

Sturm-Liouville 方程式と Green 関数 (2)

KENZOU

2006 年 4 月 23 日

スツルム - リウビル¹という舌を噛みそうな名前の微分方程式から量子力学でおなじみの Hermite の微分方程式や Legendre, Laguerre の微分方程式等がでてくる。本稿はスツルム - リウビル方程式の境界値問題を解く際の武器となるグリーン関数について述べる。もとより、浅学ゆえ誤りが多々あると思われるので、後学のためにご指摘願いたい。

1 スツルム - リウビル方程式

1.1 自己随伴演算子

線形 2 階常微分方程式の一般形

$$\left[p(x) \frac{d^2}{dx^2} + q(x) \frac{d}{dx} + r(x) \right] u(x) = \mathcal{L}u(x) = 0 \quad (1)$$

演算子 \mathcal{L}

$$\mathcal{L} = p(x) \frac{d^2}{dx^2} + q(x) \frac{d}{dx} + r(x) \quad (2)$$

に対して演算子 $\bar{\mathcal{L}}$

$$\bar{\mathcal{L}} = \frac{d^2}{dx^2} p(x) - \frac{d}{dx} q(x) + r(x) \quad (3)$$

を自己随伴演算子²(Self-Adjoint operator) といひ、 $\mathcal{L} = \bar{\mathcal{L}}$ を満たす。

$$\mathcal{L}u(x) = \bar{\mathcal{L}}u(x) = \frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{du(x)}{dx} \right] + q(x)u(x) = 0 \quad (4)$$

自己随伴演算子となるため条件

$p'(x) = q(x)$ が成立するとき、微分演算子 \mathcal{L} は自己随伴演算子となる。これを以下に示す。

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{L}}u(x) &= \frac{d^2}{dx^2} p(x)u(x) - \frac{d}{dx} q(x)u(x) + r(x)u(x) \\ &= \frac{d}{dx} \left[p'(x)u(x) + p(x) \frac{d}{dx} u(x) \right] - q'(x)u(x) - q(x) \frac{d}{dx} u(x) + r(x)u(x) \\ &= p''(x)u(x) + 2p'(x) \frac{d}{dx} u(x) + p(x) \frac{d^2}{dx^2} u(x) - q'(x)u(x) - q \frac{d}{dx} u(x) + r(x)u(x) \\ &= p(x) \frac{d^2}{dx^2} u(x) + \{2p'(x) - q(x)\} \frac{d}{dx} u(x) + \{p''(x) - q'(x) + r(x)\} u(x) \end{aligned}$$

¹J.C.F.Sturm (1803-1855) Switzerland, J.Liouville (1809-1882) France. 有名な Sturm-Liouville 方程式は 1836-1837 の論文で登場する。

²自己随伴作用素とも言う。これは複素数の共役という概念に似ている。

(1) と (1.1) を比べ

$$\left. \begin{aligned} 2p'(x) - q(x) = q(x) &\longrightarrow p'(x) = q(x) \\ p''(x) - q'(x) + r(x) = r(x) &\longrightarrow p''(x) = q'(x) \end{aligned} \right\}$$

であれば, $\mathcal{L}u(x) = \bar{\mathcal{L}}u(x)$ となり, $\mathcal{L} = \bar{\mathcal{L}}$ が成立する.

一般に 2 階線形同次微分方程式は自己随伴形に書ける

$$\left[p(x) \frac{d^2}{dx^2} + q(x) \frac{d}{dx} + r(x) \right] u(x) = \mathcal{L}u(x) = 0$$

両辺に $1/p(x) \exp[\int^x q(t)/p(t) dt]$ をかけて, 整理すると

$$\begin{aligned} \frac{1}{p(x)} \exp \left[\int^x \frac{q(t)}{p(t)} dt \right] \mathcal{L}u(x) &= \frac{1}{p(x)} \exp \left[\int^x \frac{q(t)}{p(t)} dt \right] \left[p(x) \frac{d^2}{dx^2} + q(x) \frac{d}{dx} + r(x) \right] u(x) \\ &= \exp \left[\int^x \frac{q(t)}{p(t)} dt \right] u''(x) + \frac{q(x)}{p(x)} \exp \left[\int^x \frac{q(t)}{p(t)} dt \right] u'(x) + \frac{r(x)}{p(x)} \exp \left[\int^x \frac{q(t)}{p(t)} dt \right] u(x) \end{aligned}$$

また, $\frac{d}{dx} \left[\exp \left[\int^x \frac{q(t)}{p(t)} dt \right] u'(x) \right] = \exp \left[\int^x \frac{q(t)}{p(t)} dt \right] u''(x) + \frac{q(x)}{p(x)} \exp \left[\int^x \frac{q(t)}{p(t)} dt \right] u'(x)$ であるから

$$\begin{aligned} \frac{1}{p(x)} \exp \left[\int^x \frac{q(t)}{p(t)} dt \right] \mathcal{L}u(x) &= \frac{d}{dx} \left[\exp \left\{ \int^x \frac{q(t)}{p(t)} dt \right\} \frac{du(x)}{dx} \right] + \frac{r(x)}{p(x)} \exp \left\{ \int^x \frac{q(t)}{p(t)} dt \right\} u(x) \\ &= \frac{d}{dx} \left[P(x) \frac{du(x)}{dx} \right] + Q(x)u(x) \end{aligned}$$

<< 具体的例 >>

次の微分方程式を考えよう.

$$x^3 y'' - xy' + 2y = 0$$

両辺を x^3 で割ると

$$y'' - \frac{x}{x^3} y' + \frac{2}{x^3} y = 0$$

両辺に $\exp \left[\int \frac{x}{x^3} dx \right] = \exp \left[-\frac{1}{x} \right]$ をかけると

$$e^{-\frac{1}{x}} y'' - \frac{e^{-1/x}}{x^2} y' + \frac{2e^{-1/x}}{x^3} y = 0$$

また,

$$\frac{d}{dx} e^{-1/x} = \frac{e^{-1/x}}{x^2}$$

であるから, 与式の微分方程式は

$$\frac{d}{dx} \left[e^{-1/x} \frac{dy}{dx} \right] + \frac{2e^{-1/x}}{x^3} y = 0$$

