

# 数学 Tips

～分岐点とリーマン面～

KENZOU

2008年7月6日

♣ K氏がPCに向かってせっせとキーボードを叩いているとき、突然ドアがロックされた。と同時に「コンニチワ～」と透き通るような大きな声が響いた。K氏がドアを開けるとキャサリンとコニーが立っていた。

- K氏：いやぁ～、コンニチワ。今日はお二人揃ってどうしたんだい。
- キャサリン：はい、実はコニーから、Kさんがこの前の「解析接続」のお話の続きとして「分岐点とリーマン面」のお話をしてくださるということを聞いたので、朝も早いけど、こうして押しかけてきたの、いいかしら。
- コニー：キャサリンも一緒に行きたいというものだから連れてきたのだけど、なにか机に向かって仕事なさっていたよね。都合がわるかったらまた別の日にお伺いするけど。
- K氏：no problem, 歓迎するよ。朝早くからご苦労さんだね。この前の「解析接続」の話では、ついついリキが入って、本丸に迫るまでの話が長くなってしまった。僕の思い違いやミスもあるかも知れないし、まっ、見つけたら一報欲しいけど、その辺は適切にフォローしていただくとして、今日も朝早くからわざわざ来てくれたんだ。この前約束していた「分岐点とリーマン面」の話をしようか。
- キャサリン：楽しみだわ。
- コニー：複素関数論のテキストを見ると、リーマン面では葉とか枝とかいう言葉がでてくるけど、面白いネーミングね。
- K氏：そうだね。なにか繊細なセンスを感じるね。さてと、それじゃはじめるかな。
- (2人そろって) よろしくお願いま～す。

## 1 分岐点

関数  $w = f(z)$  において、 $z$  の 1 つの値に対し複数个の  $w$  の値が存在する場合、 $w$  を  $z$  の多価関数とよぶ。例えば、べき乗関数  $w = (z - z_0)^b$  ( $b \neq$  整数) や対数関数  $w = \log(z - z_0)$  は、 $z = z_0$  のまわりを  $2\pi$  回ってもとの点に戻っても関数値がもとの値に戻らない 2 価関数である。また、点  $z = z_0$  をその関数の分岐点と呼んでいる。早速具体的な例をみていこう。

$$w = z^{1/2}$$

$z = re^{i\theta}$  と極形式で表し、偏角  $\theta$  を原点 ( $z = 0$ ) の周りに  $0$  から  $2\pi$  までの一周と  $0$  から  $4\pi$  まで 2 周変化させた場合の関数値の変化は次のようになる。

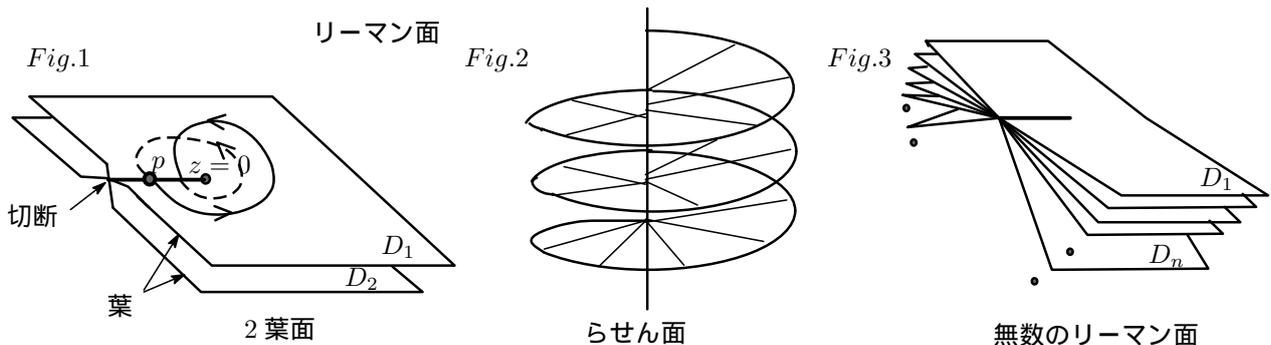
$\theta$	$0$	$\rightarrow$	$\theta$	$\rightarrow$	$2\pi$	$\rightarrow$	$4\pi$
$z$	$\sqrt{r}$	$\rightarrow$	$\sqrt{r}e^{i\theta}$	$\rightarrow$	$\sqrt{r}e^{i2\pi} = \sqrt{r}$	$\rightarrow$	$\sqrt{r}e^{i4\pi} = \sqrt{r}$
$w$	$\sqrt{r}$	$\rightarrow$	$\sqrt{r}e^{i\theta/2}$	$\rightarrow$	$\sqrt{r}e^{i\pi} = -\sqrt{r}$	$\rightarrow$	$\sqrt{r}e^{i2\pi} = \sqrt{r}$

複素変数  $z$  は、偏角  $\theta$  が一周して  $2\pi$  になるとはじめの点に戻るが、 $w$  の方は、はじめの値に戻らない。つまり、複素関数  $w$  は 2 価関数であることがわかる。これを整理すると次のように書ける (尚、(1.1) の  $z \in D_1$  等の意

味はこの後すぐ分かる)。

$$w = z^{1/2} = \begin{cases} \sqrt{r} e^{i\theta/2} = w_0 & (z \in D_1) \\ \sqrt{r} e^{i(\theta/2+\pi)} = -\sqrt{r} e^{i\theta/2} = -w_0 & (z \in D_2) \end{cases} \quad (1.1)$$

そして、いまの場合、 $z = 0$  を関数  $w = z^{1/2}$  の分岐点<sup>1</sup>という。先ほどの表をみると、原点を1回まわると  $w$  は  $-w_0$  に移り変わり、2回まわるとともに戻った。そこで  $\theta$  の範囲を  $[0, 2\pi]$  でなく、 $[0, 4\pi]$  までの範囲と考えると  $z$  と  $w$  の対応が1対1となって1価関数が得られる。ただし、そのためには、 $\arg(\theta) = \theta$  のときの  $z$  と  $\arg(z) = \theta + 2\pi$  のときの  $z$  を異なる複素数として区別する必要がある。つまり、 $0 < \arg(z) \leq 2\pi$  に対応する  $z$  平面と  $2\pi < \arg(z) \leq 4\pi$  に対応する2つの  $z$  平面 ( $D_1, D_2$ ) を考える必要がある。そして2つの平面は切断(截線)のところで繋がっている。この平面をリーマン面という。いまの場合、2つの複素平面があるので2葉リーマン面という。そしてリーマン面を作る  $z$  平面が有限枚である場合の分岐点を代数的分岐点という。偏角の変化と共にリーマン面上を点  $z$  はどのように動いていくのかを見てみよう。



(切断：分岐点  $z = 0$  と無限遠点  $z = \infty$  間の切込み)

