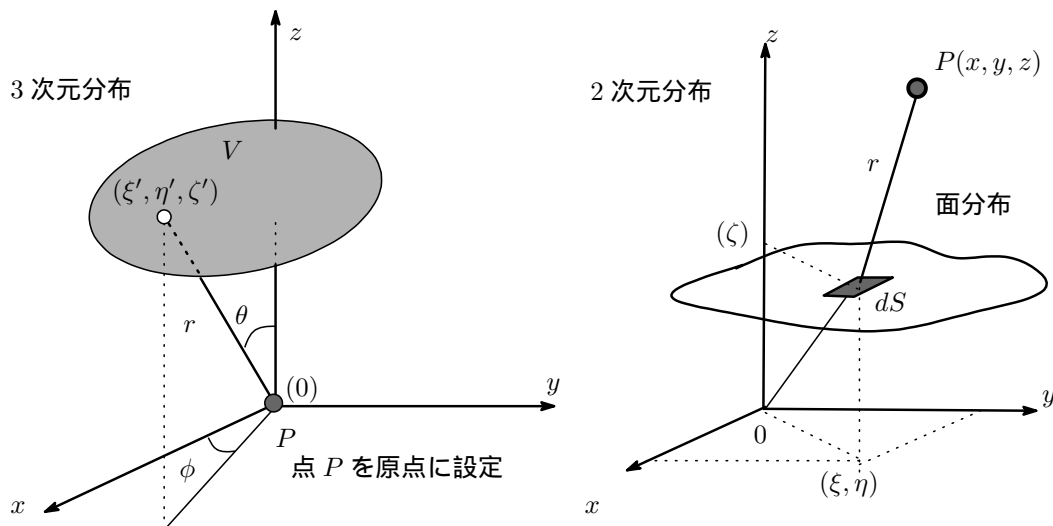
点 P は領域 V の外部にあっても内部にあってもかまわないが、上の体積積分の形では、もし点 P が領域 V の内部にあり、点 (ξ, η, ζ) が P のところにくると $r \rightarrow 0$ となり、積分が発散してしまうことになる。これを回避するべく、点 P を原点とする極座標形式で (1.7) を書き直せば

$$\begin{aligned} \xi - x &= r \sin \theta \cos \phi, & \eta - y &= r \sin \theta \sin \phi, & \zeta - z &= r \cos \theta \\ dV &= dx dy dz = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \end{aligned} \quad (1.8)$$

であるから、(1.7) の分母は消去され、積分は発散しなくなる。

$$\begin{aligned} F_x &= - \iiint \rho \sin^2 \theta \cos \phi dr d\theta d\phi \\ F_y &= - \iiint \rho \sin^2 \theta \sin \phi dr d\theta d\phi \\ F_z &= - \iiint \rho \sin \theta \cos \theta dr d\theta d\phi \end{aligned} \quad (1.9)$$

これで点 P が領域 V 内のどの位置にあっても、その場の力の成分を求めることができる。



1.2 2次元連続分布

質量 m が面 S に沿って分布しており、その面密度を σ とする。面内のある点 (ξ, η, ζ) の微小面積を dS 、その質量を dm とすると

$$dm = \sigma dS \quad (1.10)$$

であるので、点 P における力の場は

$$\begin{aligned} F_x &= - \iiint \frac{(x - \xi)\sigma}{r^3} dS \\ F_y &= - \iiint \frac{(y - \eta)\sigma}{r^3} dS \\ F_z &= - \iiint \frac{(z - \zeta)\sigma}{r^3} dS \end{aligned} \quad (1.11)$$

で与えられる。

1.3 1次元連続分布

質量 m が直線 L 上に分布しており、線密度を γ 、 L 上のある点 (ξ, η, ζ) の微小長さを dL 、その質量を dm とすると

$$dm = \gamma dL \quad (1.12)$$

となるので、点 P における力の場は

$$\begin{aligned} F_x &= - \int \frac{(x - \xi)\gamma}{r^3} dL \\ F_y &= - \int \frac{(y - \eta)\gamma}{r^3} dL \\ F_z &= - \int \frac{(z - \zeta)\gamma}{r^3} dL \end{aligned} \quad (1.13)$$

で与えられる。

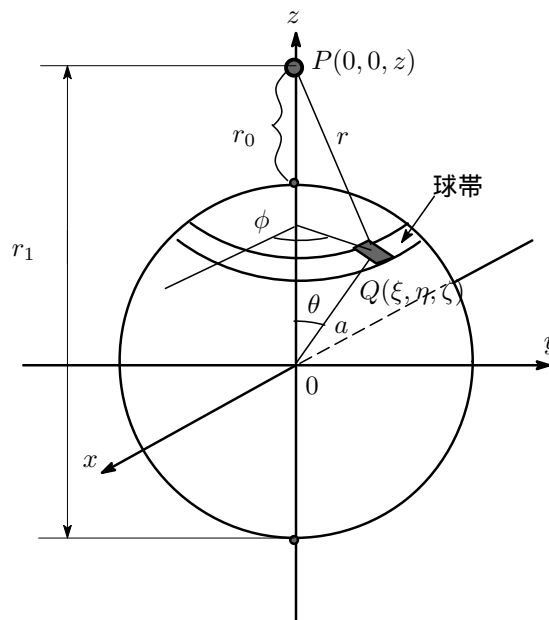
以上、万有引力の一般論を展開してきたので、以下ではこれらの理論を使って具体的な計算をやっていこう。

2 万有引力の計算

2.1 球体がつくる力の場

[A] 球殻のケース（あんこのない饅頭の皮）

一様な面密度 σ で質量が分布している半径 a の球面を考える。球面から点 P に働く力の成分を求めてみよう。球の中心を原点とし、球面上の点 Q の座標を $Q(\xi, \eta, \zeta)$ とする。



図より,

$$\begin{aligned}\xi &= a \sin \theta \cos \phi, & \eta &= a \sin \theta \sin \phi, & \zeta &= a \cos \theta \\ dS &= a^2 \sin \theta dr d\theta d\phi, & dm &= \sigma dS\end{aligned}$$

また, \overline{QP} の長さ r は, 余弦定理により

$$r^2 = a^2 + z^2 - 2az \cos \theta \quad (2.1)$$

で与えられる。点 Q の微正面積から P に働く力の z 成分 df_z は, (1.11) より

$$df_z = -\frac{(\zeta - z)\sigma}{r^3} dS = -\frac{(\zeta - z)}{r^3} dm = \frac{a \cos \theta - z}{r^3} a^2 \sigma \sin \theta d\theta d\phi \quad (2.2)$$

球帯からの寄与は上式を ϕ に関して 0 から 2π まで積分すればよいから, その結果を $d\tilde{f}_z$ とすれば

$$d\tilde{f}_z = \frac{2\pi(a \cos \theta - z)}{r^3} a^2 \sigma \sin \theta d\theta \quad (2.3)$$

となる。次に (2.1) から $r \frac{dr}{d\theta} = az \sin \theta \rightarrow r dr = az \sin \theta d\theta$

$$r dr = az \sin \theta d\theta, \quad a \cos \theta = \frac{1}{2z}(a^2 + z^2 - r^2) \quad (2.4)$$

であるから, 積分変数 θ を 0 から π の範囲までとって (2.3) を積分すると, 求める力 F_z が得られる。

$$\begin{aligned}F_z &= \int_0^\pi d\tilde{f}_z = \int_0^\pi \frac{2\pi(a \cos \theta - z)}{r^3} a^2 \sigma \sin \theta d\theta \\ &= 2\pi a^2 \sigma \int_{r_0}^{r_1} \frac{1}{r^3} \left\{ \frac{1}{2z}(a^2 + z^2 - r^2) - z \right\} \frac{r}{az} dr \\ &= \frac{a\sigma\pi}{z^2} \int_{r_0}^{r_1} \left(\frac{a^2 - z^2}{r^2} - 1 \right) dr \\ &= \frac{a\sigma\pi(z^2 - a^2)}{z^2} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_0} \right) - \frac{a\sigma\pi}{z^2} (r_1 - r_0)\end{aligned} \quad (2.5)$$

ここで $\theta = 0$ のときの r を r_0 , $\theta = \pi$ のときのそれを r_1 とおいた。

以上が, 点 P における力の表式で, P の具体的な位置については触れていない。 P の位置は, 球面外部, 球面内部, 球面上の 3 つの場合が考えられるので, それぞれについての力の場を求めよう。

1. 点 P が球面の外部に位置するケース ($z > a$)

この場合は, $r_0 = z - a$, $r_1 = z + a$ であるから (2.5) より

$$F_z = -\frac{4\pi a^2 \sigma}{z^2} = -\frac{m}{z^2} \quad (2.6)$$

となる。 $4\pi a^2 \sigma$ は球面上に分布している全質量の値であり, z は球の中心からの距離であるので, (2.6) は, 全質量が球の中心に集中したとみなされる場合の力に等しいことを示している。

2. 点 P が球面の内部に位置するケース ($z < a$)

この場合は, $r_0 = a - z$, $r_1 = a + z$ となるから (2.5) より

$$F_z = 0 \quad (2.7)$$

となる。つまり, 球の内部にある点に対しては力は全然是たらかない, ということを示している²。

3. 点 P が球面上に位置するケース ($z = a$)

この場合は, $r_0 = 0$, $r_1 = 2a$ となるから (2.5) より

$$F_z = -2\pi\sigma \quad (2.8)$$

²これは直感的にどのように理解すればいいのだろうか?