1.2 スツルム - リウビル型の微分方程式

自己随伴演算子を \mathcal{L} とするとき

$$\mathcal{L}[u(x)] = \frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{du(x)}{dx} \right] + q(x)u(x) = -\lambda\rho(x)u(x) \quad (5)$$

をスツルム - リウビル型の微分方程式という。 $\rho(x)$ は、荷重関数 (weighting function)³ と呼ばれ、連続実関数で $\rho(x) > 0$ である。荷重関数は直交条件に際して重要となる⁴が、普通は $\rho(x) = 1$ の場合が多い。この微分方程式は、 λ が特定の値を持つときのみ解が求まる。

$$\mathcal{L}[u_i(x)] = -\lambda_i\rho(x)u_i(x) \quad (i = 1, 2, \dots, \infty) \quad (6)$$

λ_i を \mathcal{L} の固有値と言い、 $u_i(x)$ は固有値 λ_i の固有関数という。この方程式は 2 階の微分方程式であるから、解を求めるには 2 つの境界条件が必要となる。

A. 固定端境界条件 (ディレクレ条件)

両端 a, b で $u(t)$ が固定されている場合で、この条件はディレクレ条件とも呼ばれる。

$$u(a) = 0, \quad u(b) = 0$$

B. 自由端境界条件 (ノイマン条件)

両端 a, b でいつでも微係数がゼロとなる場合で、例えば水槽の中の水が振動するとき、水はいつも壁面で水平を保っており、この状態であるといわれている⁵。この条件はノイマン条件とも呼ばれる。

$$u'(a) = 0, \quad u'(b) = 0$$

C. 周期境界条件 (ロバン条件)

$$u(a) = 0, \quad u'(b) = 0$$

という境界条件で、これはロバン条件とか混合境界条件と呼ばれる。

上に述べた境界条件の下で (5) を解く問題を常微分方程式のスツルム - リウビル問題という。

MEMO ... 境界条件とエルミート性について

- その - 1 : 上で述べた境界条件は次の境界条件 (正則境界条件) の特殊な場合となっている。

$$\left. \begin{aligned} a_1u(a) + a_2u'(a) &= 0 \\ b_1u(b) + b_2u'(b) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

ここで、 a_1, a_2, b_1, b_2 はある定数である。 $a_2 = b_2 = 0$ の場合はディレクレ条件。 $a_1 = b_1 = 0$ の場合はノイマン条件。 $a_2 = b_1 = 0$ の場合はロバン条件となる。

³なぜそのような名前が付くのかについては 2.1 の項を参照。

⁴1.4 参照。

- その - 2 : 自己随伴演算子はエルミート演算子とよばれている . スツルム - リウビル演算子のエルミート性を確認しよう . これを示すには $\langle \mathcal{L}u, v \rangle = \langle u, \mathcal{L}v \rangle$ が成り立つことを示せばよい .

$$\begin{aligned}
\langle -\mathcal{L}u, v \rangle + \langle u, \mathcal{L}v \rangle &= \int_a^b \left[\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dv(x)}{dx} \right) u(x) - \frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{du(x)}{dx} \right) v(x) \right] dx \\
&+ \int_a^b (-q(x)u(x)v(x) + u(x)q(x)v(x)) dx \\
&= \left[p(x) \frac{dv}{dx} u(x) - p(x) \frac{du}{dx} v(x) \right]_a^b + \int_a^b p(x) \left(\frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} - \frac{dv}{dx} \frac{du}{dx} \right) dx \quad (8) \\
&= \left[p(x) \frac{dv}{dx} u(x) - p(x) \frac{du}{dx} v(x) \right]_a^b \\
&= p(b)[v'(b)u(b) - v(b)u'(b)] - p(a)[v'(a)u(a) - v(a)u'(a)]
\end{aligned}$$

ここで次の連立同次方程式

$$\begin{aligned}
\alpha v(a) + \beta v'(a) &= 0 \\
\alpha u(a) + \beta u'(a) &= 0
\end{aligned} \quad (9)$$

を考える . これは境界条件 (7) を満たす . この方程式が自明でない解 (non-trivial solution) をもつための条件は , 係数行列の行列式がゼロ

$$\begin{vmatrix} v(a) & v'(a) \\ u(a) & u'(a) \end{vmatrix} = 0$$

であるから

$$v(a)u'(a) - v'(a)u(a) = 0$$

全く同様にして

$$v(a)u'(a) - v'(a)u(a) = 0$$

これを (8) に代入すると , 右辺はゼロとなるから

$$\langle \mathcal{L}u, v \rangle = \langle u, \mathcal{L}v \rangle$$

が成り立つ .