2階にある  $D_1$  面上の点  $p$  からスタートして分岐点  $z = 0$  の回りをぐるっと1周すると、ちょうど2階の  $D_1$  面の真下の階  $D_2$  面に至る(分岐する)。さらにもう1回一周すると今度は  $D_2$  面からもとの2階の  $D_1$  面へ戻ってくる。つまり1階に対応する  $z$  平面(リーマン面)と2階にある  $z$  平面(リーマン面)を便宜的に考えることで、この関数を1価関数に直していることになる。

$$w = z^{1/n}$$

$$z = r e^{i\theta} \quad (0 \leq \theta < 2\pi) \text{ において、べき関数の定義式}$$

$$z^b = e^{b \log z}$$

を使うと、 $w$  は

$$w = z^{1/n} = e^{\frac{1}{n} \log z} = e^{\frac{1}{n} \{\log r + i(\theta + 2m\pi)\}} = \begin{cases} r^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\theta}{n}} & m = 0 \\ r^{\frac{1}{n}} e^{i(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n})} & m = 1 \\ r^{\frac{1}{n}} e^{i(\frac{\theta}{n} + \frac{4\pi}{n})} & m = 2 \\ \vdots & \vdots \\ r^{\frac{1}{n}} e^{i(\frac{\theta}{n} + \frac{2(n-1)\pi}{n})} & m = n - 1 \end{cases} \quad (1.2)$$

と書ける。つまり、関数  $w$  は、複素平面上で  $z = 0$  のまわりに  $n$  回まわってはじめてもとの値に戻る  $n$  価関数となる。これを1価関数に見直すには  $n$  葉のリーマン面が必要となる。言い換えると、「一般に、通常の複素平面上での  $n$  価関数は、 $n$  葉のリーマン面上で1価関数とみなせる」ということになる。

$$w = \log z$$

$$z = r e^{i\theta} \quad (0 \leq \theta < 2\pi) \text{ とおくと}$$

$$w = \log r + i(\theta + 2n\pi) \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

この場合は、分岐点  $z = 0$  のまわりを同じ向きに何回まわっても永遠にもとには戻れない。無限多価関数である。そしてこのような分岐点を対数的分岐点という。この関数を1価関数で表したい場合には、 $\theta$  と  $\theta \pm 2\pi, \theta \pm 4\pi$

<sup>1</sup> 原点をまわる時、無限遠点をまたぐと、その都度、値が移るから無限遠点も分岐点である。

などの点を分けて考えればよい。そのためには Fig.2 のようならせん状グラフを考えて、 $\theta$  と  $\theta + 2\pi$  とは 1 ピッチ異なるようにする。あるいは、Fig.3 のように葉を無限に増やした無数のリーマン面を考えることもできる。

### 1.1 分岐点をもつ関数の定積分

分岐点を持つ関数の積分

$$I = \int_0^{\infty} x^{b-1} f(x) dx \quad (b \neq \text{整数}) \quad (1.3)$$

を考えよう。この積分が発散しない条件については、いまのところ目をつぶっておく<sup>2</sup>。一般論はやめて関数  $f(x)$  に

$$f(z) = \frac{1}{z+1} \quad (1.4)$$

をとりあげよう。例によって閉曲線経路の複素積分に置き換え、留数の定理を使っていく。

$$I = \oint_C z^{b-1} f(z) dz \quad (1.5)$$

(1.5) の被積分関数は  $z$  のべき乗がかかっているので、 $z = 0$  に分岐点を持つ。そこで複素  $z$  平面に切断を入れて  $z$  の偏角の範囲を次のように制限する (Fig.4 参照)。

$$0 \leq \arg(z) < 2\pi \quad (1.6)$$

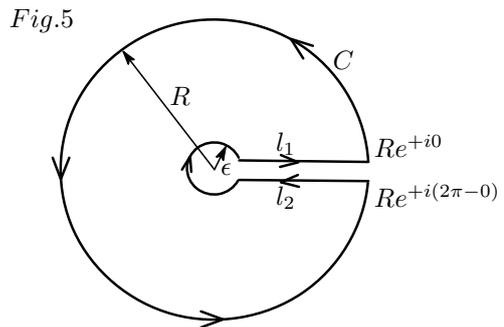
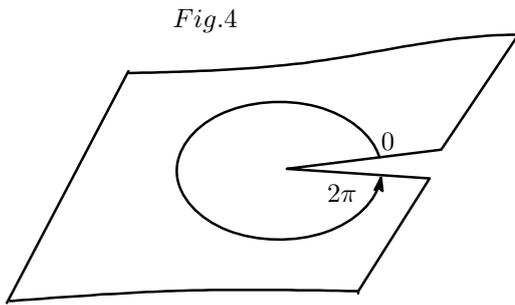
閉曲線積分経路として Fig.5 の  $C$  を考える。外側の円は半径  $R$  の円で、最後に  $R \rightarrow \infty$  をとる。内側の円は半径  $\epsilon$  で最後に  $\epsilon \rightarrow 0$  をとる。留数の定理により

$$\oint_C z^{b-1} f(z) dz = 2\pi i \sum (z^{b-1} f(z) \text{ の留数}) \quad (1.7)$$

(1.7) の左辺は

$$\oint_C z^{b-1} f(z) dz = I_{\text{上直線}} + I_{\text{下直線}} + I_{\text{大円}} + I_{\text{小円}} \quad (1.8)$$

に分解できる。



実軸の直上 (経路  $l_1$ ) では  $\arg(z) = +0$  であるから、 $z = xe^{i0} = x$ 、また実軸の直下 (経路  $l_2$ ) は、偏角  $\arg(z) = 2\pi - 0$  をもつので  $z = xe^{2\pi i}$  と表される。これから積分  $I_{\text{上直線}}$  と  $I_{\text{下直線}}$  は次のようになる。

$$I_{\text{上直線}} = \int_{\epsilon}^R z^{b-1} f(z) dz = \int_{\epsilon}^R x^{b-1} f(x) dx \quad (1.9)$$

$$I_{\text{下直線}} = \int_R^{\epsilon} z^{b-1} f(z) dz = \int_R^{\epsilon} (xe^{2\pi i})^{b-1} f(xe^{2\pi i}) dx e^{2\pi i} = -e^{2\pi i b} \int_{\epsilon}^R x^{b-1} f(x) dx \quad (1.10)$$

ここで (1.10) の被積分関数で  $(xe^{2\pi i})^{b-1} = x^{b-1}$  と置けないことに注意しよう。この項は 2 価関数であるべき乗関数の変形になっている、つまり分岐点回りに 1 周して値が異なった！一方、 $f(z)$  の方は、べき乗を含まないから  $xe^{2\pi i} = x$  とおける。ここで  $R \rightarrow \infty$ 、 $\epsilon \rightarrow 0$  の極限をとると (1.3) を使って

$$I_{\text{下直線}} = -e^{2\pi i b} I \quad (1.11)$$

<sup>2</sup> 結論を先にいうと  $0 < b < 1$  が積分の収束条件となる

が得られる。次に大円，小円の積分を計算しよう。半径  $R$  の大円上の積分は  $z = Re^{i\theta}$  において

$$I_{\text{大円}} = \int_0^{2\pi} \frac{z^{b-1}}{z+1} dz = \int_0^{2\pi} \frac{(Re^{i\theta})^{b-1}}{Re^{i\theta}+1} iRe^{i\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{iR^b e^{ib\theta}}{Re^{i\theta}+1} d\theta \quad (1.12)$$

となる。この被積分関数の  $R \rightarrow \infty$  の極限をとると，不定形の形になっているからロピタルの定理を使って

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{R^b e^{ib\theta}}{Re^{i\theta}+1} = \lim_{R \rightarrow \infty} bR^{b-1} e^{i\theta(b-1)} = 0 \quad (b < 1)$$