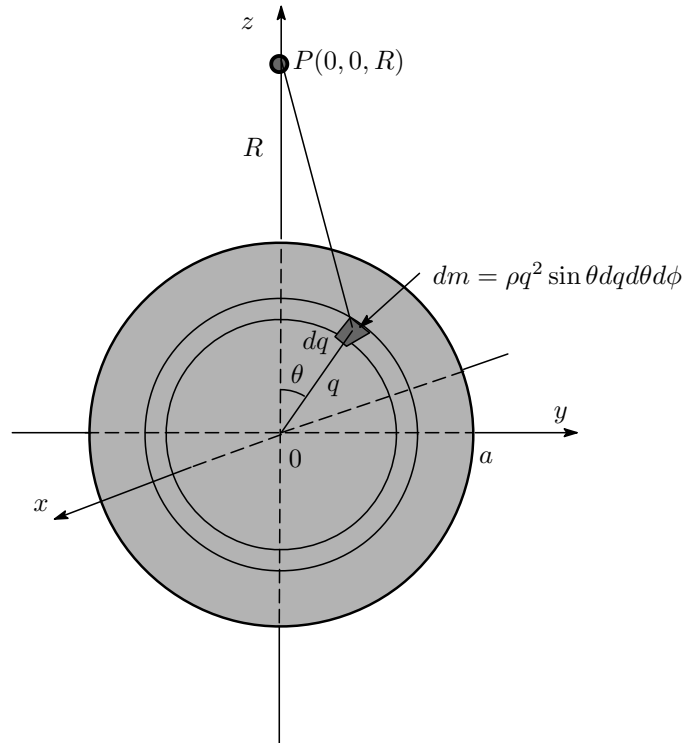
となる³。点 P が球の外部から球面上に近づいた場合の極限では

$$\lim_{z \rightarrow a} F_z = - \lim_{z \rightarrow a} \frac{4\pi a^2 \sigma}{z^2} = -4\pi \sigma = \frac{m}{a^2}$$

一方，球の内部から球面に近づいた場合の極限值は $F_z = 0$ であるから，(2.8) の値は丁度これら極限値の相加平均になっている。

[B] 球体のケース（あんこが詰まった饅頭）

次に，半径 a の球の内部に一樣な密度 ρ で質量が分布している球体を考えよう。



1. 点 P が球体の外部に位置するケース ($R > a$)

この場合は (2.6) で，球の半径を 0 から a まで積分すればよいから

$$F_z = - \int_0^a \frac{4\pi q^2 \sigma}{R^2} dq = - \frac{4\pi a^3 \rho}{3} \frac{1}{R^2} = - \frac{m}{R^2}, \quad (m = \frac{4\pi a^3 \rho}{3}) \quad (2.9)$$

球殻の場合と同様に，この場合も全質量が球の中心に集中した場合の力と同じになる。

2. 点 P が球体の内部に位置するケース ($R \leq a$)

この場合は，半径 R から外の球殻からの影響は考慮しなくてよいから，(2.6) の球の半径を 0 から R まで積分すればよい。

$$F_z = - \int_0^R \frac{4\pi q^2 \sigma}{R^2} dq = - \frac{4\pi R \rho}{3} = - \frac{4\pi R^3 \rho}{3} \frac{1}{R^2} = - \frac{m'}{R^2}, \quad (m' = \frac{4\pi R^3 \rho}{3}) \quad (2.10)$$

半径 $R (\leq a)$ の球体の全質量が中心に集中した場合の力に等しい。

問題：半径 r の球の内部に質量が分布している。その密度は同心球面の上では一定，すなわち中心からの距離 r のみの関数である。球の内部で中心からの距離 r のところに大きさが r の平方根に比例する力が中心に向かってはたらくとすると上の密度は r のどんな関数であるか。

³点 P は分布している質点と同じ位置にくるのだからその特定の点では積分が ∞ となりそうだが，結果として有限の値が得られるのは面白い。

回答：密度を $\sigma(q)$ とする。(2.10) を使うと

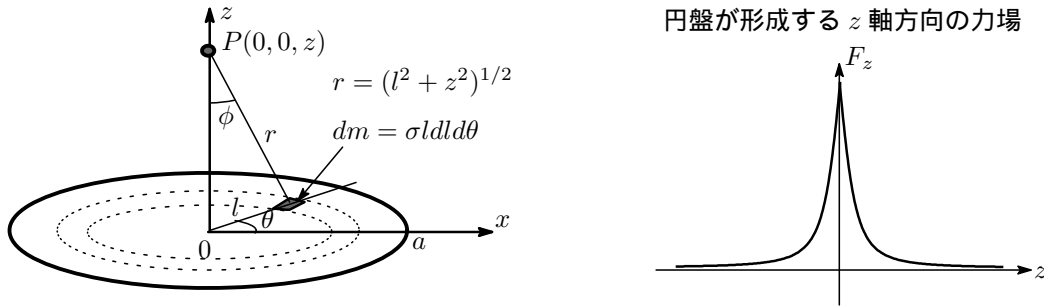
$$|F_z| = \frac{4\pi}{r^2} \int_0^r \sigma(q)q^2 dq = kr^{1/2}, \quad (k > 0, \text{ 比例定数})$$

$$\therefore \int_0^r \sigma(q)q^2 dq = k'r^{5/2}, \quad (k' = k/4\pi)$$

これから $\sigma(r) \approx r^{-1/2}$ となることがわかる。

2.2 半径 a の円板がつくる力の場 (ピザパイ)

半径 a の円板上に一樣な面密度 σ で質量が分布しているとする。



円板の中心を通り、これと垂直な直線上に点 P をとり、点 P での力の場を求めよう。点 P にはたらく力を F_z とすると、

$$F_z = - \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a dl \frac{\sigma l}{r^2} \cos \phi = -2\pi\sigma z \int_0^a \frac{l}{(l^2 + z^2)^{3/2}} dl$$

$$= 2\pi\sigma z \left[\frac{1}{(l^2 + z^2)^{1/2}} \right]_0^a = -2\pi\sigma z \left\{ \frac{1}{z} - \frac{1}{(a^2 + z^2)^{1/2}} \right\} \quad (2.11)$$

となる。 a を無限大に大きくすれば力は位置によらず大きさ $2\pi\sigma$ と一定で、 xy -面に対して垂直にはたらく。一方、 a を有限の場合は $|x|$ を大きくすると

$$|z| \rightarrow \text{大} : \frac{1}{z} \rightarrow 0, \quad \frac{1}{(a^2 + z^2)^{1/2}} \approx \frac{1}{z} \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{a}{z} \right)^2 \right) \approx -\frac{a^2}{2z^3}$$

となるので、力は z^2 に反比例することになる。また、 P が円板上にあれば $z = 0$ であるから、 $F_z = -2\pi\sigma$ となって、これは先ほどの球殻の表面上に位置した場合と同じ結果を与える。尚、 F_x, F_y は対称性からみてゼロとなることがわかるが、念のため、例えば F_x を計算すると

$$F_x = - \int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta \int_0^a dl \frac{\sigma l}{r^2} \sin \phi$$

となり、 $\cos \theta$ の積分でゼロになる。 F_y も同様。

2.3 直線がつくる力の場

一樣な線密度 γ で直線状に質量が分布している場合の力の場を求めよう。

1. 直線の長さが無限遠のケース

この場合は

$$F_x = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma \sin \alpha}{r^2} d\zeta = -\frac{x}{\gamma} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + \zeta^2)^{2/3}} d\zeta = -\frac{x}{\gamma} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1 + u^2)^{2/3}} du = -\frac{\gamma}{x} \left[\frac{u}{(1 + u^2)^{2/3}} \right]_{-\infty}^{\infty}$$

$$= -\frac{2\gamma}{x} \quad (u = \zeta/x) \quad (2.12)$$

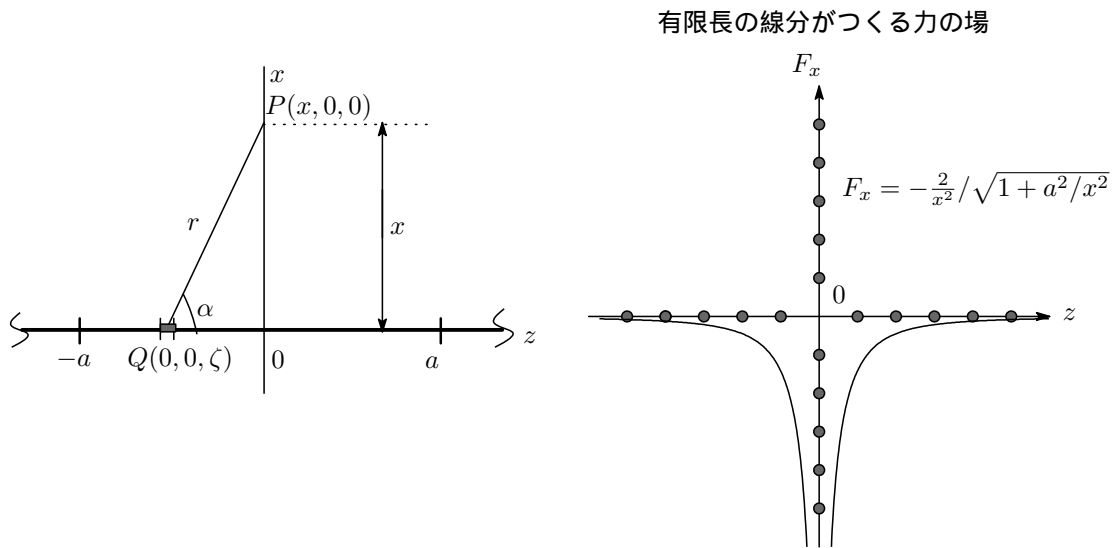
点 P にはたらく力はこの点から直線に至る距離に反比例している。この関係はあとででてくる対数ポテンシャルの意味づけとして使われる。尚、念のため F_z を求めておくと⁴,

$$F_z = -\gamma \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \alpha}{r^2} d\zeta = -\gamma \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\zeta}{(\zeta^2 + x^2)^{3/2}} d\zeta = 0$$