1.3 スツルム - リウビル (Sturm-Liouville) 問題

ここでは , スツルム - リウビル方程式において $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$ を適当に選ぶと量子力学でお馴染みのルジャンドル (Legendre) , ベッセル (Bessel) , エルミート (Hermite) , ラゲール (Laguerre) の微分方程式など , 著名な種々の微分方程式がでてくることを示す . 次に , スツルム - リウビル問題の簡単な例題をとりあげ , 理解を深めていくこととする . 自己随伴演算子を \mathcal{L} とするときスツルム - リウビル方程式は ,

$$\mathcal{L}[u(x)] = \frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{du(x)}{dx} \right] + q(x)u(x) = -\lambda r(x)u(x) \quad (10)$$

(1) 円運動の微分方程式

$$p(x) = 1, \quad q(x) = 0, \quad \rho(x) = 1$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\frac{d}{dx} u(x) \right) &= -\lambda u(x) \\ \frac{d^2}{dx^2} u(x) &= -\lambda u(x) \end{aligned} \tag{11}$$

(2) ルジャンドル (Legendre) の微分方程式

$$p(x) = 1 - x^2, \quad q(x) = 0, \quad \rho(x) = 1, \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[(1 - x^2) \frac{du(x)}{dx} \right] + \lambda u(x) &= 0 \\ (1 - x^2) \frac{d^2 u(x)}{dx^2} - 2x \frac{du(x)}{dx} + \lambda u(x) &= 0 \end{aligned} \tag{12}$$

$\lambda = n(n+1)$ とおくとルジャンドルの微分方程式となる。

(3) ベッセル (Bessel) の微分方程式

$$p(x) = x, \quad q(x) = x, \quad \rho(x) = 1/x, \quad (x \geq 0)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[x \frac{du(x)}{dx} \right] + xu(x) &= -\frac{\lambda}{x} u(x) \\ \frac{d^2 u(x)}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{du(x)}{dx} + \left(1 + \frac{\lambda}{x^2} \right) u(x) &= 0 \end{aligned} \tag{13}$$

$\lambda = -n^2$ とおくとベッセルの微分方程式となる。

(4) エルミート (Hermitel) の微分方程式

$$p(x) = e^{-x^2}, \quad q(x) = 0, \quad \rho(x) = e^{-x^2} x, \quad \lambda = 2n, \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[e^{-x^2} \frac{du(x)}{dx} \right] + 2ne^{-x^2} u(x) &= 0 \\ \frac{d^2 u(x)}{dx^2} - 2x \frac{du(x)}{dx} + 2nu(x) &= 0 \end{aligned} \tag{14}$$

(5) ラゲール (Laguerre) の微分方程式

$$p(x) = xe^{-x}, \quad q(x) = 0, \quad \rho(x) = e^{-x}, \quad \lambda = n, \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[xe^{-x} \frac{du(x)}{dx} \right] + ne^{-x} u(x) &= 0 \\ x \frac{d^2 u(x)}{dx^2} + (1-x) \frac{du(x)}{dx} + nu(x) &= 0 \end{aligned} \tag{15}$$

(6) チェビシェフ (Chebyshev) の微分方程式

$$p(x) = \sqrt{1-x^2}, \quad q(x) = 0, \quad \rho(x) = 1/\sqrt{1-x^2}, \quad \lambda = n^2$$

$$\frac{d}{dx} \left[\sqrt{1-x^2} \frac{du(x)}{dx} \right] + \frac{n^2}{\sqrt{1-x^2}} u(x) = 0 \tag{16}$$

$$(1-x^2) \frac{d^2 u(x)}{dx^2} - x \frac{du(x)}{dx} + n^2 u(x) = 0$$

1.3.1 スツルム - リウビルを方程式を解く

最も簡単な円運動の微分方程式を取り上げ、固定ならびに周期境界条件下での固有値と固有関数を求めてみよう。

$$\frac{d^2}{dx^2} u(x) = -\lambda u(x)$$

これは定数係数 2 階同次線形微分方程式であるから $u(x) = e^{tx}$ において特性方程式⁶を求めると

$$t^2 + \lambda = 0, \quad t = \pm i\sqrt{\lambda}$$

これから求める解は

$$u(x) = C_1 e^{i\sqrt{\lambda}x} + C_2 e^{-i\sqrt{\lambda}x}$$

λ の符号により $u(x)$ は次の表式をとる。

$$u(x) = \begin{cases} C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{-\alpha x} & \lambda < 0, \quad \lambda = -\alpha^2 \ (\alpha > 0) \\ C_1 x + C_2 & \lambda = 0 \\ C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x & \lambda > 0, \quad \lambda = \beta^2 \ (\beta > 0) \end{cases} \tag{17}$$

≪ 境界条件 ≫

(1) $u(0) = 0, \quad u(L) = 0$ (固定端境界条件)

$\lambda \leq 0$ のとき, $C_1 = C_2 = 0$ となり, $u(x) \equiv 0$

$\lambda > 0$ のとき, 境界条件 $u(0) = 0$ より $C_1 = 0$, 次ぎに $u(L) = 0$ より

$$C_2 \sin \beta L = 0$$

ここで, $C_2 \neq 0$ として $\beta = \frac{n\pi}{L}$ が得られる。したがって固有値と固有関数は, n に対応する λ を λ_n として

$$\lambda_n = \beta^2 = \frac{n^2 \pi^2}{L^2}, \quad u_n(x) = \sin \left(\frac{n\pi}{L} x \right)$$

(2) $u(0) = u(L), \quad u'(0) = u'(L)$ (周期境界条件)

$\lambda < 0$ のとき, $C_1 = C_2 = 0$ となり, $u(x) \equiv 0$

$\lambda = 0$ のとき, 境界条件 $u(0) = u(L)$ より $C_1 = 0$. したがって固有関数は $u(x) = C_2$ となるが, C_2 は任意の実数だから仮に $C_2 = 1$ とおくと, 固有値と固有関数は

$$\lambda = 0, \quad u(x) = 1$$

となる。

$\lambda > 0$ のとき, 境界条件を入れて計算すると, $(C_1^2 + C_2^2) \sin \beta L = 0$ を経て $\beta = \frac{n\pi}{L}$ を得る。した

⁶小寺平治「なっとくする微分方程式」(講談社) 参照。

がって固有値と固有関数は

$$\lambda_n = \beta^2 = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad u_n(x) = C_1 \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + C_2 \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

1.4 スツルム - リウビル型の固有値と固有関数の性質

$$\mathcal{L}[u(x)] = \frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{du(x)}{dx} \right] + q(x)u(x) = -\lambda\rho(x)u(x) \quad (18)$$

で, \mathcal{L} の固有値問題は

$$\mathcal{L}[u_i(x)] = -\lambda_i\rho(x)u_i(x) \quad (i = 1, 2, \dots, \infty) \quad (19)$$

と表される. $\rho(x)$ を荷重関数, λ_i を固有値⁷ と言い, $u_i(x)$ は固有値 λ_i の固有関数ということは既に述べたとおりである. 以下に, 証明なしでスツルム - リウビル型微分方程式の固有値と固有関数の性質を示す.