また，小円の方は， $z = \epsilon e^{i\theta}$  において， $\epsilon \rightarrow 0$  の極限をとれば（この場合はロピタルの定理が使えないが， $\epsilon \rightarrow 0$  で関数の分母が限りなく 1 に近づくことを利用する）

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\epsilon^b e^{ib\theta}}{\epsilon e^{i\theta}+1} \approx \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^b e^{ib\theta} = 0 \quad (b > 0)$$

となるので，大円，小円は  $b$  の値が  $(0 < b < 1)$  の範囲の場合ゼロとなる。これが最初目をつぶった積分の収束条件である。ということで (1.8) は

$$I = \oint_C z^{b-1} f(z) dz = I_{\text{上直線}} + I_{\text{下直線}} = \int_{\epsilon}^R x^{b-1} f(x) dx - e^{2\pi b i} I$$

となり，整理すると

$$I = \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi b i}} \sum (z^{b-1} f(z) \text{ の留数}) \quad (1.13)$$

が得られる。いま，考えている関数  $f(z) = 1/(z+1)$  は  $z = -1$  に 1 位の極を持つ。その偏角は (1.6) で範囲を規制されているから，極は  $z = e^{\pi i}$  にある。したがって  $z^{b-1} f(z)$  の留数は

$$\text{Res}(e^{\pi i}) = (e^{\pi i})^{b-1} = -e^{\pi i b} \quad (1.14)$$

と得られる<sup>3</sup>。したがって求める積分値は (1.13) より

$$I = \frac{-2\pi i e^{\pi b i}}{1 - e^{2\pi b i}} = \frac{-2\pi i}{e^{-\pi b i} - e^{\pi b i}} = \frac{\pi}{\sin(\pi b)} \quad (1.15)$$

補題：上の問題で偏角の範囲を  $-2\pi < \arg(z) \leq 0$  と変更するとどうなるか。

答：実軸の直上では  $\arg(z) = -2\pi + 0$ ，直下では  $\arg(z) = 0$  であるから

$$I_{\text{上直線}} = \int_{\epsilon}^R z^{b-1} f(z) dz = \int_{\epsilon}^R (xe^{-2\pi i})^{b-1} f(x) dx \rightarrow e^{-2\pi i b} I \quad (1.16)$$

$$I_{\text{下直線}} = \int_R^{\epsilon} z^{b-1} f(z) dz = \int_R^{\epsilon} x^{b-1} f(x) dx \rightarrow -I \quad (1.17)$$

いま，考えている関数の極は偏角範囲の規定により  $z = -1 = e^{-\pi i}$ 。大円，小円に沿った積分は消えるから

$$I = \frac{2\pi i}{e^{-2\pi i b} - 1} \sum (z^{b-1} f(z) \text{ の留数}) = \frac{2\pi i}{e^{-2\pi i b} - 1} (e^{-\pi i})^{b-1} = \frac{\pi}{\sin(\pi b)}$$

となって，結果は変わらない。

例題：次の定積分を計算せよ。

$$(1) \int_0^{\infty} \frac{x^{b-1}}{x-i} dx \quad (0 < b < 1)$$

$$(2) \int_0^{\infty} \frac{x^b}{(x+1)^2} dx \quad (-1 < b < 1)$$

$$(3) \int_0^{\infty} \frac{x^{b-1}}{x^a+1} dx \quad (0 < b < a)$$

<sup>3</sup> この留数計算で  $\lim_{z \rightarrow -1} (z+1)z^{b-1} \frac{1}{1+z}$  とやらないこと。多価関数の場合，偏角が曲者で， $z \rightarrow -1$  では偏角のことが考えられていないことになるから。

$$(4) \int_0^{\infty} \frac{x^2}{x^4 + 1} dx$$

答：(1)  $z = 0$  に分岐点をもつ関数の積分を考える。偏角は  $0 \leq \arg(z) < 2\pi$  に制限する。 $f(z) = 1/(z - i)$  とおいて与式を複素積分に変え、Fig.5 の経路  $C$  をとると、留数の定理より

$$\begin{aligned} I &= \oint_C z^{b-1} f(z) dz = I_{\text{上直線}} + I_{\text{下直線}} + I_{\text{大円}} + I_{\text{小円}} \\ &= 2\pi i \sum (z^{b-1} f(z) \text{ の留数}) \end{aligned}$$

$I_{\text{大円}}, I_{\text{小円}}$  は次のようになる。

$$I_{\text{大円}} = \int_0^{2\pi} \frac{(Re^{i\theta})^{b-1}}{Re^{i\theta} - i} iRe^{i\theta} d\theta, \quad I_{\text{小円}} = \int_{2\pi}^0 \frac{(\epsilon e^{i\theta})^{b-1}}{\epsilon e^{i\theta} - i} i\epsilon e^{i\theta} d\theta$$

ここで、 $R \rightarrow \infty, \epsilon \rightarrow 0$  の極限をとると上の場合と同様にして  $I_{\text{大円}} \rightarrow 0, I_{\text{小円}} \rightarrow 0$  ( $0 < b < 1$ ) となることがわかる。次に  $I_{\text{上直線}}$  は  $\arg(z) = 0$  であるから、 $z = xe^{i0} = x$  となって

$$I_{\text{上直線}} = \int_{\epsilon}^R x^{b-1} f(x) dx$$

一方、 $I_{\text{下直線}}$  の方は、実軸直下の複素数  $z$  は偏角  $\arg(z) = 2\pi - 0$  をもち、 $z = xe^{2\pi i}$  と表されるから

$$I_{\text{下直線}} = \int_R^{\epsilon} (xe^{2\pi i})^{b-1} f(x) dx e^{2\pi i} = -e^{2\pi i b} \int_{\epsilon}^R x^{b-1} f(x) dx$$

ここで  $R \rightarrow \infty, \epsilon \rightarrow 0$  の極限をとると

$$I_{\text{上直線}} = I, I_{\text{下直線}} = -e^{2\pi i b} I$$

となるので、結局

$$I = \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi i b}} \sum (z^{b-1} f(z) \text{ の留数})$$

となる。いま、考えている関数は  $z = i$  に極を持ち、極形式に直すと  $z = e^{i\pi/2}$  となり、留数の値は

$$\text{Res}(e^{i\pi/2}) = (e^{i\pi/2})^{b-1} = -e^{i\pi b/2}$$

したがって

$$I = -\frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi i b}} e^{i\pi b/2} = -\frac{2\pi i}{e^{-\pi i b} - e^{\pi i b}} e^{-i\pi b/2} = \frac{\pi i}{\sin(\pi b)} e^{-i\pi b/2}$$

(2) 偏角は  $0 \leq \arg(z) < 2\pi$  に制限する。

$$\begin{aligned} I_{\text{大円}} &= \int_0^{2\pi} \frac{(Re^{i\theta})^b}{(Re^{i\theta} + 1)^2} iRe^{i\theta} d\theta \\ I_{\text{小円}} &= \int_{2\pi}^0 \frac{(\epsilon e^{i\theta})^b}{(\epsilon e^{i\theta} + 1)^2} i\epsilon e^{i\theta} d\theta \end{aligned}$$