2. 直線の長さが原点を中心に左右それぞれ長さ a のケース

$$\begin{aligned} F_x &= - \int_{-a}^a \frac{\gamma \sin \alpha}{r^2} d\zeta = -\frac{x}{\gamma} \int_{-a}^a \frac{1}{(x^2 + \zeta^2)^{2/3}} d\zeta \\ &= -\frac{x}{\gamma} \int_{-a/x}^{a/x} \frac{1}{(1 + u^2)^{2/3}} du = -\frac{(2a\gamma/x^2)}{(1 + a^2/x^2)^{1/2}} \quad (u = \zeta/x) \end{aligned} \quad (2.13)$$

となる。この場合も F_z がゼロとなることは自らチェックください。



問題：一様な線密度が無限遠に伸びる直線の上に分布された場合を考察し、 $F_x = -2\gamma/x$ を得た。また、一様な面密度が無限遠に広がる平面上に分布された場合を考察し、 $F_z = 2\pi\sigma$ という結果を得た。3次元の場合、一様な体密度を無限遠までのばして全空間に分布したらどうなるであろうか。パラグラフ 2.1 [B] 球体のケースでの計算で、球の半径を ∞ にして考察することが可能であろうか。

回答：球の半径を無限大としていくと (2.10) の積分が発散してしまうので、その観点からの考察はできない (ちょっと考察が不十分 ^^;))

♣ Q&A

- K氏：ひとまずここまで。結構知っている話が多いだろう。
- アリス：そうねえ、でもキチンと整理できてよかったわ。いままでのお話を要約すると、2質点の間にはたらく力は距離の2乗に反比例(逆2乗則)する。こちらが例えば点 P に位置する単位質量の質点でも、相手から受ける力(これを力場という)は、相手が質点の集合体のようなものであれば必ずしも逆2乗則が成り立たない。相手が球体の場合には、球の外部に置かれた点 P の受ける力は球の中心からの距離の2乗に反比例する、ということで逆2乗則が成立するけど、相手が円板となると、無限に大きい円板の場合は、点 P の位置に関係なく $2\pi\sigma$ と一定の力を受ける。一方、有限の大きさの円板であれば距離の2乗に反比例する力を受けるということで逆2乗則が復活する。また無限長の線分から受け

⁴ここにでてくる積分は (2.11) を参照。

る力は距離の1乗に反比例し、逆2乗則は成立しない。ということで、相手が質点の集合体である場合は、これらで形成される力の場は、必ずしも逆2乗の法則が成立しないということね。中でも球体の場合、面白いわね。球の中心に全質量が集中したとみなせるわけでしょう。そして球殻となると球殻の内側には力が全然作用しないというのも驚きね。ただ、例えば回転楕円体のような場合ならどうなるのかなと疑問も湧くけど。。。

- K氏：うっふぉ～ん。なにか喉に詰まったみたい。そうだね、僕は計算したことがないのでなんともいえないけど、どうなんだろうね。地球物理学か、どこかでそのような計算をやられていると思うけど、一度調べてみるのも面白いね。まっ、時間のあるときにでもあたってみたら。
- アリス：そうね、ちょっと思いついただけだから、忘れないようにだけはしておくわ。さぁ、空気を入れ換えましょうか。ここに来る途中でコーヒー豆を買ってきたから、おいしいコーヒーを入れるわ。
- K氏：それはありがたい。少し腹が減ってきたなあ。早めの昼食となるけど、冷凍庫にピザが入っているのでそれをチンしようか。
- アリス：お手間をおかけします。ご馳走になるわ。

3 ポテンシャル

万有引力 (1.4) は、スカラー量 m/r の位置座標の微分です。

$$\begin{aligned} r^2 &= (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 \\ F_x &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{m}{r} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{m}{r} \right) \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{m(x - x_1)}{r^3} \\ F_y &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{m}{r} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{m}{r} \right) \frac{\partial r}{\partial y} = -\frac{m(y - y_1)}{r^3} \\ F_z &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{m}{r} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{m}{r} \right) \frac{\partial r}{\partial z} = -\frac{m(z - z_1)}{r^3} \end{aligned} \quad (3.1)$$

力はベクトル量なのでこれを \mathbf{F} と書くと、 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ を単位ベクトルとして⁵

$$\mathbf{F} = \text{grad} \left(\frac{m}{r} \right) = \text{grad}U, \quad \left(U = \frac{m}{r}, \text{grad} = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (3.2)$$

と書ける。

3.1 保存力

単位質量 $m = 1$ の質点を考える。この質点が場の力の作用により、時間 dt の間に点 (x, y, z) から点 $(x + dx, y + dy, z + dz)$ へ運動したとする。運動エネルギー T は

$$T = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \quad (\dot{x} = dx/dt) \quad (3.3)$$

で与えられるので、時間 dt の間に变化した運動量 $(dT/dt)dt$ は、(3.3) より

$$\frac{dT}{dt} dt = (\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z})dt = F_x dx + F_y dy + F_z dz, \quad (F_x = \ddot{x}, F_y = \ddot{y}, F_z = \ddot{z}) \quad (3.4)$$

となる。質点が点 $P_1(a_1, b_1, c_1)$ から点 $P_2(a_2, b_2, c_2)$ まで移動したときの運動量 T の変化分は、(3.4) の線積分で与えられるから

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{dT}{dt} dt = \Delta T = \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = \int_{P_1}^{P_2} (F_x dx + F_y dy + F_z dz) \quad (3.5)$$

⁵ある点におけるスカラー場 φ の勾配 $\text{grad}\varphi$ とは、任意の方向 n に対してその方向に単位ベクトルを \mathbf{i}_n 、その方向の方向微分を $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ とすると、 n の向きによらず常に $\text{grad}\varphi = \mathbf{i}_n \frac{\partial \varphi}{\partial n}$ が成り立つ。

となる。ところで質点の経路は、運動方程式と初期条件によっていろいろな経路があり、一義的には決まらない。ところで、質点に作用する力が $F = \text{grad}U$ で与えられる場合は、(3.5) の積分は

$$\Delta T = \int_{P_1}^{P_2} \left(\frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz \right) = \int_{P_1}^{P_2} dU = U(P_2) - U(P_1) \quad (3.6)$$

となり、始点と終点だけで決まり、途中の経路には全く関係しないということになる。(3.6) より、始点と終点と同じになれば運動エネルギーの変化はゼロとなる。このような力の場を保存力場と呼んでいる。

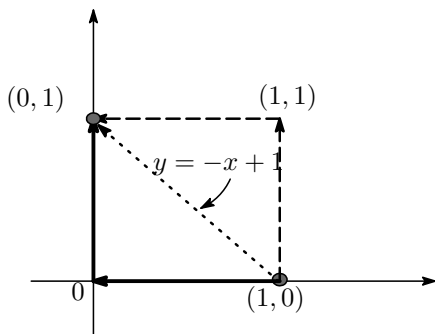
ところで (3.6) をみれば、運動エネルギーの変化分は、位置の関数 ($\propto 1/r$) である U というエネルギー (ポテンシャルエネルギー) の位置 P_2, P_1 における差分に相当している。運動エネルギーの増加は、ポテンシャルエネルギー U の立場に立てばその分 U が減ることになり、逆に運動エネルギーが減少すればその分エネルギー U が増えることになる。 U のことをポテンシャルと呼び、特に $U = m/r$ のときは、 U をニュートンポテンシャルという。

問題：各力の成分が $X = -y, Y = x$ のように決められた場がある。点 $(1, 0)$ から点 $(0, 1)$ に行くときの仕事 $\int (Xdx + Ydy)$ が経路によって異なることを示せ。

回答：この力は保存力ではない。したがって経路によって仕事の値は異なる。

$$W = \int_A^B (Xdx + Ydy)$$

$$X = -y, Y = x$$



破線の経路の積分

$$\int_0^1 Ydy + \int_1^0 Xdx = \int_0^1 dy + \int_1^0 (-1)dy = 2$$

実線経路の積分

$$\int_1^0 Xdx + \int_0^1 Ydy = \int_1^0 (0)dx + \int_0^1 (0)dy = 0$$

点線経路の積分

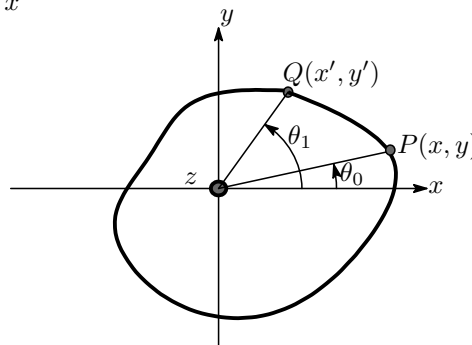
$$\int_1^0 Xdx + \int_0^1 Ydy = \int_1^0 (x-1)dx + \int_0^1 (1-y)dy = 1$$