1. 相異なる固有値に属する固有関数は互いに直交する.

(20) を満たす関数系 $\{u_n(x)\} (n = 1, 2, \dots)$ を直交関数系と呼ぶ. 相異なる固有値 λ_i, λ_j に属する固有関数 $u_i(x), u_j(x)$ は $\rho(x)$ を荷重関数として互いに直交する.

$$\int_a^b \rho(x)u_i(x)u_j(x)dx = 0 \quad (i \neq j) \quad (20)$$

2. スツルム - リウビル型の固有関数は完全直交関数系をなす.

$\int u_i(x)u_i(x)dx = 1$ の場合, 関数 $u_i(x)$ は規格化されているという. いま, 規格化された関数系 $\{u_n(x)\}$ の他には直交する関数が1つもないとき, $\{u_n(x)\}$ は完全規格直交関数系であるという.

3. デルタ関数は完全規格直交関数系 $\{u_i(x)\}$ によって次のように定義される.

$$\delta(x - \xi) = \sum_{i=1}^{\infty} u_i(x)u_i(\xi) \quad (21)$$

これは, $\{u_i(x)\}$ が完全系であるための必要十分条件である.

4. 自己随伴演算子の固有値はすべて実数である. 固有値は可算無限個存在する.

< EPILOG >

上の固有値と固有関数の性質を眺めれば, これは量子力学のシュレーディンガー方程式の固有値問題そのものではないか! 量子力学は飛び飛びの固有値をもつものというのをさんざん聞かされ, 量子 \iff 飛び飛びという図式が無意識に定着していたが, 危ないところだった. 固有値の飛び飛びというのは, 量子の振る舞いとか, そういうものとは関係なく, Sturm - Liouville 方程式の性質からでてくる帰結なのだ

⁷固有値 λ_i は勝手な値を散らすことはできず, 境界条件により値が決まる.

2 グリーン関数

2.1 スツルム - リウビル方程式とグリーン関数

区間 $[a, b]$ で定義された非同次スツルム - リウビル方程式を取り上げる .

$$\mathcal{L}u(t) = \frac{d}{dt} \left[p(t) \frac{du(t)}{dt} \right] - q(t)u(t) = f(t) \quad (22)$$

$p(t) > 0$ で , $p(t), q(t)$ は区間 $[a, b]$ で連続且つ微分可能とする . (22) を次の境界条件の下で解くことを考える .

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) &= 0 \\ \beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

ここで , グリーン関数を次のように定義する .

$$\mathcal{L}G(t, \xi) = \delta(t - \xi) \quad (24)$$

尚 , $G(t, \xi)$ は境界条件 (23) を満たすものとする .

(24) の両辺に $f(\xi)$ を掛け , a から b まで ξ について積分すると

$$\int_a^b \mathcal{L}G(t, \xi) f(\xi) d\xi = \mathcal{L} \left[\int_a^b G(t, \xi) f(\xi) d\xi \right] = \int_a^b f(\xi) \delta(t - \xi) d\xi = f(t) \quad (25)$$

となる . ただし , ここで \mathcal{L} は線形微分演算子で積分と交換可能であるということを利用した . (25) と (22) の比較から , $u(t)$ は

$$u(t) = \int_a^b G(t, \xi) f(\xi) d\xi \quad (26)$$

で与えられることがわかる . \mathcal{L} の逆演算子 \mathcal{L}^{-1} が存在すると仮定すれば , $G(t, \xi) = \mathcal{L}^{-1} \delta(t - \xi)$ と形式的に書けるが , この表示は , $t = \xi$ で印加されたインパルス $\delta(t - \xi)$ に対する \mathcal{L}^{-1} の応答がグリーン関数 $G(t, \xi)$ であると解釈できる .

$$\begin{array}{ccc} \delta(t - \xi) & \longrightarrow & \boxed{\mathcal{L}^{-1}} & \longrightarrow & G(t, \xi) \\ \text{-----} & & & & \text{-----} \\ f(t) & \longrightarrow & & & u(t) = \int_a^b G(t, \xi) f(\xi) d\xi \end{array}$$

したがって (26) は , インパルス応答を $f(\xi)$ で荷重し , 重ね合わせて得られた式ということになる . なお , 境界条件を考えないで , 単に (24) のみを満足する $G(t, \xi)$ をこの方程式の主要解または基本的グリーン関数という .

2.2 グリーン関数の求め方

スツルム-リウビル方程式

$$\mathcal{L}u(x) = \frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{du(x)}{dx} \right] - q(x)u(x) = f(x) \quad (27)$$

の境界条件が区間 $[a, b]$ の両端で指定されている場合、この微分方程式を解く問題をこれをスツルム-リウビルの境界値問題という。さて、具体的にグリーン関数を求めていこう。その求め方は以下のように4通りある⁸。

[主要解法] 主要解 (基本的グリーン関数) を何らかの方法で求め、これに同次方程式の解を加えて境界条件を満たすようにする。

[基本解法] 同次方程式の解 (基本解) を使ってグリーン関数を構成する。1次元問題でよく使われるが、2次元以上では使えず、そのような場合は次の解き方が使われる。

[固有関数展開法] 同次方程式の固有値問題を解き、その固有値と固有関数を使ってグリーン関数を構成する。この方法は固有関数展開法とも呼ばれている。

[フーリエ展開法] フーリエ変換を使う。この方法は、拙稿対話・グリーン関数 (1) で述べているので、興味があればそちらを参照されたい。この方法は偏微分方程式の場合が一般的である。