$R \rightarrow \infty, \epsilon \rightarrow 0$  の極限をとると

$$\begin{aligned} I_{\text{大円}}: \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{(Re^{i\theta})^b}{(Re^{i\theta} + 1)^2} iRe^{i\theta} &\approx \lim_{R \rightarrow \infty} bR^{b-1} = 0 \quad (b < 1) \\ I_{\text{小円}}: \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{(\epsilon e^{i\theta})^b}{(Re^{i\theta} + 1)^2} i\epsilon e^{i\theta} &\approx \lim_{R \rightarrow \infty} \epsilon^{b+1} = 0 \quad (-1 < b) \end{aligned}$$

積分の収束条件は  $(-1 < b < 1)$ 。極は  $z = -1 = e^{\pi i}$  で 2 位の極。したがって留数値<sup>4</sup>は

$$\text{Res}(e^{\pi i}) = b(e^{\pi i})^{b-1}$$

<sup>4</sup>  $f(z) = F(z)/(z - a)^k$  の留数値は  $\text{Res}(a) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} [(z - a)^k f(z)]$

したがって

$$I = \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi i b}} b(e^{\pi i})^{b-1} = \frac{\pi b}{\sin(\pi b)}$$

(3)  $x^a = y$  とおく。

$$bx^{b-1}dx = d(x^b) = d(y^{b/a}) = (b/a)y^{b/a-1}dy$$

となるので、与式の積分は

$$\int_0^\infty \frac{x^{b-1}}{x^a + 1} dx = \frac{1}{a} \int_0^\infty y^{(b/a-1)} \frac{1}{1+y} dy = \frac{1}{a} \int_0^\infty y^{\gamma-1} \frac{1}{1+y} dy \quad (\gamma = b/a)$$

この積分はセクション 1.1 で既にやった。その結果は  $\pi/\sin \pi b$  であったので、 $b \rightarrow b/a$  に置き換える。積分の収束条件は  $0 < b < 1$  であったの、今回は  $0 < b/a < 1$ 、つまり  $0 < b < a$  となる。求める答えは

$$I = \frac{1}{a \sin(\pi b/a)}$$

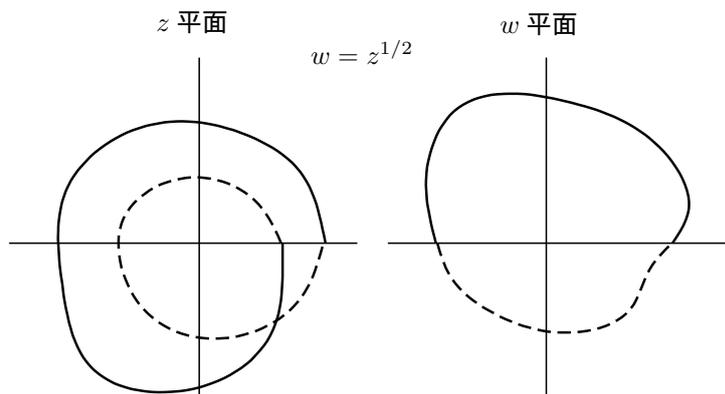
(4) 上の結果で  $a = 4, b = 3$  とおくと

$$I = \frac{\pi}{4 \sin(3\pi/4)} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

## 2 リーマン面

リーマン面は分岐点のところの説明したが、もう一度復習しておこう。 $w = z^{1/2}$  というべき乗関数は偏角  $\theta$  が 0 から複素平面の原点周りに 2 周して  $4\pi$  になったときに  $w$  ははじめて元の値に戻った。つまり、変数  $z$  は原点周りに 2 周するが、 $w$  の方はそれに対応して原点周りに 1 周する。したがって、関数  $w$  を 1 価関数としたければ、 $\theta$  の範囲を  $[0, 2\pi]$  ではなく  $[0, 4\pi]$  とすればよいことがわかる。しかし、そのためには  $\arg(z) = \theta$  のときの  $z$  と  $\arg(z) = \theta + 2\pi$  のときの  $z$  を異なる複素数として区別しなければならない。そこで考え出されたのが、リーマン面というものであった(復習終わり)。

Fig.6



ここでは、リーマン面の構造を例をあげて見ていくことにする。

### 2.1 リーマン面の構造

- 1)  $w = \sqrt{z-a}$  のリーマン面  
 $z-a$  をあらためて変数  $t$  とおけば、 $w = t^{1/2}$  となる。これは Fig.1 の構造のリーマン面となる。ただし、 $z = a$  点と無限遠点との間を切断したものとなる。

- 2)  $w = \sqrt{z^2 - 1}$  のリーマン面  
 $w$  は分岐点が  $z = 1, -1$  の関数<sup>5</sup>。Fig.7 で点  $z$  は

$$z + 1 = r_1 e^{i\theta_1}, \quad z - 1 = r_2 e^{i\theta_2}$$

と表せる。したがって  $z^2 - 1$  の偏角は

$$\arg(z^2 - 1) = \theta_1 + \theta_2 \quad (2.1)$$

となり，偏角  $0 \leq \theta_1, \theta_2 < 2\pi$  で

$$w = \sqrt{r_1 r_2} e^{\frac{i}{2}(\theta_1 + \theta_2)} \quad (2.2)$$

となる。いま， $z$  が Fig.8 の経路  $C$  で，実軸上の点  $1$  と点  $-1$  の両方を囲むように一回りすると， $\theta_1, \theta_2$  はどちらも  $\theta_1, \theta_2 = 0 \rightarrow 2\pi$  と変化するので， $z^2 - 1$  の偏角は

$$\begin{cases} \theta_1, \theta_2 = 0 \rightarrow 2\pi \\ \arg(z^2 - 1) = 0 \rightarrow 4\pi \end{cases}$$

と変化して， $w$  の値は元に戻る ( $w \rightarrow w_1 = w$ )。この場合は， $z$  は一葉のリーマン面上だけを動く。一方， $z$  が経路  $C'$  で，点  $1$  のまわりを  $1$  回りすると， $\theta_1$  はもとの値に戻るが， $\theta_2$  だけは  $2\pi$  増加する (Fig.9)。その結果， $\arg(z^2 - 1)$  は  $2\pi$  増えて，関数値はもとの値に戻らない ( $w \rightarrow w_2 \neq w$ )。これに対応して， $z$  は他のリーマン葉に移っている。 $w_1, w_2$  の関数は次のようになる。

$$w = \begin{cases} w_1 = \sqrt{r_1 r_2} e^{\frac{i}{2}(\theta_1 + \theta_2)} & (z \in D_1) \\ w_2 = \sqrt{r_1 r_2} e^{\frac{i}{2}(\theta_1 + \theta_2 + 2\pi)} & (z \in D_2) \end{cases} \quad (2.3)$$

Fig.7

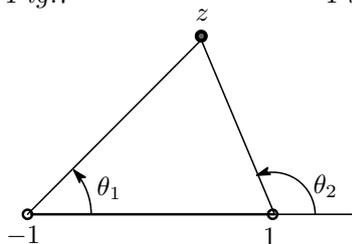


Fig.8

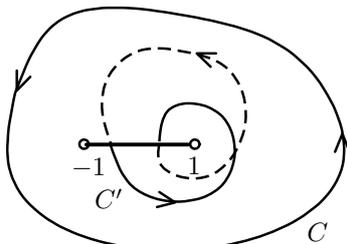
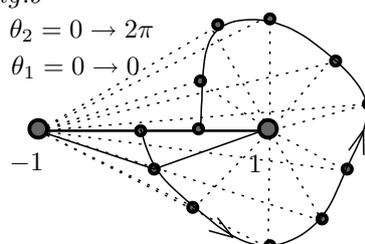
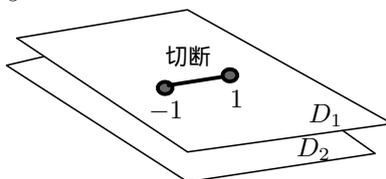