問題： $X = -y/(x^2 + y^2), Y = x/(x^2 + y^2), Z = 0$ によって決められた力の場については、原点以外のある点から出発してもとのところに戻る経路をとった積分 $\int (Xdx + Ydy + Zdz)$ を求めると、経路が z 軸を回らないならこの値は 0 であるが、経路が z 軸の周りを正に 1 回りするごとに 2π だけ増え、負に 1 回りするごとに 2π だけ減ることを証明せよ。

回答：連続関数 $f(x, y)$ の全微分は $df(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$ で与えられるので、

$$\theta = \int (Xdx + Ydy) = \int \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2} = \int d\left(\tan^{-1} \frac{y}{x}\right) = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

$$\therefore \tan \theta = \frac{y}{x}$$



仕事量 θ は P からスタートして Q に至り、もとの P に戻ればその間に成した仕事は、したがって

$$(\theta_1 - \theta_0) + (\theta_0 - \theta_1) = 0$$

一方、経路が z 軸を反時計方向に n 回周回してもとの位置に戻れば $2n\pi$ 、時計方向に n 回周回すれば $-2n\pi$ の仕事をすることになる。

3.2 ニュートンポテンシャル

保存力場では、力は (3.2) で明らかなようにポテンシャルの座標微分で表されるので、ポテンシャル U は $U = m/r + c$ と付加定数 c の不定性がある。しかし、この付加定数は、無限遠点 ($r \rightarrow \infty$) のポテンシャル U を基準の点とすることで $c = 0$ となるので、以下、この基準点を採用する。

単一の質点によるポテンシャルは

$$U = \frac{m}{r} \quad (3.7)$$

で定義した。多数の質点によるポテンシャルは上のポテンシャルをすべて足し合わせたものとなる。

$$U = \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{r_i} \quad \text{or} \quad U = \iiint \frac{dm}{r} \quad (3.8)$$

3.2.1 球体ポテンシャル

セクション 2.1 で取り扱った球体のポテンシャルを調べてみよう。点 P の座標を $P(0, 0, R)$ とする。

[A] 球殻のケース (饅頭の皮): 球体の微小面積 dS の質量 dm は

$$dm = \sigma dS = 2\pi a^2 \sigma \sin \theta d\theta \quad \left(m = 2\pi a^2 \sigma \int_0^\pi \sin \theta d\theta = 4\pi a^2 \sigma \right)$$

で与えられるから、球帯からのポテンシャルを dU とすると、

$$dU = \frac{2\pi a^2 \sigma \sin \theta d\theta}{r} \quad (3.9)$$

球殻全体からのポテンシャルは (3.9) を θ で積分すればよいから、(2.4) の $r dr = aR \sin \theta d\theta$ という関係を使うと

$$U = 2\pi a^2 \sigma \int_0^\pi \frac{\sin \theta}{r} d\theta = \frac{2\pi a \sigma}{R} \int_{r_0}^{r_1} dr \quad (3.10)$$

が得られる。例のよって点 P の位置を区分けすると

1. $R > a$ のケース

この場合は、 $r_0 = R - a$, $r_1 = R + a$ となるので (3.10) はすぐ積分できて

$$U = \frac{4\pi a^2 \sigma}{R} = \frac{m}{R}$$

R は球殻の中心からの距離であるから、全質量が球殻の中心に集中したとみなした場合のポテンシャルとなっている。

2. $R \leq a$ のケース

この場合は、 $r_0 = a - R$, $r_1 = a + R$ となるので

$$U = 4\pi a \sigma = \frac{4\pi a^2 \sigma}{a} = \frac{m}{a}$$

球殻内のポテンシャルは、全質量が球殻の中心に集中したとみなした場合の、球殻の半径を距離とするポテンシャルに等しい。つまり、球殻内ではポテンシャルは一定 (どこの位置でも同じポテンシャルを持つ) ということになる。

[B] 球体のケース (あんこの詰まった饅頭): この場合は半径 q のところに幅 dq をもつ球殻を考える。この球殻の質量は $4\pi q^2 \rho dq$ となる。

1. $R > a$ のケース

この場合, $R > a$ であるのですべての q で $R > q$ 。幅 dq の球殻の質量は, $4\pi \rho q^2 dq$ となるから, この球殻によりポテンシャル dU は

$$dU = \frac{4\pi \rho q^2}{R} dq \quad (3.11)$$

となるから, 球全体のポテンシャルはこれを q で積分して

$$U = \int dU = \frac{4\pi \rho}{R} \int_0^a q^2 dq = \frac{4\pi a^3 \rho}{3} \frac{1}{R} = \frac{m}{R}$$

2. $R \leq a$ のケース

この場合は, 半径 R の球体からのポテンシャルと, その球を取り巻く同心球殻からのポテンシャルの和となる。まず, 半径 R の球のポテンシャルを U_1 とすると

$$U_1 = \frac{4\pi R^3 \rho}{3} \frac{1}{R} = \frac{4\pi R^2 \rho}{3}$$

次に, 同心球殻からのポテンシャルを U_2 とすると

$$U_2 = \int_R^a \frac{4\pi q^2 \rho}{q} dq = 2\pi \rho (a^2 - R^2) \quad (3.12)$$

全体のポテンシャル U は $U = U_1 + U_2$ であるので

$$U = \frac{4\pi R^2 \rho}{3} + 2\pi \rho (a^2 - R^2) = \frac{3m}{2a} - \frac{mR^2}{2a^3}$$

となる。

上では密度が一定の場合を取り扱ったが, 密度が球の中心からの距離の関数となっている場合を以下に問題として載せておく。

問題: 半径 a の球の内部, 中心から r の距離のところに密度が $\rho = k(1+r^2)^{-1}$ であるような質量が分布している。この質量分布にもとづくニュートンポテンシャルを求めよ⁶。

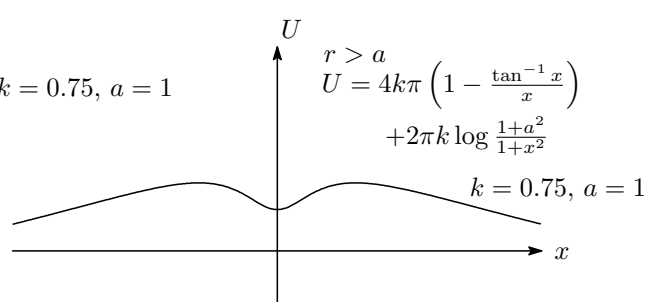
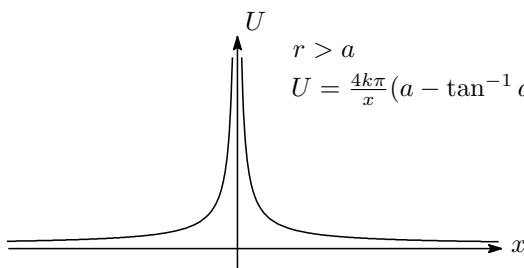
解答:

$r > a$ の場合, (3.11) より

$$U = \frac{4\pi}{r} \int_0^a \rho q^2 dq = \frac{4k\pi}{r} \int_0^a \frac{q^2}{(1+q^2)} dq = \frac{4k\pi}{r} \left[q - \tan^{-1} q \right]_0^a = \frac{4k\pi}{r} (a - \tan^{-1} a)$$

$r \leq a$ の場合, (3.11), (3.12) より

$$\begin{aligned} U &= \frac{4\pi}{r} \int_0^r \rho q^2 dq + 4\pi \int_r^a \rho q dq = \frac{4k\pi}{r} \int_0^r \frac{q^2}{1+q^2} dq + 4k\pi \int_r^a \frac{q}{1+q^2} dq \\ &= \frac{4k\pi}{r} \left[q - \tan^{-1} q \right]_0^r + \left[2k\pi \log(q^2 + 1) \right]_r^a \\ &= 4k\pi \left(1 - \frac{\tan^{-1} r}{r} \right) + 2k\pi \log \frac{1+a^2}{1+r^2} \end{aligned}$$

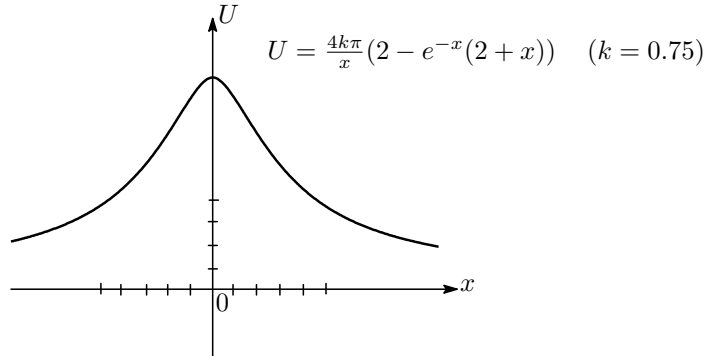


⁶積分計算は <http://integrals.wolfram.com/index.jsp> が役立つ。

問題：原点からの距離 r のところの密度が $\rho = ke^{-r}$ であるようにして，全空間に質量が分布している。この質量分布にもとづくニュートンポテンシャルを求めよ。