2.2.1 その1 (主要解法)

同次微分方程式 $\mathcal{L}u(x) = 0$ で、 $\mathcal{L}G(x, \xi) = \delta(x - \xi)$ を満たす関数 $G(x, \xi)$ をこの微分方程式の主要解と呼んだ。この主要解に同次微分方程式の解 $u(x)$ を加えた $G(x, \xi) + u(x)$ も $\mathcal{L}G(x, \xi) = \delta(x - \xi)$ を満たすから主要解である。つまり、主要解にはこのように不定性がある。それではさっそく例題に入ろう⁹。

例題-1 $\mathcal{L} = d^2/dx^2$ に対する主要解を求めよ。

解答：主要解を $G(x, \xi)$ とすると

$$\frac{d^2}{dx^2} G(x, \xi) = \delta(x - \xi)$$

1回積分すると

$$\frac{d}{dx} G(x, \xi) = \theta(x - \xi) = \begin{cases} 0 & x < \xi \\ 1 & x > \xi \end{cases}$$

⁸ここで名付けた解法の名前は筆者が勝手につけた名前です (笑い) ので、要注意 !!

⁹計算はすべて確認していますが、計算ミスがあるかも知れません (恐らくある) ので、その時はご自分で修正してください。

さらにもう一回積分すれば

$$G(x, \xi) = \begin{cases} 0 & x < \xi \\ 1 & x > \xi \end{cases}$$

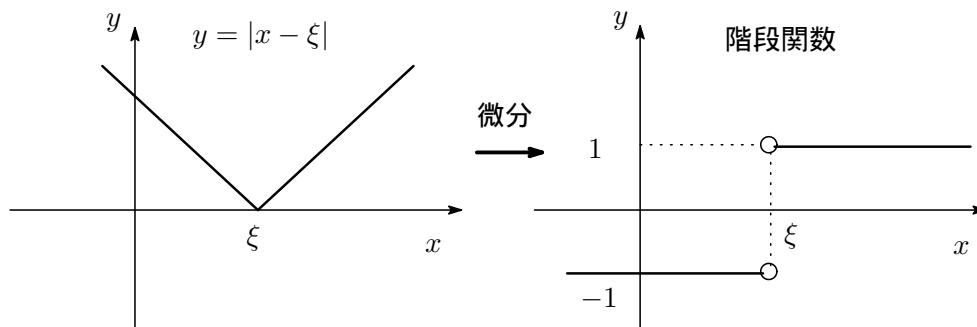
これを一つの式にまとめると

$$G(x, \xi) = \frac{x - \xi + |x - \xi|}{2}$$

と書ける．主要解は2階同次微分方程式の解，つまり x の任意の一次式を加えたものも主要解となるので，今の場合，主要解の最も単純な形は

$$G(x, \xi) = \frac{|x - \xi|}{2} \tag{28}$$

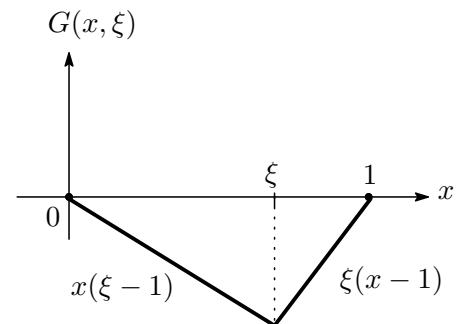
この項さえあればデルタ関数¹⁰はでてくるので，これが最も基本的な主要解だといえる．



例題-2 境界条件 $u(0) = u(1) = 0$ の下で $\frac{d^2}{dx^2}G(x, \xi) = \delta(x - \xi)$ を満たすグリーン関数を求めよ．

解答：

例題1で得られた主要解は与式の微分方程式を満たすが，境界条件は満たしてはいない．そこで，これに2階同次微分方程式 $d^2u(x)/dx^2 = 0$ の解である一次式 $u = ax + b$ を足して境界条件を満たすように a, b を決めればよい．まず，境界条件より $0 \leq \xi \leq 1$



$$\begin{aligned} G(x, \xi) &= \frac{1}{2}|x - \xi| + ax + b \\ G(0, \xi) &= \frac{1}{2}\xi + b = 0, \quad G(1, \xi) = \frac{1}{2}|1 - \xi| + a = 0 \\ G(x, \xi) &= \frac{1}{2}|x - \xi| + \left(\xi - \frac{1}{2}\right)x - \frac{1}{2}\xi = \frac{|x - \xi| - (x + \xi)}{2} + \xi x \\ &= \begin{cases} \xi(x - 1) & x > \xi \\ x(\xi - 1) & x < \xi \end{cases} \end{aligned}$$

¹⁰ $\delta(x) = \frac{d}{dx}\theta(x)$

例題-3 境界条件 $u(0) = u(1)$ の下で微分方程式 $\frac{d^2u(x)}{dx^2} + x^2 = 0$ を解け .

解答 : 解はグリーン関数を使って (26) で与えられる . グリーン関数は上で得ているから

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_0^1 G(x, \xi) f(\xi) d\xi \\ &= \int_0^x \xi(x-1) f(\xi) d\xi + \int_x^1 x(\xi-1) f(\xi) d\xi \\ &= (x-1) \int_0^x \xi^3 d\xi + x \int_x^1 (\xi-1) \xi^2 d\xi \\ &= \frac{1}{12} x(x^3 - 1) \end{aligned}$$

《老婆心》 $\int_0^1 = \int_0^x + \int_x^1$ と分けた訳は例題-2 でグリーン関数が $x < \xi$ と $x > \xi$ で異なる姿となるから . \int_0^x では変数 ξ は $0 < \xi < x$ となるのでグリーン関数は $G(x, \xi) = \xi(x-1)$ となるという次第 .