Fig.9



したがって，点  $z = -1$  と点  $z = 1$  を結んだ切断を形成し (Fig.10)，この切断を通過するときに  $D_1 \rightarrow D_2$  ( $D_2 \rightarrow D_1$ ) と他のリーマン面に移るようにすればよい。

Fig.10



補足：簡便法(?)

$$w = (z - 1)^{1/2} (z + 1)^{1/2}$$

を考える。 $z = 1/\eta$  と変数変換すると

$$w = \left(\frac{1}{\eta} - 1\right)^{1/2} \left(\frac{1}{\eta + 1}\right)^{1/2} = \frac{1}{\eta} (1 - \eta)^{1/2} (1 + \eta)^{1/2}$$

分母の  $\eta = 0$  は分岐点ではなく極になっている。したがって，切断は  $z = -1$  と  $z = 1$  を結ばばよい。

<sup>5</sup>  $z = \infty$  の無限遠点が分岐点でない例。

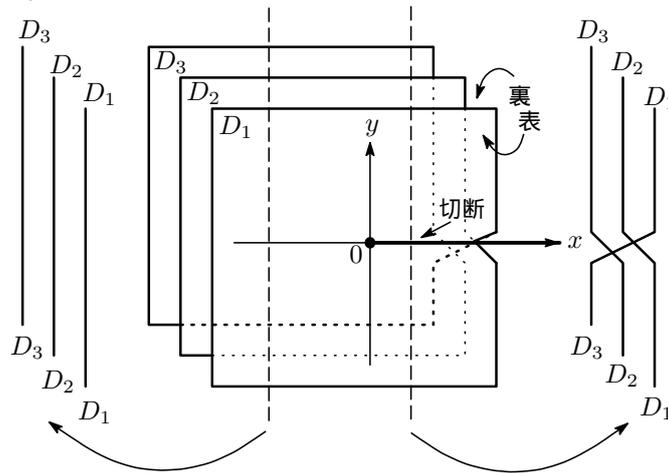
• 3)  $w = z^{1/3}$  のリーマン面

$z = r e^{i\theta}$  において,  $w = r^{1/3} e^{i\theta/3}$  ( $0 \leq \theta < 2\pi$ ). 分岐点  $z = 0$  のまわりに  $\theta$  を 0 から  $6\pi$  まで回転すると  $w$  は下表のように変化し, 3 回転目ではじめのものと関数値に戻る (3 価関数)。

$\theta$	0	→	$\theta$	→	$2\pi$	→	$4\pi$	→	$6\pi$
$z$	$\sqrt{r}$	→	$\sqrt{r}e^{i\theta}$	→	$\sqrt{r}e^{i2\pi} = \sqrt{r}$	→	$\sqrt{r}e^{i4\pi} = \sqrt{r}$	→	$\sqrt{r}e^{i6\pi} = \sqrt{r}$
$w$	$\sqrt[3]{r}$	→	$\sqrt[3]{r}e^{i\theta/3}$	→	$\sqrt[3]{r}e^{i2\pi/3}$	→	$\sqrt[3]{r}e^{i4\pi/3}$	→	$\sqrt[3]{r}e^{i2\pi} = \sqrt[3]{r}$

2 つの分岐点  $z = 0$  と  $z = \infty$  を結んだ線 (実軸上  $x \geq 0$ ) で切断を入れる<sup>6</sup>。そして  $\arg(z) = 2\pi - 0$  の部分 ( $D_1$  面の切断の裏面部分) と  $\arg(z) = 2\pi + 0$  の部分 ( $D_2$  面の切断の表面部分),  $\arg(z) = 4\pi - 0$  の部分 ( $D_1$  面の切断の裏面部分) と  $\arg(z) = 4\pi + 0$  の部分 ( $D_3$  面の切断の表面部分) を Fig.11 のようにつなぎ, 最後に  $\arg(z) = 6\pi - 0$  の部分 ( $D_3$  面の切断の裏面部分) と  $\arg(z) = 0+$  の部分 ( $D_1$  面の切断の表面部分) をつなく。これで 3 葉のリーマン面が完成し,  $z$  と  $w$  が 1 対 1 で対応できるようになる。

Fig.11



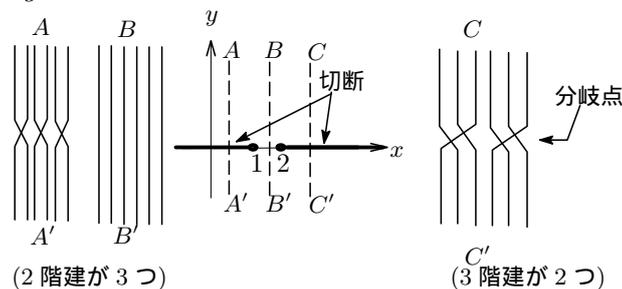
• 4)  $w = (z - 1)^{1/2}(z - 2)^{1/3}$  のリーマン面

$z = 1/\eta$  と変数変換すると

$$w = \left(\frac{1}{\eta} - 1\right)^{1/2} \left(\frac{1}{\eta} - 2\right)^{1/3} = \frac{1}{\eta^{5/6}}(1 - \eta)^{1/2}(1 - 2\eta)^{1/3}$$

したがって分岐点は,  $z = 1, 2$  となるが, 加えて, 分母が  $\eta^{5/6}$  とべき乗になっているので,  $\eta = 0$  すなわち  $z = \infty$  (無限遠点) も分岐点となる。そして  $\eta = 0$  ( $z = \infty$ ) のまわりでは 6 回まわってはじめてもとに関数値に戻る。整理すると,  $z = 1$  のまわりでは 2 回まわると元に戻る,  $z = 2$  のまわりでは 3 回まわると元に戻る。  $z = \infty$  のまわりでは 6 回まわってはじめてもとに戻る。このリーマン面は次のようになる (断面を描く)。

Fig.12



<sup>6</sup> ここから切り紙細工の世界に入ります。現実にはこのような切り紙細工は不可能ですが, そこは想像力を逞しく!