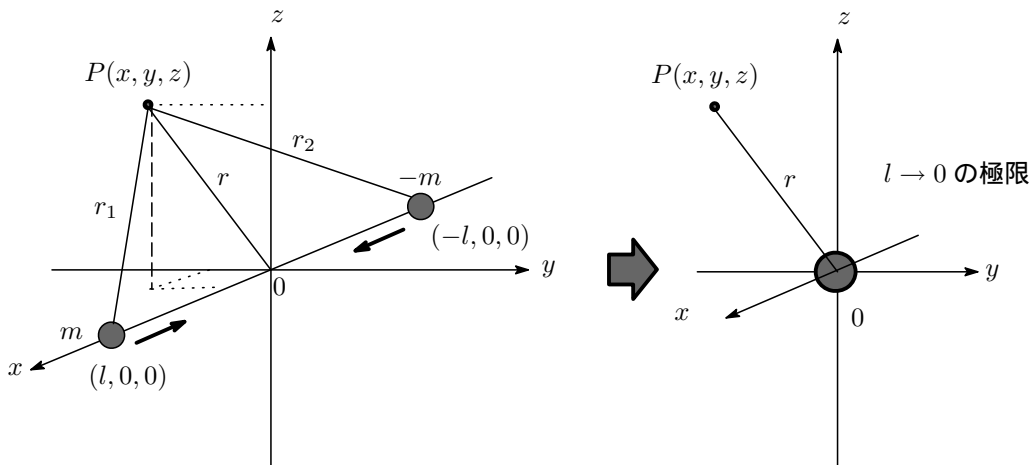
解答：

$$U = \frac{4k\pi}{r} \int_0^r q^2 e^{-q} dq + 4k\pi \int_r^\infty q e^{-q} dq = \frac{4k\pi}{r} \{2 - e^{-r}(2+r)\}$$



3.2.2 双極子

x -軸上に並んだ双極子 x -軸上に正の電荷と負の電荷が原点を中心としてそれぞれ距離 l を隔てて存在する系を考える。



点 P におけるポテンシャル U は

$$U = \frac{m}{\sqrt{(x-l)^2 + y^2 + z^2}} + \frac{-m}{\sqrt{(x+l)^2 + y^2 + z^2}} \quad (3.13)$$

となる。この系のモーメント $M(= \text{質量} \times \text{距離})$ は $2ml$ となる。いま，モーメント M を一定に保ちながら距離 l を限りなく 0 に近づけたとき⁷の U の極限值を考えよう。この場合， $r_1, r_2 \approx r$ となることに留意し，(3.13)の分子を l が小さいとしてテイラー展開すると (l^2 以上の項を無視) 次のようになる。

$$U = m \left[\frac{1}{(r^2 - 2xl + l^2)^{1/2}} - \frac{1}{(r^2 + 2xl + l^2)^{1/2}} \right] \approx \frac{m}{r} \left[\left(1 - \frac{2xl}{r^2}\right)^{-1/2} - \left(1 + \frac{2xl}{r^2}\right)^{-1/2} \right]$$

$$\approx \frac{m}{r} \left(1 + \frac{xl}{r^2} - 1 + \frac{xl}{r^2}\right) \approx \frac{2mlx}{r^3}$$

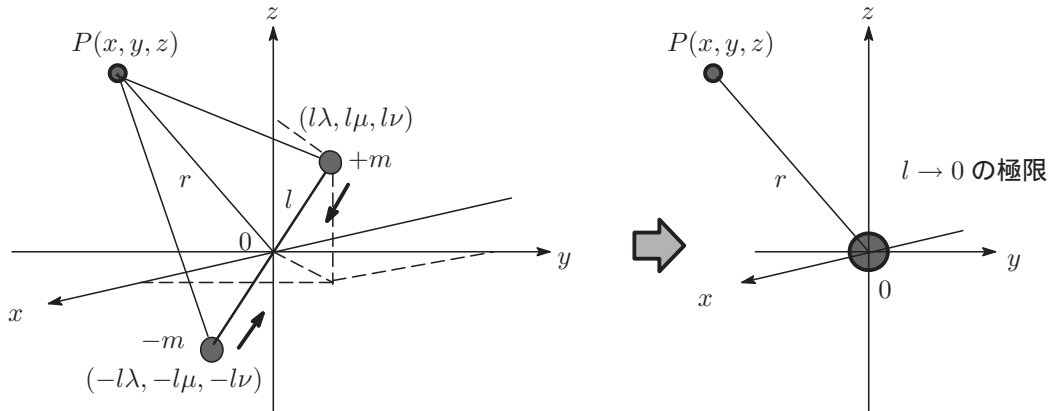
⁷ M を一定にするため m を増やす。i.e. : $m = M/2l$ の関係を保ちながら $l \rightarrow 0$ としていく。

ここで $l \rightarrow 0$ としたとき

$$U = \frac{Mx}{r^3} \quad (3.14)$$

となる。これは絶対値の等しい正負の電荷がモーメント M で原点に集まったもの（これを電気双極子と呼ぶ）にもとづくポテンシャルと考えられる。双極子はモーメントによって特長づけられる。

原点にある双極子のポテンシャル 次に、原点を中心とした任意の軸上にプラス・マイナスの電荷が配されているケースを考えよう。



この直線方向余弦を (λ, μ, ν) とすると、 $+m$ の電荷の座標は $(l\lambda, l\mu, l\nu)$ 、 $-m$ の電荷の座標は $(-l\lambda, -l\mu, -l\nu)$ となる。点 P におけるポテンシャル U はしたがって

$$U = \frac{m}{\sqrt{(x-l\lambda)^2 + (y-l\mu)^2 + (z-l\nu)^2}} + \frac{-m}{\sqrt{(x+l\lambda)^2 + (y+l\mu)^2 + (z+l\nu)^2}} \quad (3.15)$$

となる。ここで $|l|$ が小さいとするとテイラー展開により

$$(x-l\lambda)^{1/2} \approx \frac{l\lambda x}{r^3}, \quad (x+l\lambda)^{1/2} \approx -\frac{l\lambda x}{r^3}$$

と近似できる。モーメント $M = 2ml$ を一定に保ちながら $l \rightarrow 0$ となる極限を考えると、(3.15) は

$$U = \frac{2ml\lambda x + 2ml\mu y + 2ml\nu z}{r^3} = \frac{M\lambda x + M\mu y + M\nu z}{r^3} \quad (3.16)$$

となる。ベクトル M, \mathbf{x} を

$$\mathbf{M} = (M\lambda, M\mu, M\nu), \quad \mathbf{r} = (x, y, z) \quad (3.17)$$

と定義すれば⁸、(3.16) は

$$U = \frac{\mathbf{M} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \quad (3.18)$$

と、モーメントベクトル⁹と点 P の位置ベクトルのスカラー積で表される。

任意の位置にある双極子のポテンシャル 双極子のある場所をいままでは便宜上原点 $(0, 0, 0)$ に設定してきたが、これを任意の位置 $Q(\xi, \eta, \zeta)$ に設定して一般化してみよう。 $\vec{r} = \vec{QP}$ とすると、 $\mathbf{r} = (x - \xi, y - \eta, z - \zeta)$ であるので、点 P でのポテンシャルは

$$U = \frac{\mathbf{M} \cdot \mathbf{r}}{r} = \frac{M\lambda(x - \xi) + M\mu(y - \eta) + M\nu(z - \zeta)}{r^3} \quad (3.19)$$

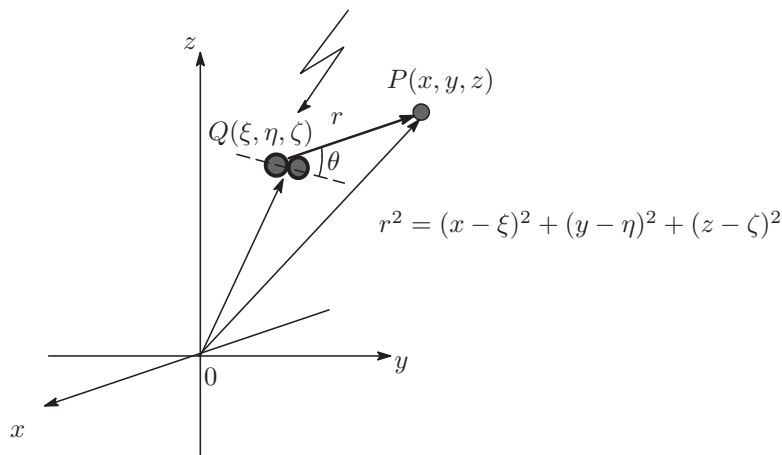
となる。また、

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \right) \frac{\partial r}{\partial \xi} = \frac{x - \xi}{r^3}, \quad \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{y - \eta}{r^3}, \quad \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{z - \zeta}{r^3}$$

⁸ $\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1$

⁹ベクトルの向きはマイナスからプラスの向きと定義する。

双極子を2個の で表している (方向余弦: λ, μ, ν)



となるので, (3.19) は

$$U = M \left[\lambda \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{r} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{r} \right) + \nu \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{1}{r} \right) \right] \quad (3.20)$$

と書ける。 r の方向余弦を (α, β, γ) , 双極子の方向余弦を (λ, η, ζ) とすると (図中の破線参照), その間のなす角 θ は方向余弦の公式

$$\cos \theta = \alpha \lambda + \beta \eta + \gamma \zeta = \frac{(x - \xi)\lambda + (y - \eta)\mu + (z - \zeta)\nu}{r} \quad (3.21)$$

を使うと (3.19) は

$$U = \frac{M \cos \theta}{r^2} \quad (3.22)$$

となる。

3.2.3 2重層

表裏のある滑らかな曲面 S の一方の面に面密度 σ で正の電荷を, 対向する裏面に面密度 σ_1 で負の電荷が分布しているとする。 S, S_1 曲面の微小領域における電荷量は符号が反対で大きさは等しいとしておく。

$$\sigma_1 dS = -\sigma dS \quad (3.23)$$

2つの面 S, S_1 にもとづくポテンシャルは

$$U = \iint_S \frac{\sigma dS}{r} + \iint_{S_1} \frac{\sigma_1 dS_1}{r_1} = \iint_S \sigma \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} \right) = \iint_S \sigma h \frac{1/r - 1/r_1}{h} dS \quad (3.24)$$