2.2.2 その2 (基本解法)

基本解法のやりかたは , まず , 境界条件 $x = a$ の下での同次方程式 $\mathcal{L}u_1(x) = 0$ の解を求め , 次に , 境界条件 $x = b$ の下での同次方程式 $\mathcal{L}u_2(x) = 0$ の解を求める . そして , この2つの解を使ってグリーン関数を次のように構成する .

$$G(x, \xi) = \begin{cases} A(\xi)u_1(x) & (a \leq x < \xi) \\ B(\xi)u_2(x) & (\xi < x \leq b) \end{cases} \quad (29)$$

こうすることで $G(x, \xi)$ は両端で境界条件を満たす . また , $G(x, \xi)$ は $x = \xi$ で連続である¹¹から

$$A(\xi)u_1(\xi) = B(\xi)u_2(\xi) \quad (30)$$

次に , $\mathcal{L}G(x, \xi) = \delta(x - \xi)$ の両辺を $x = \xi - 0$ から $x = \xi + 0$ まで積分すると

$$\int_{\xi-0}^{\xi+0} \frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{du(x)}{dx} \right] dx - \int_{\xi-0}^{\xi+0} q(x)u(x)dx = \int_{\xi-0}^{\xi+0} \delta(x - \xi)dx \quad (31)$$

これから

$$\left[p(x) \frac{d}{dx} G(x, \xi) \right]_{\xi-0}^{\xi+0} = 1$$

となるから

$$\left(\frac{dG}{dx} \right)_{x=\xi+0} - \left(\frac{dG}{dx} \right)_{x=\xi-0} = \frac{1}{p(\xi)}$$

¹¹ 区間 $[a, b]$ でグリーン関数は連続と仮定する .

したがって, $A(\xi), B(\xi)$ は

$$A(\xi)u_1'(\xi) - B(\xi)u_2'(\xi) = -\frac{1}{p(\xi)} \quad (32)$$

を満たさねばならない. (30) と (32) から $A(\xi), B(\xi)$ を求め, それを (29) に代入すれば求めるグリーン関数が得られる. さて, $A(\xi), B(\xi)$ を具体的に求めると

$$\begin{aligned} A(\xi) &= -\frac{u_2(\xi)}{p(\xi)(u_2(\xi)u_1'(\xi) - u_1(\xi)u_2'(\xi))} = -\frac{u_2(\xi)}{p(\xi)\Delta(\xi)} \\ B(\xi) &= -\frac{u_1(\xi)}{p(\xi)(u_2(\xi)u_1'(\xi) - u_1(\xi)u_2'(\xi))} = -\frac{u_1(\xi)}{p(\xi)\Delta(\xi)} \end{aligned} \quad (33)$$

となる, ここで $\Delta(\xi)$ は連立方程式の係数行列 (ロンスキアン) で,

$$\Delta(\xi) = \begin{vmatrix} u_1(\xi) & u_2(\xi) \\ u_1'(\xi) & u_2'(\xi) \end{vmatrix} = u_1(\xi)u_2'(\xi) - u_2(\xi)u_1'(\xi) \quad (34)$$

で, $u_1(\xi)$ と $u_2(\xi)$ が独立であるから $\Delta(\xi) \neq 0$ である. これで一応グリーン関数が求められるが, もう少し計算を進めるともっと容易な表式が得られる. u_1, u_2 は同次方程式 $\mathcal{L}u = 0$ の解だから

$$\begin{aligned} (pu_1')' - qu_1 &= 0 \\ (pu_2')' - qu_2 &= 0 \end{aligned}$$

を満たす. 第 1 式に u_2 を掛け, 第 2 式に u_1 を掛けて辺々差し引くと

$$u_1(pu_2')' - u_2(pu_1')' = 0$$

が得られる. これを展開して整理すると (第 1 行目の右辺第 2 項と第 6 項は人為的に付加: 笑い)

$$\begin{aligned} u_1(pu_2')' - u_2(pu_1')' &= p'u_1u_2' + pu_1'u_2'' + pu_1u_2'' - (p'u_1'u_2 + pu_1''u_2 + pu_1'u_2') \\ &= [pu_1u_2']' - [pu_1'u_2] \\ &= \frac{d}{dx} [p(u_1u_2' - u_1'u_2)] = 0 \end{aligned}$$

これから

$$p(u_1u_2' - u_1'u_2) = p(x)\Delta(x) = \text{定数}$$

となる. つまり, 微分して 0 になればいいのだから, あとあと計算しやすい式にしておく. つまり,

$$p(x)\Delta(x) = p(\xi)\Delta(\xi) = \text{定数} = p(0)\Delta(0)$$

とする. すると (33) は

$$\begin{aligned} A(\xi) &= -\frac{u_2(\xi)}{p(0)\Delta(0)} \\ B(\xi) &= -\frac{u_1(\xi)}{p(0)\Delta(0)} \end{aligned} \quad (35)$$

となる．求めるグリーン関数は

$$G(x, \xi) = \begin{cases} A(\xi)u_1(x) & (a \leq x < \xi) \\ B(\xi)u_2(x) & (\xi < x \leq b) \end{cases} \quad (36)$$

また，(35)(36) より $G(x, \xi) = G(\xi, x)$ というグリーン関数の対称性が成り立っていることがわかる．
いや～，少し前口上が長すぎましたね．退屈感をほぐす意味から早速演習問題をやってみましょう．

例題-4 区間 $[0, \ell]$ で定義された微分方程式 $\frac{d^2u}{dx^2} = f(x)$ の境界条件 $u(0) = u(\ell) = 0$ に対するグリーン関数を基本解法により求めよ．