- K氏：以上が、分岐点とリーマン面のお話だけどいかな？
- コニー：う～ん、複素べき関数というのが曲者ね。例えば  $w = z^{1/2}$  という 2 価関数の場合、一回りしてもとの場所に戻るとしたら、違う場所に移っている。またもう 1 回まわるとやっともとの場所に戻れた。 $w = z^{1/n}$  という  $n$  価関数になると、 $n$  回まわらなければもとに戻れない。これはまさに偏角  $\theta$  がなせる業というところね。
- キャサリン：そうね、コニーが言うように、偏角周期という名前が有るのかないのか知らないけど、そういうものを考えて、多価を 1 価に焼きなおしていく、うまく考えたものね。2 葉リーマン面まではなんとなくフォローできそうだけど、3 葉以上になると例の切り紙細工は頭に一杯汗かくわね（笑い）。
- K氏：たしかに。切り紙細工に興味のない人はイライラするだろうね。しかし、まあ、偉そうなことを言うようだけど、リーマン面の勉強をするからには我慢してそこを強行突破しなけりゃならない。苦労すよるよね。余談になるけど、リーマン面というの 19 世紀を代表するドイツの数学者 Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826.9.17-1866.7.20) が考えた。コーシー・リーマン方程式を始め、リーマン積分、リーマン幾何等々で有名で、その名前はもちろんよく知っていると思うけど。滅多に人を褒めないガウスがリーマンの学位論文の発表を聞いてリーマンを大絶賛した、という話を昔数学の先生に聞いたことがある（もっといろいろ面白いことをいわれていたけど忘れちゃった）。非ユークリッド幾何学といわれるリーマン幾何は一般相対性理論の骨格をなしているね。しかしこの天才数学者も 39 才という若さで結核で夭折しているんだ。少し格調高い話になるけど、高名な Hermann Wyle の「空間・時間・物質」という本の名前は聞いたことがあると思うけど、Wyle の「リーマン面」という著書でてくる言葉らしいんだけど、「リーマン面は 1 変数解析関数の母なる大地、その上にこそはじめて諸関数が生育し繁茂しうる大地とみなされなければならない」と書いているとのことだ。
- キャサリン：凄い表現ね。ところで話は飛ぶけど、以前、友達から「 $i$  の  $i$  乗はいくらになると思う」と問われて即答に困っちゃったわ。結局、この問題は友達と別れてすぐ調べたの。オイラーの公式  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$  より  $\theta = \pi/2$  とすると  $i = e^{i\pi/2}$  が得られる。 $i$  の自然対数をとると  $\log i = \log e^{\log i}$  と書けるので、この式の両辺に  $i$  をかけ、それから  $\log$  をはずすと  $i^i = e^{i \log i}$  となる。 $\log i = \log e^{i(\pi/2+2n\pi)} = i(\pi/2+2n\pi)$  だから、結局  $i^i = e^{-\pi/2+2n\pi} = e^{-\pi/2} = 0.20782\dots$  となるわけね。
- コニー：なるほどね。 $i$  の  $i$  乗というのは私も以前何かの本で読んだことがあるけど、 $i$  の  $i$  乗が実数になるってところが面白いわね。ところで、 $i$  の  $i$  乗は先ほどキャサリンが書いた式なるわけで、複素数のべき乗、例えば  $z^b$  というのは単に複素数  $z$  の  $b$  乗という狭い枠よりもっと大きな枠があるのかしら。
- K氏：そうだね、普段何気なく使っているべき乗だけど、例えば  $z^{1/2}$  なんて直感的にどう把握したらよいか分かんないよね。べき乗の定義の詳しいことは数学のテキストを見ていただくとして、最初にも触れたけど複素数のべき乗は次のように定義されている。

$$z^b = e^{b \log z} \quad (2.4)$$

$b$  は実数でも複素数でもいい。 $b$  が  $i$  の場合は、先ほどのキャサリンの問題につながるよね。

- キャサリン：う～ん、確かに両辺の対数をとると等号が成り立つことが分かるわね。いずれにしても、そのようにキチンと定義されるということで、計算はいままで通りのルールでやっていけばいいのね。
- K氏：そうなんだ。ところでべき乗の定義で対数関数が顔をだしているけど、対数関数は無限回クルクルまわっても元に戻らないという無限多価関数だったね。例えば  $w = z^b$  というべき乗関数が多価関数になるというのは、実はこの辺に由来しているんだ。
- CN：そうなの、その由来をもう少し詳しく話していただける。

- K氏：うん， $z = re^{i\theta}$  と極形式で表し偏角  $\theta$  は一般化すると

$$w = z^b = e^{b \log z} = e^{b(\log r + i(\theta + 2n\pi))} = e^{i2n\pi b} e^{b(\log r + i\theta)}$$

と書けるよね。ここで  $e^{i2n\pi b}$  の項に注目すると， $b$  が整数なら  $e^{i2n\pi b} = 1$  となって  $w$  は 1 価関数になる。 $b$  が有理数  $p/q$  であると  $w = z^{p/q}$  となって  $w$  は  $q$  価の多価関数となる。 $b$  がそれ以外，つまり，無理数か複素数であれば  $w = e^{b \log z}$  とそのままの姿になるから， $\log z$  の影響で  $w$  は無限多価関数になる，というわけだね。ところで先ほどから腹の虫が鳴り始めてうるさいんだけど，そろそろ昼飯にしない。

- コニー：そうね，一樣ひと区切りがついたことだし，お昼にして例のレストランにいきましょうか。
- キャサリン：いきつけのレストランがあるの，是非案内して。  
～ 食事をしながら～
- キャサリン：ほぼ，今日のお話は終わったようだけど，あとなにか付け加えるようなお話があるのかしら。
- K氏：そうだね，あと多価関数の積分の話しとおまけとして無限遠点の留数の話をして終わろうかと思うんだけど。解析接続とリーマン面の話もしようかと思ったんだけど，僕自身の勉強不足は勿論，いい例題が見つからないのでその辺の話はまた別の機会に譲ろうと思うんだ。ところで，ここのカレーライスおいしいだろう。使っているスパイスがマスターご自慢らしい。また，カレーの種類が多いのも好きな人にはうれしいよね。え～っと，それじゃ昼からその辺の話をして，お開きとしようか。夕方から飲みに行く約束があるんだ。
- コニー：そうなの，それはお楽しみね。ここの食後のコーヒーも格別に美味しいから，ゆっくり寛いでいただいて，お昼からのお話をよろしく願いますわね。
- キャサリン：Kさんのコーヒー代は私が持つわ。お好みのコーヒーを注文して。
- コニー：私はティータイム用にケーキ 3 つ買っておくわ。

## 2.2 多価関数の積分にはリーマン面に留意

分岐点を持つ関数の定積分はセクション 1.1 で取り上げたが，そこでは頭にリーマン面のことについて触れなかった。ここではリーマン面を意識しなければならない積分の例を少しみていこう。

Ex.1： $z^{1/2}$  のべき乗を含む関数の積分を考える。 $f(z)$  は有理関数<sup>7</sup>としておく。

$$I = \int_{z_1(c)}^{z_2} z^{1/2} f(z) dz \quad (2.5)$$

この積分は，始点  $z_1(c)$  から終点  $z_2$  まで経路  $C$  に沿っておこなうが，点  $z_1$  と点  $z_2$  を普通の複素数の形で（実部と虚部により）指定するだけでは不十分ということになる。 $z^{1/2}$  というべき乗関数の 2 価性により，点  $z$  はリーマン面上のどの点か，偏角はいくつか，まで指定しなければ，積分の値が定まらないということになる。具体的な例として，

$$I = \int_{z_1(c)}^{z_2} z^{1/2} dz \quad (2.6)$$

を考えてみよう。始点と終点をそれぞれ  $z_1 = e^{i0} = 1$ ， $z_2 = e^{i2\pi} = 1$  とする。実関数の積分であれば，この積分値はゼロである！

$$\int_1^1 x^{1/2} dx = \left[ \frac{2}{3} x^{3/2} \right]_1^1 = 0$$

しかし，複素積分の場合は，ちゃんとした値をもつ！ $z = e^{i\theta}$  と極形式にして，偏角  $\theta$  は始点が 0，終点は  $2\pi$  であることに注意すると（積分経路は Fig.4 のリーマン面上の単位円で原点を左側に見て回る反時計回りをとる）