となる。ここで $h \rightarrow 0$ の極限をとるが, σ を σh が0でない値 μ を保つように $\sigma \rightarrow \infty$ とする。法線 n 方向の微分は

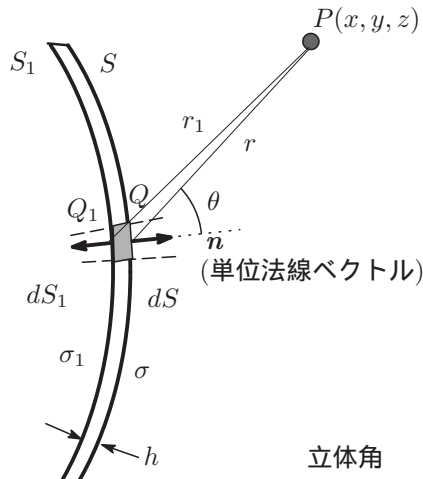
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} \right) = \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) \quad (3.25)$$

で与えられるので, (3.24) は

$$U = \iint_S \mu \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) dS \quad (3.26)$$

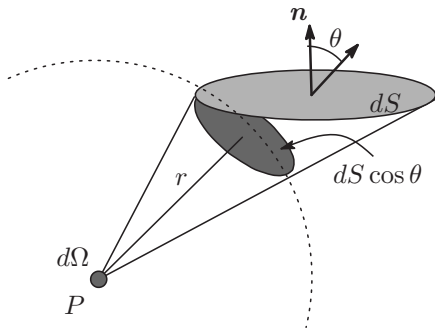
と書くことができる。この μ を電気2重層のモーメントと呼ぶ。点 $Q(\xi, \eta, \zeta)$ における単位法線ベクトル n の方向余弦を (α, β, γ) とすると, 公式

$$\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial n} = \mathbf{n} \cdot \nabla f(x, y, z), \quad \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$



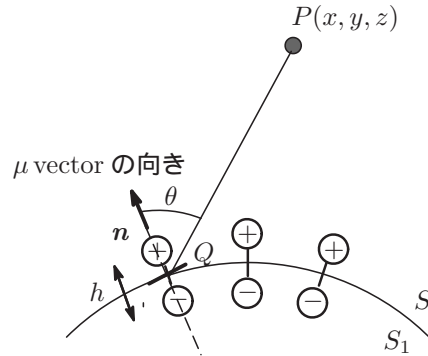
立体角

$$d\omega = \frac{dS \cos \theta}{r^2}$$

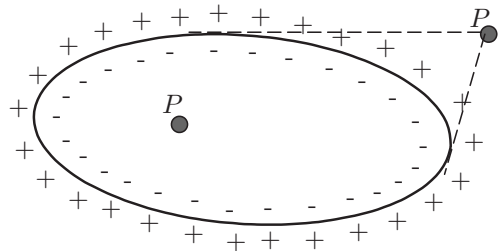


<電気2重層のイメージ>

Dipole が曲面 S に図のように分布している



<閉曲面の2重層>



を使えば,

$$\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) = \alpha \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{r} \right) + \beta \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{r} \right) + \gamma \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{1}{r} \right)$$

と展開できる。これから (3.26) は

$$U = \iint_S \mu dS \left[\alpha \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{r} \right) + \beta \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{r} \right) + \gamma \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{1}{r} \right) \right] \quad (3.27)$$

となるが、この式と (3.20) を見比べると、電気2重層はモーメント μdS をもつ電気双極子が面上に曲面に垂直に極を立てて分布しているものと考えることができる。そうすると (3.22) のようにポテンシャルは

$$U = \iint_S \frac{\mu \cos \theta}{r^2} dS = \int \mu d\Omega \quad (3.28)$$

と書くこともでき、点 P から見た立体角¹⁰で表すことができる。表面から見るか裏面から見るかの違いによって立体角には符号がついて、 μ ベクトルと \overline{QP} のなす角が鋭角のときはプラスの符号(表面から見る)、鈍角のときにはマイナスを符号(裏面から見る)をつけることとしている。

ここで話を整理しておく

1. μ が一定で2重層に縁があるケース

この場合は、点 P でのポテンシャルは点 P から縁の各点を見た立体角にモーメント μ を掛けた値に等しい。

2. μ が一定で2重層が閉曲面になっているケース。

この場合は、点 P が閉局面内部にある場合と外部にの2つのケースがある。

点 P が閉曲面の内部にある場合、点 P から見た立体角は 4π となるが、立体角はマイナスの符号がつくので

$$U = -4\pi\mu$$

¹⁰半径 1 の球を考え、球の中心を頂点とする円錐で切り取られる球面の面積のことを立体角といい、通常 Ω という記号で表される。単位はステラジアン。

点 P が閉曲面の外部にある場合,

$$U = 0$$

点 P が閉曲面の外部にあって、且つ閉曲面上に位置する場合,

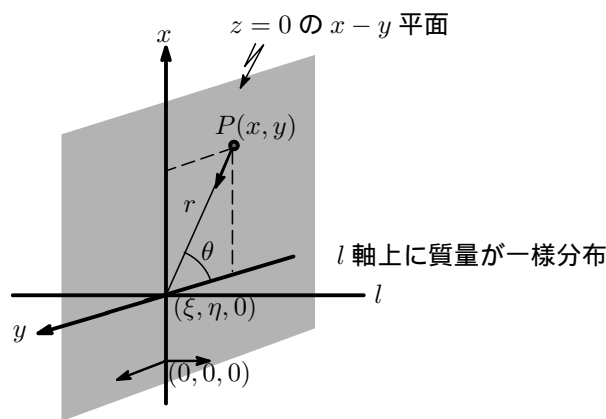
$$U = -2\pi\mu$$

3.2.4 対数ポテンシャル

セクション 2.3 で無限遠の直線上に質量が一樣分布しているケースの x 軸上の点 P における力の場を求めた。その結果は、直線からの点 P から直線に至る距離に反比例しているというものだった。いま、 z 軸と平行な直線 l 上に質量が一樣分布しているとす。 r をこの直線 l から点 P までの距離とし、 $z = 0$ の平面上で考えて直線 l が交わる点を (ξ, η) としよう。そうすると点 P に作用する力の x 成分、 y 成分は

$$\begin{aligned} F_x &= -\frac{2\gamma \sin \theta}{r} = -\frac{2\gamma(x - \xi)}{r^2} \\ F_y &= -\frac{2\gamma \cos \theta}{r} = -\frac{2\gamma(y - \eta)}{r^2}, \quad (r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}) \end{aligned} \quad (3.29)$$

となる。



いま、 x, y の関数 $U = 2\gamma \log \frac{1}{r}$ を考え、その grad をつくと

$$\text{grad}U = \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y} \right) = \left(\frac{\partial U}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} \right) = \left(-\frac{2\gamma(x - \xi)}{r^2}, -\frac{2\gamma(y - \eta)}{r^2} \right) \quad (3.30)$$

となるから、(3.29) の力 F_x, F_y, F_z は、この U の grad として表されることがわかる。そこでこの $U = 2\gamma \log \frac{1}{r}$ のことを対数ポテンシャルと呼ぶ。 $z = 0$ の 2次元平面上に限定して考えた場合、上の 2γ に相当するものがこの平面上の点質量 m と考え、 n 個の点質量 m_i が点 (ξ_i, η_i) に位置するとき、全体の対数ポテンシャルを

$$U = \sum_i^n m_i \log \frac{1}{r_i}, \quad (r_i = \sqrt{(x - \xi_i)^2 + (y - \eta_i)^2}) \quad (3.31)$$

と定義する。点質点が面密度 $\sigma(\xi, \eta)$ で連続分布している場合の対数ポテンシャルは

$$U = \iint_S \sigma(\xi, \eta) \log \frac{1}{r} d\xi d\eta \quad (3.32)$$

となる。

問題： x 軸に原点を中心として長さ $2a$ の線分をおく。能率ベクトル（モーメント）が一定でその成分が (λ, μ, ν) である双極子がこの上に分布している。これによる任意の位置 (x, y, z) のポテンシャルを求めよ。

回答：モーメントの成分は $(M\lambda, M\mu, M\nu)$ で、いま $M = 1$ とおくと、求めるポテンシャルは

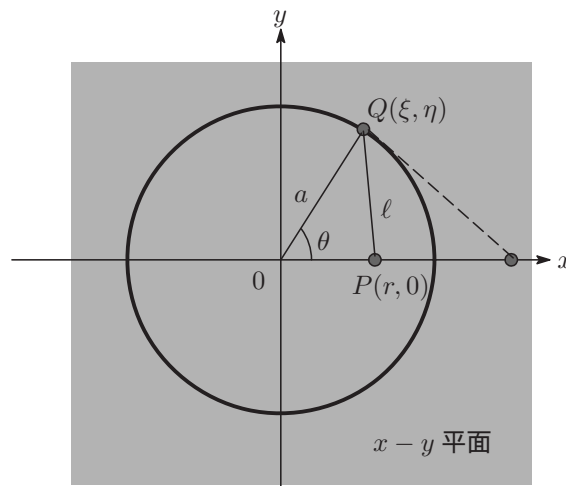
$$\begin{aligned}
 U &= \int_{-a}^a \frac{\lambda(x-\xi) + \mu y + \nu z}{r^3} d\xi = \int_{-a}^a \frac{\lambda(x-\xi) + \mu y + \nu z}{\{(x-\xi)^2 + y^2 + z^2\}^{3/2}} = \left[\frac{-\lambda(y^2 + z^2) + (x-\xi)(\mu y + \nu z)}{(y^2 + z^2)\sqrt{(x-\xi)^2 + y^2 + z^2}} \right]_{-a}^a \\
 &= \lambda \left(\frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x+a)^2 + y^2 + z^2}} \right) \\
 &\quad - \frac{\mu y + \nu z}{y^2 + z^2} \left(\frac{x-a}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{x+a}{\sqrt{(x+a)^2 + y^2 + z^2}} \right) \quad (3.33)
 \end{aligned}$$