解答：この方程式は $p(x) = 1$ である．同次方程式 $u'' = 0$ の解は c_1, c_2 を定数として

$$u(x) = c_1x + c_2$$

である．境界条件の一方 $u(0) = 0$ を満たす基本解は

$$u_1(x) = c_1x$$

で，もう一方の $u(\ell) = 0$ を満たす基本解は

$$u_2 = c_1(x - \ell)$$

となる．求めるグリーン関数は

$$G(x, \xi) = \begin{cases} A(\xi)u_1(x) & (a \leq x < \xi) \\ B(\xi)u_2(x) & (\xi < x \leq b) \end{cases} \quad (37)$$

で表された．ロンスキアン $\Delta(0)$ は

$$\Delta(0) = \begin{vmatrix} u_1(0) & u_2(0) \\ u_1'(0) & u_2'(0) \end{vmatrix} = u_1(0)u_2'(0) - u_2(0)u_1'(0) = c_1^2\ell \quad (38)$$

また， $A(\xi), B(\xi)$ は，(35) より

$$\begin{aligned} A(\xi) &= -\frac{u_2(\xi)}{p(0)\Delta(0)} = -\frac{\xi - \ell}{c_1\ell} \\ B(\xi) &= -\frac{u_1(\xi)}{p(0)\Delta(0)} = -\frac{\xi}{c_1\ell} \end{aligned} \quad (39)$$

従って，グリーン関数は (37) より

$$G(x, \xi) = \begin{cases} -\frac{x(\xi - \ell)}{\ell} & (0 \leq x < \xi) \\ -\frac{\xi(x - \ell)}{\ell} & (\xi < x \leq \ell) \end{cases} \quad (40)$$

したがって、求める解は (26) より

$$\begin{aligned}
 u(x) &= \int_0^\ell G(x, \xi) f(\xi) d\xi \\
 &= - \left[\int_0^\ell \frac{\xi(x-\ell)}{\ell} d\xi + \int_0^\ell \frac{x(\xi-\ell)}{\ell} d\xi \right]
 \end{aligned}
 \tag{41}$$

例題-5 境界条件 $G(0, \xi) = G(1, \xi) = 0$ の下で

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + k^2 \right) G(x, \xi) = \delta(x - \xi)$$

を満たすグリーン関数を求めよ。

【解】同次方程式

$$u'' + k^2 u = 0$$

で、境界条件 $u(0) = 0$ を満たす基本解は

$$u_1(x) = c_1 \sin kx$$

で、もう一方の境界条件 $u(1) = 0$ を満たす基本解は

$$u_2 = c_2 \operatorname{seck} \operatorname{sink}(1 - x)$$

となる。ロンスキアン $\Delta(0)$ は

$$\Delta(0) = \begin{vmatrix} u_1(0) & u_2(0) \\ u_1'(0) & u_2'(0) \end{vmatrix} = u_1(0)u_2'(0) - u_2(0)u_1'(0) = -c_1 c_2 k \tan k
 \tag{42}$$

また、 $A(\xi), B(\xi)$ は、(35) より

$$\begin{aligned}
 A(\xi) &= -\frac{u_2(\xi)}{p(0)\Delta(0)} = \frac{\operatorname{sink}(1-\xi)}{c_1 k \operatorname{sink}} \\
 B(\xi) &= -\frac{u_1(\xi)}{p(0)\Delta(0)} = \frac{\cot k \operatorname{sin} k\xi}{c_2 k}
 \end{aligned}
 \tag{43}$$

従って、グリーン関数は (37) より

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sink} x \operatorname{sink}(1-\xi)}{k \operatorname{sink}} & (0 \leq x < \xi) \\ \frac{\operatorname{sink}(1-x) \operatorname{sink} \xi}{k \operatorname{sink}} & (\xi < x \leq 1) \end{cases}
 \tag{44}$$

一般的な境界条件の場合のグリーン関数の求め方

ここで一般的な境界条件の場合のグリーン関数の求め方を載せておく。さて、1.2 で見てきた境界条件はいずれも右辺が 0 で、条件的には大変厳しく、実際上あまり役に立たない。これは実はグリーン関数の境界条件であって、 $u(x)$ そのものに対する境界条件はこれより緩めることができる。この

様な場合の解の表式を求めてみよう。例によって次の方程式を考える。

$$\begin{aligned} \mathcal{L}u(x) &= f(x) \\ \mathcal{L}G(x, \xi) &= \delta(x - \xi) \end{aligned} \quad (45)$$

第1式の両辺に $G(x, \xi)$ を掛け、第2式の両辺に $u(x)$ を掛けて辺々差し引くと、

$$G(x, \xi)\mathcal{L}u(x) - u(x)\mathcal{L}G(x, \xi) = G(x, \xi)f(x) - u(x)\delta(x - \xi)$$

ここで両辺を x について a から b まで積分する。左辺の積分は $\mathcal{M}\mathcal{E}\mathcal{M}\mathcal{O}$ その-2 を参照すると

$$\left[G(x, \xi)p(x)\frac{du(x)}{dx} - u(x)p(x)\frac{dG(x, \xi)}{d\xi} \right]_a^b = \int_a^b G(x, \xi)f(x)dx - u(\xi)$$

ここで x と ξ を入れ替え、グリーン関数の対称性 $G(x, \xi) = G(\xi, x)$ を使うと

$$u(x) = \int_a^b G(x, \xi)f(\xi)d\xi + \left[u(x)p(x)\frac{dG(x, \xi)}{d\xi} - G(x, \xi)p(x)\frac{du(x)}{dx} \right]_a^b \quad (46)$$

(26) の解の式に比べて (46) の式は、右辺第2項が余分に付加されているが、これはいまのところ $u(x)$ に対しての特段の境界条件を課していないことからきている。

さて、1.2 の境界条件を拡張していくこととする。そして、 $u(x)$ の境界条件の拡張にあわせて、解が閉じた形で求められるようにグリーン関数の境界条件¹²を適切に選ぶこととする。