<sup>7</sup> 有理関数： $P(z), Q(z)$  を  $z$  の任意の多項式としたとき， $f(z) = P(z)/Q(z)$ ， $Q(z) \neq 0$  の関数のこと。

$$I = \int_0^{2\pi} e^{i\theta/2} i e^{i\theta} d\theta = \frac{2}{3} [e^{i3\theta/2}]_0^{2\pi} = -\frac{4}{3} \quad (2.7)$$

となって、ゼロにはならない！つまり、リーマン面は  $\arg(z) = 0$  と  $\arg(z) = 2\pi$  でつながっていないので、始点と終点の複素数は同じとはならない、というところがポイントである。

Ex.2: 次の定積分を考えよう。

$$\int_0^{2\pi} d\theta \frac{1}{a + \cos \theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}} \quad (a > 1) \quad (2.8)$$

$a$  を複素数  $z$  に置き換えると、積分は

$$I = \int_0^{2\pi} d\theta \frac{1}{z + \cos \theta} = \int_0^{2\pi} d\theta \frac{1}{z + \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})} = \int_0^{2\pi} d\theta \quad (2.9)$$

となり、積分はべき乗関数の積分となる。

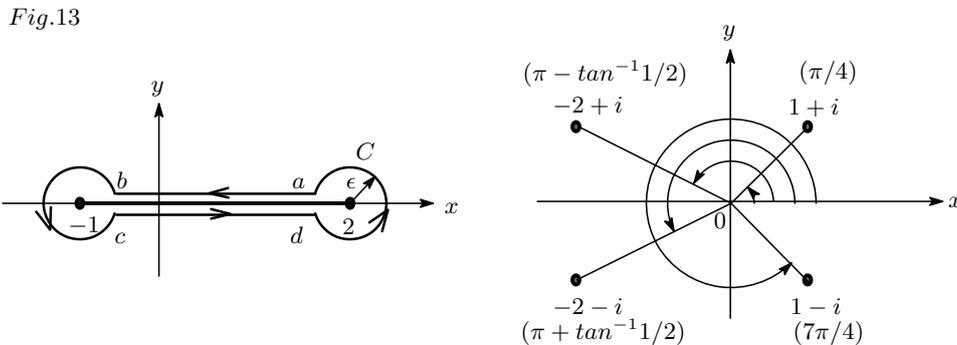
Ex.3:

$$I = \int_{-1}^2 \frac{1}{x^2 + 1} dx \quad (2.10)$$

この積分を

$$J = \oint_C \frac{1}{z^2 + 1} \log \frac{z+1}{z-2} dz \quad (2.11)$$

と関連づけて考えてみよう<sup>8</sup>。積分経路は Fig.13 の  $C$  とする。



点  $a$  と点  $b$  の間の実軸上の  $x > 0$  では  $z$  の偏角を  $\theta$  とし,  $a$  点では  $\arg(z_a - 2) = \pi$ ,  $\arg(z_a + 1) = 0$  であるとする。

$$\log \frac{z+1}{z-2} = \log(z+1) - \log(z-2)$$

であるので、切断は実軸上の  $-1 \leq x \leq 2$  の部分にある。

$$\log \frac{z+1}{z-2} = \log \left| \frac{z+1}{z-2} \right| + i \arg \frac{z+1}{z-2} \quad (2.12)$$

であるから<sup>9</sup>, 積分経路  $a \rightarrow b$ ,  $b \rightarrow c$ ,  $c \rightarrow d$ ,  $d \rightarrow a$  では次のようになる。

1.  $a \rightarrow b$  (実軸直上  $\theta = 0$ ):  $z = x$ ,  $z + 1 = x + 1$ ,  $z - 2 = x - 2 = |2 - x|e^{i\pi}$

$$\log \frac{z+1}{z-2} = \log \left| \frac{x+1}{x-2} \right| + i(0 - \pi) \quad (2.13)$$

2.  $b \rightarrow c$  ( $\theta = 0 \rightarrow 2\pi$ ):  $z = -1 + \epsilon e^{i\theta}$ ,  $z + 1 = \epsilon e^{i\theta}$ ,  $z - 2 = -3 + \epsilon e^{i\theta} \approx 3e^{i\pi}$

$$\log \frac{z+1}{z-2} = \log \left| \frac{\epsilon e^{i\theta}}{3 - \epsilon e^{i\theta}} \right| + i(\theta - \pi) \quad (2.14)$$

<sup>8</sup> この方法は、孫引きで、原典は岩波講座応用数学 3: 森正武, 杉原正顯著「複素関数論」にあるらしい。

<sup>9</sup> 本来は複素数のべき乗定義により  $\log$  と  $\ln$  を区別すべきだが面倒なので  $\log$  で統一した。

3.  $c \rightarrow d$  (実軸直下  $\theta = 2\pi$ ) :  $z = x, z + 1 = (x + 1)e^{2\pi i}, z - 2 = x - 2 = |2 - x|e^{i\pi}$

$$\log \frac{z + 1}{z - 2} = \log \left| \frac{x + 1}{x - 2} \right| + i(2\pi - \pi) \quad (2.15)$$

4.  $d \rightarrow a$  ( $\theta = \pi \rightarrow \pi + 2\pi = 3\pi$ ) :  $z = 2 + \epsilon e^{i\theta}, z + 1 = 3 + \epsilon e^{i\theta} \approx 3e^{2\pi i}, z - 2 = \epsilon e^{i\theta}$

$$\log \frac{z + 1}{z - 2} = \log \left| \frac{3 + \epsilon e^{i\theta}}{\epsilon e^{i\theta}} \right| + i(2\pi - \theta) \quad (2.16)$$

したがって, (2.11) の積分は,

$$\begin{aligned} J = & \int_{-2}^1 dx \frac{1}{x^2 + 1} \left\{ \log \left| \frac{x + 1}{x - 2} \right| - i\pi \right\} + i\epsilon \int_0^{2\pi} d\theta \frac{e^{i\theta}}{(-1 + \epsilon e^{i\theta})^2 + 1} \left\{ \left| \log \frac{\epsilon e^{i\theta}}{3 - \epsilon e^{i\theta}} \right| + i(\theta - \pi) \right\} \\ & + \int_{-1}^2 dx \frac{1}{x^2 + 1} \left\{ \log \left| \frac{x + 1}{x - 2} \right| + i\pi \right\} + i\epsilon \int_{\pi}^{3\pi} d\theta \frac{e^{i\theta}}{(2 + \epsilon e^{i\theta})^2 + 1} \left\{ \left| \log \frac{3 + \epsilon e^{i\theta}}{\epsilon e^{i\theta}} \right| + i(2\pi - \theta) \right\} \end{aligned} \quad (2.17)$$

となる。ここで  $\epsilon \rightarrow 0$  をとり,  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \log \epsilon = 0$  であることに注意すると, うまい具合に第 2 項と第 4 項は 0 となり, 第 1 項と第 3 項の  $\log$  部分は消しあって, 結局, 複素積分が実積分に結びつく

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} J = 2\pi i \int_{-1}^2 dx \frac{1}{x^2 + 1} = 2\pi i I \quad (2.18)$$

という式が得られる。(2.11) に戻って

$$J = \oint_C \frac{1}{z^2 + 1} \log \frac{z + 1}{z - 2} dz = \oint_C \frac{1}{(z + i)(z - i)} \log \frac{z + 1}{z - 2} dz \quad (2.19)$$