問題：半径がそれぞれ a, b である同心な 2 つの球面がある ($a > b$)。外部の球面には一定の能率 μ の 2 重層があり、内部の球面にはこれと反対符号で能率 $-\mu$ の 2 重層がある。これらによるポテンシャルを中心からの距離の関数として求めよ。

回答：外側の球面の外部では 0、両球の間では内球からのモーメントはゼロで外側の球からのモーメントは $-4\pi\mu$ であるから、その位置でのポテンシャルは $-4\pi\mu$ 。内球の内部に位置する場合は外球からのポテンシャル ($-4\pi\mu$) と内球からのポテンシャル ($4\pi\mu$) が打ち消しあってゼロ。外球の球面上では内球からのポテンシャルはゼロとなるから $-2\pi\mu$ 。一方、内球の表面の位置では、外球からのポテンシャル $-4\pi\mu$ と内球のポテンシャル $2\pi\mu$ の足し算となるから、 $-2\pi\mu$ となる。

問題：一定な線密度が円周上に分布している。これにもとづく対数ポテンシャルは円内では一定、円外では上の質量が全部中心に集中しているとみなされる質点にもとづくポテンシャルに等しいことを示せ。

回答：線密度を γ とし、点 P を対称性から x 軸上の点 $(a, 0)$ にとる。ここでの円周上の点 $Q(\xi, \eta)$ から点 P までの距離を ℓ 、原点から点 Q の x 軸とのなす角を θ とする。



余弦定理より

$$\ell^2 = r^2 + a^2 - 2al \cos \theta$$

したがって対数ポテンシャル U は、 $2ar \cos \theta = ar(e^{i\theta} + e^{-i\theta})$ という関係式を使って

$$\begin{aligned}
 U &= a\gamma \int_0^{2\pi} \log \frac{1}{\ell} d\theta = a\gamma \int_0^{2\pi} \log(r^2 + a^2 - 2al \cos \theta)^{-1/2} d\theta \\
 &= -\frac{a\gamma}{2} \int_0^{2\pi} \log |r^2 + a^2 - 2al \cos \theta| d\theta = -\frac{a\gamma}{2} \int_0^{2\pi} \log |(r - ae^{i\theta})(r - ae^{-i\theta})| d\theta \\
 &= -\frac{a\gamma}{2} \left\{ \int_0^{2\pi} \log |r - ae^{i\theta}| d\theta + \int_0^{2\pi} \log |r - ae^{-i\theta}| d\theta \right\} \quad (3.34)
 \end{aligned}$$

$a < r$ の場合、テイラー展開して

$$\begin{aligned}\log |r - ae^{i\theta}| &= \log |ae^{i\theta}(a^{-1}re^{-i\theta} - 1)| = \log a + i\theta + \log |1 - a^{-1}re^{-i\theta}| \\ &= \log a + i\theta - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{na^n} e^{-in\theta} \\ \log |r - ae^{-i\theta}| &= \log |ae^{-i\theta}(a^{-1}re^{i\theta} - 1)| = \log a - i\theta + \log |1 - a^{-1}re^{i\theta}| \\ &= \log a - i\theta - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{na^n} e^{in\theta}\end{aligned}$$

を得る。また、

$$\int_0^{2\pi} e^{-in\theta} d\theta = \left[\frac{ie^{-in\theta}}{n} \right]_0^{2\pi} = 0, \quad \int_0^{2\pi} e^{in\theta} d\theta = - \left[\frac{ie^{in\theta}}{n} \right]_0^{2\pi} = 0$$

これらのことから (3.34) は、

$$\begin{aligned}U &= -\frac{a\gamma}{2} \int_0^{2\pi} \left\{ \log |r - ae^{i\theta}| d\theta + \int_0^{2\pi} \log |r - ae^{-i\theta}| d\theta \right\} \\ &= -a\gamma \log a \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi a\gamma \log \frac{1}{a}\end{aligned}$$

となり、対数ポテンシャルは円内では一定であることがわかる。

$a > r$ の場合、テイラー展開して

$$\begin{aligned}\log |r - ae^{i\theta}| &= \log |r(1 - ar^{-1}e^{i\theta})| = \log r - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{nr^n} e^{in\theta} \\ \log |r - ae^{-i\theta}| &= \log r - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{nr^n} e^{-in\theta}\end{aligned}$$

となるから (3.34) は、

$$\begin{aligned}U &= -\frac{a\gamma}{2} \left\{ \int_0^{2\pi} \log |r - ae^{i\theta}| d\theta + \int_0^{2\pi} \log |r - ae^{-i\theta}| d\theta \right\} \\ &= 2\pi a\gamma \log \frac{1}{r}\end{aligned}$$

が得られる。 r は円の中心からの距離であるからこの場合の対数ポテンシャルは円周上の質量が全部円の中心に集中しているとみなされる質点にもとづくポテンシャルに等しいことがわかる。

♠ 円環上はどうなるのだという声が聞こえそうだが、これは単純に円内と円外の相加平均を取ると $\pi a\gamma \log \frac{1}{a\gamma}$ となる。ただし、(3.34) の積分計算はややこしくなるのでここではやらない(汗;;)。したがって相加平均が正しいかどうかは不明。。

♣ Q&A

- K氏：一旦ここで *Tea Time* としよう。すこし疲れただろう。もらいもんだけどイギリスのうまい紅茶があるんだ、それとシュークリームも。ご馳走するよ。
- アリス：ありがとう。ちょうど一息つきたいところだったのでうれしいわ。
- K氏：ところで、保存力の話は力学を勉強した時、でまず最初にでてくるだろう。昔話になるけど、僕が高校生の頃、物理の授業で「皆さんが階段を2足飛びで上がっても、ゆっくり一歩ずつ上がっても消費するエネルギーは同じです。これを保存力といいます。」と先生が言われていたことをよく思い出すんだ。「へえ～すごい！」とわけも分からず強烈な印象を受けたもんだ。アクセクしてもしなくてもエネルギーの消費は同じか、それなら... と思ったもんだよ。それと保存力という名前にも、保存という名前になにか感銘を覚えたもんだ。

- アリス：そうなの、そういうことに感動するってなかなか純真だったのね。ところで双極子のお話のところだけど、少しまだるっこしい定義が気になるの。最初から非常に近い距離に正負の電荷をおいておけばいいのじゃないかしら。
- K氏：そうだね、ここはテキストにしたがってそのようなアプローチで説明したけど、アリスの言うように、通常、極限操作をやらずに双極子を直接設定してポテンシャルを計算しているね。ここではテキストのようなアプローチがあるという程度の理解でいいんじゃないかな。
- アリス：そういうことね、わかりました。極限操作を使う一つのアプローチの手法として覚えておくことにするわ。電気2重層のところでも同じような展開をするのね。
- K氏：そうだね。電気2重層は双極子が曲面に垂直に並んでいるというモデルで考えることができるけど、棒が立っているようにビジュアルに考えると面白いね。
- アリス：そうね、化学の分野で界面活性剤なんかそういう配列をすると聞いたことがあれけど、そういうところに応用されているのかしら。
- K氏：詳しいことは知らないけど、そうかもしれないね。最終的に立体角で決まるというところがなかなか簡潔でよさしいかと思うのだけど。
- アリス：ところで、閉局面の表裏に2重層が形成されていて、点 P が閉曲面の外部にある場合、ポテンシャル U はゼロになるということだけど、少し説明していただけるかしら。
- K氏：うん、これは閉曲面全体の立体角は、外部の点 P から見た場合、点 P の場所にかかわらず常にゼロになるということなんだね。公式として覚えておいてもいいと思うけど、直感的には次のように理解できる。点 P から閉曲面をみると接錐面ができるけど、この接錐面で作られる閉曲面の外輪を境界として点 P 側に向いた面と反対側に向いた面の2面が作られることになるね。こちらの面とあちらの面では法線方向がちょうど反対となるので、結局足した和はゼロになる。詳しい解説は「物理のかぎしっぽ」<http://www12.plala.or.jp/ksp/index.html> 等に載っているからそれらを参照してみて。尚、 Ω は Ω' の相加平均となっているね。
- アリス：わかりました。
- K氏：今日はこの辺で話を切り上げようと思っていたんだけど、ポテンシャル論の話でよく顔をだすラプラスの方程式のことに少し触れて終わりとすることにするよ。
- アリス：頑張っていただけのね。それじゃ、一服していただいてからよろしくお願いします。いい香りのする紅茶ね。
- K氏：うん、気に入った。シュークリームもうまいよ。

3.3 ラプラスの方程式

ニュートンポテンシャルは (3.8) で表された。質量密度を $\rho(\xi, \eta, \zeta)$ とすると、これは一般に次のようにあらわされる。

$$U = \iiint_V \frac{\rho(\xi, \eta, \zeta)}{r} d\xi d\eta d\zeta, \quad (r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}) \quad (3.35)$$

$\frac{1}{r}$ の座標微分をとると

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) &= \frac{\xi - x}{r^3}, & \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{r} \right) &= -\frac{1}{r^3} + \frac{3(\xi - x)^2}{r^5} \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r} \right) &= \frac{\eta - y}{r^3}, & \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{1}{r} \right) &= -\frac{1}{r^3} + \frac{3(\eta - y)^2}{r^5} \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right) &= \frac{\zeta - z}{r^3}, & \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{1}{r} \right) &= -\frac{1}{r^3} + \frac{3(\zeta - z)^2}{r^5}\end{aligned}$$

これから

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{1}{r} \right) = \nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) = 0 \quad (3.36)$$

が得られる。微分演算子 ∇^2 をラプラシアン¹¹と呼び、次の方程式をラプラスの方程式と呼んでいる。

$$\nabla^2 \phi(x, y, z) = 0, \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

質量のない U にラプラシアンを作用させると

$$\nabla^2 U = \nabla^2 \left[\iiint_V \frac{1}{r} d\xi d\eta d\zeta \right] = \iiint_V d\xi d\eta d\zeta \nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) = 0 \quad (3.37)$$

となり、質量のないポテンシャル U はラプラスの方程式を満たすことが分かる。これはニュートンポテンシャルの大きな特長となっている。また、ラプラス方程式を満たす関数を調和関数と呼んでいる。

3.3.1 調和関数

上で見てきたように調和関数とはラプラス方程式の解となる関数のことをいう。ポテンシャル U がある点 P において調和であるとは、 U が P 点の近傍において調和であることをいい、 U が調和であるような点を正則点と呼んでいる。また、点 P を除いた P の近傍で U は調和であるが、点 P においてどうなるかが分からないときに、もしこの近傍で U が有界であれば、 P においても U は調和となる¹²。逆に、 P で U が有界でなければ、 P を U の孤立特異点であるという。例えば、点 P に質量 m の質点があるとき、このポテンシャル $U = m/r$ は点 P で発散する ($\lim_{r \rightarrow 0} U = \infty$) ので、 P は孤立特異点となる。

無限遠における調和関数のふるまい

3次元の場合：原点を中心に半径 R の球面を描き、 R が十分大きいとき、それより外側で関数 U は調和であるとする。このとき原点からの距離 $r(x, y, z)$ が無限大になれば $U(x, y, z)$ はどういう振る舞いを示すのかを調べてみよう。この目的のために、座標の反転（スケール変換）を考える。つまり遠くにおける関数の振る舞いを手近で見られるようにするわけで、遠方座標 (x, y, z) に次のように近場座標 (x_1, y_1, z_1) を対応させる。

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{x}{r^2}, & y_1 &= \frac{y}{r^2}, & z_1 &= \frac{z}{r^2}, & r_1 &= \frac{1}{r} \\ r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, & r_1 &= \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\end{aligned} \quad (3.38)$$

このようにすると、無限遠での状況は原点に映されることになる¹³。無限遠でのラプラシアン (∇^2) と近場でのラプラシアン (∇_1^2) を

$$\nabla^2 = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad \nabla_1^2 = \Delta_1 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_1^2}$$

¹¹ Δ とも書かれる。

¹² この性質は調和関数の基本的かつ重要な性質の一つです。

¹³ 点 (x, y, z) での無限遠点は (x_1, y_1, z_1) での原点になる。

とすると、この2つのラプラシアンの間には次の関係式が成立する¹⁴。

$$\Delta_1 \left(\frac{U}{r_1} \right) = r^5 \Delta U \quad (3.39)$$

(3.39) より、 $r_1 = 0$ でないところで、 $\Delta U(x, y, z) = 0$ ならば、

$$\Delta_1 \left\{ \frac{1}{r_1} U(x, y, z) \right\} = \Delta_1 \left\{ \frac{1}{r_1} U(x_1/r_1^2, y_1/r_1^2, z_1/r_1^2) \right\} = 0 \quad (3.40)$$

が得られる。これは、3次元調和関数 U において、自変数を反転し、その関数に $\frac{1}{r_1}$ を掛けることで新しい調和関数が作られることを示している。この操作をケルビン変換と呼ぶ。

問題：原点においた双極子によるポテンシャル $U = \frac{\lambda x + \mu y + \nu z}{r^3}$ にケルビン変換をすると何が得られるか。

回答：無限遠でのこのポテンシャルの振る舞いを調べるわけであるが、ケルビン変換を施したポテンシャルを $V(x_1, y_1, z_1)$ とすると

$$V(x_1, y_1, z_1) = \frac{1}{r_1} U \left(\frac{x_1}{r_1^2}, \frac{y_1}{r_1^2}, \frac{z_1}{r_1^2} \right) = \lambda x_1 + \mu y_1 + \nu z_1$$

となる。無限遠での様子を原点で見たことになるが、これは無限遠における双極子である。

球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ の外側で関数 $U(x, y, z)$ が調和であるとする。 $U(x, y, z)$ にケルビン変換をほどこして

$$V(x_1, y_1, z_1) = \frac{1}{r_1} U \left(\frac{x_1}{r_1^2}, \frac{y_1}{r_1^2}, \frac{z_1}{r_1^2} \right)$$

とおくと、 $V(x_1, y_1, z_1)$ は原点を除いた $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 1/R^2$ の内部で調和となる。そしてもし $V(x_1, y_1, z_1)$ が原点の近傍で有界であれば、調和関数の基本的な性質から $V(x_1, y_1, z_1)$ は原点においても調和となる。このことは、 (x, y, z) についていえば、 rU は無限遠で有界であることを示している。そこで、無限遠で関数が調和であるということを次の2つの条件で定義している。

- 1) R を適当に大きくとった球 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ の外側のすべての有限な点で U は調和である。
- 2) $r \rightarrow \infty$ のとき rU は有界である。

2次元の場合：2次元の場合も結果だけを書いておく。(3.39) に相当するものとして

$$\Delta_1 U = r^4 \Delta U \quad (3.41)$$

が得られる。 $r_1 = 0$ でないところで、 $\Delta U(x, y, z) = 0$ ならば、

$$\Delta_1 U(x, y) = \Delta_1 U(x_1/r_1^2, y_1/r_1^2) = 0 \quad (3.42)$$

となり、 U が調和であれば、その自変数を単に反転したものでおきかえれば新しい調和関数が得られる。3次元の場合より事情は簡単となっている。

2次元の場合も、無限遠で関数が調和であるということを次の2つの条件で定義している。

- 1) R を適当に大きくとった円 $x^2 + y^2 = R^2$ の外側のすべての有限な点で U は調和である。
- 2) $r \rightarrow \infty$ のとき U が有界であるならば、関数 U は (x_1, y_1) の原点で調和である。

♣ Q&A

- K氏：以上だ。最後の数学的な議論は少しはしょったがね。

¹⁴ここでは導出過程をやりません。詳しく知りたい方はネタ本を参照ください。

- アリス：調和関数，*harmonic function* というのはラプラスの方程式 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$ を満たす関数 $\phi(x, y, z)$ のことね。量子力学では，随分悩まされたけど，ラプラス方程式を球座標 (r, θ, ϕ) に変換し， $u(r, \theta, \phi) = R(r)Y(\theta, \phi)$ と変数分離して解いていったわね。この $Y(\theta, \phi)$ は当たり前だけどラプラスの方程式を満たすので球面調和関数と呼んでいたわ。確かに動径 $r = 1$ としたときの球の角度部分だけの関数だから球面か，と名前に妙に納得したものよ。そして球面調和関数が角運動量と密接に関係している。。。
- K氏：そうだね。量子力学を勉強しはじめると，まず水素原子のシュレーディンガー方程式がでてくるわけだけど，それを解く時，球面調和関数が顔をだす。慣れないうちはそのややこしさがプレッシャーとなっていやになっちゃう、、という経験はご多聞にもれず僕もしている (笑)。
- アリス：無限遠での振り舞いを手元で調べられるようにするケルビン変換というのは面白いわね。高倍率な望遠鏡で無限遠方を見ているよね。ところで最後の方は少し数学的な議論になったと思うけど，今のお話とは直接関係はないのだけど，よくこの関数は解析的であるとか，解析的な関数とかいうことを聞くんだけど，解析的とはどういう意味合いで使われているの？
- K氏：うん，例えば関数がある近傍において，その自変数で冪級数で展開が可能な時，それを解析的とか正則というように言っているね。
- アリス：そういうことなんだ。解析とはミクロに物事を見ていくという感じね。アラ！もう日がとっぷりと暮れたようね。そろそろお暇しなくっちゃ。今日はいろいろなことが聞いて本当によかったわ。しっかりノートもとったし，また読み返してみることにするわ。
- K氏：結構ミスって書いているところもあると思うので，それを見つけたらご自分で修正してね。コンピューター科学で著名な F.P Brooks じゃないけど，No Silver Bullet だからね。折角だから晩飯でも一緒にできればいいんだけど，生憎きょうはこれから野暮用があつてね。またの機会としよう。
- アリス：相変わらずご多忙なのね。それじゃ私はこれで失礼するわ。今日は本当にありがとう，またよろしくお願いします。
- K氏：うん，それじゃ夜道に気を付けてね。

(了)