で, 極は  $z = \pm i$  に加えて, 無限遠点があり, 無限遠点の側から見ると  $z = \pm i$  の極は経路  $C$  に関して無限遠点と同じ側に存在するので, 無限遠点を中心に考えれば, 経路は負の向きにまわっている ことになる。留数の定理<sup>10</sup>により

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} J &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{1}{(z + i)(z - i)} \log \frac{z + 1}{z - 2} dz = -(Res(i) + Res(-i) + Res(\infty)) \\ &= - \left( \log \frac{i + 1}{i - 2} - \log \frac{-i + 1}{-i - 2} + 0 \right) \end{aligned} \quad (2.20)$$

ここで, 経路にともなう偏角のとり方に従うと (Fig.13 参照)

$$\begin{cases} 1 + i = \sqrt{2}e^{i\pi/4} \\ 1 - i = \sqrt{2}e^{i7\pi/4} \\ -2 + i = \sqrt{5}e^{i(\pi - \tan^{-1}(1/2))} \\ -2 - i = \sqrt{5}e^{i(\pi + \tan^{-1}(1/2))} \end{cases} \quad (2.21)$$

となるので, これを (2.20) に入れて整理すると

$$I = \frac{\pi}{4} + \tan^{-1} 2 \quad (2.22)$$

が得られる<sup>11</sup>。

<sup>10</sup> 無限遠点の留数の話は最後のおまけのセクション参照。

<sup>11</sup> 例にあげた積分は公式により容易に計算でき  $\int_{-1}^2 \frac{1}{1 + x^2} dx = [\tan^{-1} x]_{-1}^2 = 1.892547$  となり, 上で得られた結果と一致する。このケースではわざわざ複素積分まで持ち込まなくてもいいのだが, もっとややこしい積分の場合にこの手法が役立つ。

### 3 おまけ：無限遠点の留数

無限遠点も普通の複素数の一つとして考える。

$w = 1/z$  を考えたとき、 $z = 0$  を除いて複素  $z$  平面上の点と複素  $w$  平面上の点はすべて 1 対 1 で対応する。これを拡張して、 $w = 1/z$  によって  $z = 0$  が  $w$  平面に対応する点を無限遠点（絶対値は無限大で偏角は不定）と定義し、 $\infty$  で表して、複素  $z$  平面上の点と  $w$  平面上の点すべてが 1 対 1 に対応するようにして、無限遠点を普通の複素数の仲間に入れる。

無限遠点の留数

無限遠点  $z = \infty$  も一般の  $z$  と同じ仲間に入れたから、その留数を次のように定義する。

「関数  $f(z)$  が  $R < |z| < \infty$  で正則であるとき、すなわち無限遠点を除く複素平面上で、半径  $R$  の円の外側に特異点が存在しないとき、

$$-\frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) dz \quad (3.1)$$

を  $f(z)$  の  $z = \infty$  における留数といい、 $Res(\infty)$  とあらわす。」

ここで (3.1) にマイナス符号がついていることに注意されたい。積分経路は、 $|z| = R$  の円周上を原点から見て正の向き（反時計回り）に回るが、これは無限遠点を常に右手に見ていることになる。したがって、その経路を無限遠点から見れば、無限遠点を中心に負の向き（時計回り）に回っていることになり、これがマイナスの符号がつく理由である。

定理 1 :  $f(z)$  が  $R < |z| < \infty$  で正則であるとき  $\lim_{z \rightarrow \infty} zf(z)$  が有限確定であるなら

$$Res(\infty) = - \lim_{z \rightarrow \infty} zf(z) \quad (3.2)$$

(証明):  $z = 1/\eta$  と変数変換し、半径  $r (> R)$  の円周を考えると

$$Res(\infty) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r} f(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\eta|=1/r} f(1/\eta) \left(\frac{-1}{\eta^2}\right) d\eta \quad (3.3)$$

ここで  $|z| = r$  の円周上を正の向きにまわる道筋は  $|\eta| = 1/r$  の円周上を負の向きにまわる道筋に対応するから、最後の式ではその積分路を  $|\eta| = 1/r$  の円周上で正の向きにまわる積分路に書き換え、符号  $(-1)$  をかけている。 $f(1/\eta)$  は  $\eta = 0$  を除いて  $0 < |\eta| < 1/R$  で正則であるから、 $F(\eta) \equiv -f(1/\eta)(1/\eta^2)$  の特異点が存在するとすれば、それは  $\eta = 0$  である。つまり

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|\eta|=1/r} f(1/\eta)(-1/\eta^2) d\eta = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\eta|=1/r} F(\eta) d\eta = ResF(0) \quad (3.4)$$

は、 $\lim_{\eta \rightarrow 0} \eta F(\eta)$  が有限確定であれば

$$ResF(0) = \lim_{\eta \rightarrow 0} \eta F(\eta)$$

である。故に

$$ResF(0) = \lim_{\eta \rightarrow 0} \eta F(\eta) = - \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{z} f(z) z^2 = - \lim_{z \rightarrow \infty} zf(z)$$

————— (証明終わり)

$f(z)$  が  $R \leq |z| \leq \infty$  で

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c^n z^n \quad (3.5)$$

と展開されるとする。

$$\oint_{|z|=r>0} z^n dz = \begin{cases} 0 & n \neq -1 \\ 2\pi i & n = -1 \end{cases}$$

であることを考えると

$$Res(\infty) = -c_{-1} \quad (3.6)$$

である。このことから、 $z = \infty$  が  $f(z)$  の正則点であっても留数  $Res(\infty)$  は 0 とは限らないことが分かる。このことには注意が必要である。

定理 2 : ジョルダン閉曲線  $C$  は  $f(z)$  の原点から有限の距離にある特異点を全て内側に含むとする。  $C$  の内側にある  $f(z)$  の特異点を  $\{z_k\}$ 、そこでの留数をそれぞれ  $A_k$ 、無限遠点の留数を  $B_\infty$  とする。これらの特異点を除き  $f(z)$  は正則であるとする。このとき

$$\sum_k A_k + B_\infty = 0$$

(証明 : ) 閉曲線  $C$  をまわる複素積分は

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_k A_k \quad (3.7)$$

一方これはまた定義 (3.1) により  $\infty$  の留数も与える。

$$\oint_C f(z) dz = -2\pi i B_\infty \quad (3.8)$$

故に  $\sum A_k + B_\infty = 0$  である。(証明終わり)

これが  $z = \infty$  が正則点である場合も、一般には  $B_\infty \neq 0$  であることの意味である。逆に  $f(z)$  の特異点が  $z = \infty$  であっても他に特異点がなければ  $B_\infty = 0$  である。

————— (証明終わり)

例 39:

$$f(z) = e^z \quad (3.9)$$

は  $z = \infty$  を除いて全  $z$  平面上で正則である ( $z = \infty$  は真性特異点)。上の定理から  $z = \infty$  の留数は 0 である。 $f(z)$  を  $z$  のべき級数で展開すると

$$e^z = 1 + \frac{1}{1!}z + \frac{1}{2!}z^2 + \cdots + \frac{1}{n!}z^n + \cdots \quad (3.10)$$

である。 $z^{-1}$  の項は現われないから  $z = 1$  での留数はたしかに 0 である。

(了)