A. 両端 a, b で $u(t)$ が指定されている場合 (ディレクレ条件)

この場合には、(46) の右辺で $u'(a), u'(b)$ の値が未知である。しかし、グリーン関数に第1種境界条件

$$G(x, a) = G(x, b) = 0$$

を課すと $u'(a)$ と $u'(b)$ を知る必要がなくなる。つまり

$$u(x) = \int_a^b G(x, \xi)f(\xi)d\xi + \left[u(\xi)p(\xi)\frac{dG(x, \xi)}{d\xi} \right]_a^b \quad (47)$$

が解となる。

B. $u'(a), u'(b)$ が指定されている場合 (ノイマン条件)

この場合は、(46) の右辺で $u(a), u(b)$ の値が未知である。グリーン関数に第2種境界条件

$$G'(x, a) = G'(x, b) = 0$$

を課すと $u(a)$ と $u(b)$ を知る必要がなくなる。つまり

$$u(x) = \int_a^b G(x, \xi)f(\xi)d\xi - \left[G(x, \xi)p(\xi)\frac{du(\xi)}{dx} \right]_a^b \quad (48)$$

C. $x = a, b$ で $Au + Bu' = C$ の場合

この場合には、グリーン関数の第3種の境界条件

$$AG + BG' = 0$$

を端点で課す．このとき

$$Gu' - G'u = \frac{C}{B}G$$

であるから

$$u(x) = \int_a^b G(x, \xi) f(\xi) d\xi + \left[G(x, \xi) \frac{C(\xi)}{B(\xi)} p(\xi) \right]_a^b \quad (49)$$

例題-6 境界条件 $u(0) = -1, u(1) = -1$ を満たす

$$\frac{d^2 u(x)}{dx^2} + k^2 u(x) + f(x) = 0$$

の解を求めよ．

【解】この問題の境界条件は $x = 0, 1$ の両端ともディレクレ条件で，グリーン関数に第1種境界条件を課せばよい．このグリーン関数は既に例題5で求めている．(50)より解は

$$u(x) = \int_0^1 G(x, \xi) f(\xi) d\xi + \left[u(\xi) \frac{dG(x, \xi)}{d\xi} \right]_{\xi=0}^{\xi=1} \quad (50)$$

また，(44)よりグリーン関数は

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{\sin kx \sin k(1-\xi)}{k \sin k} & (0 \leq x < \xi) \\ \frac{\sin k(1-x) \sin k\xi}{k \sin k} & (\xi < x \leq 1) \end{cases} \quad (51)$$

である．これを ξ で微分し， $\xi = 0, 1$ での値を求めると

$$\frac{dG(x, \xi)}{d\xi} = \begin{cases} -\frac{\sin kx \cos k(1-\xi)}{\sin k} & (0 \leq x < \xi) \longrightarrow \xi = 1 : -\frac{\sin kx}{\sin k} \\ \frac{\sin k(1-x) \cos k\xi}{\sin k} & (\xi < x \leq 1) \longrightarrow \xi = 0 : \frac{\sin k(1-x)}{\sin k} \end{cases} \quad (52)$$

よって解は

$$u(x) = \frac{\sin k(1-x)}{k \sin k} \int_0^x \sin k\xi f(\xi) d\xi + \frac{\sin kx}{k \sin k} \int_x^1 \sin k(\xi-1) f(\xi) d\xi - \frac{\sin kx}{\sin k} u(1) - \frac{\sin k(1-x)}{\sin k} u(0) \quad (53)$$

2.2.3 その3 (固有関数展開法)

この方法の要点は，スツルム・リウビル方程式固有関数と固有値を用いてグリーン関数を求めようということにある．

$$\mathcal{L}u(x) + \lambda \rho u(x) = 0 \quad (54)$$

次の非同次方程式

$$\mathcal{L}u(x) + k\rho(x)u(x) = f(x) \quad (55)$$

を考える．(54) の各固有値 λ_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) とそれに対応する固有関数を u_n とすると

$$\mathcal{L}u_n(x) + \lambda_n \rho(x)u_n(x) = 0 \quad (56)$$

が成り立つ．また，固有関数は完全直交関数系をなしているから，任意の関数 $u(x)$ はこれら固有関数で展開することができる．

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \eta_n u_n(x) \quad (57)$$

ただし，固有関数は規格化されており，展開整数 η_n は次式で与えられるものとする．

$$\eta_n = \int_a^b u(x)u_n(x)\rho(x)dx \quad (58)$$

(55) に $u_n(x)$ を掛け，(56) に $u(x)$ を掛けて辺々差し引くと

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[u]u_n + k\rho uu_n - (\mathcal{L}[u_n]u + \lambda_n \rho u_n u) &= f u_n \\ \mathcal{L}[u]u_n - \mathcal{L}[u_n]u + (k - \lambda_n)\rho uu_n &= f u_n \end{aligned} \quad (59)$$

次にこの両辺を a から b まで積分すると，演算子 \mathcal{L} はエルミートであったから

$$\int_a^b (\mathcal{L}[u]u_n - \mathcal{L}[u_n]u)dx = 0$$

となる．結局 (59) の積分は (58) を使って

$$\begin{aligned} (k - \lambda_n) \int_a^b \rho(x)u(x)u_n(x)dx &= \int_a^b f(x)u_n(x)dx \\ (k - \lambda_n)\eta_n &= \int_a^b f(x)u_n(x)dx \end{aligned} \quad (60)$$

となる．これから $\lambda_n \neq k$ のとき， η_n は

$$\eta_n = \frac{1}{k - \lambda_n} \int_a^b f(\xi)u_n(\xi)d\xi \quad (61)$$

となる．これを (57) に代入し，積分と和の順序を入れ替えると

$$\begin{aligned} u(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{k - \lambda_n} \int_a^b f(\xi)u_n(\xi)d\xi \right) u_n(x) \\ &= \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{k - \lambda_n} u_n(\xi)u_n(x) \right) f(\xi)d\xi \\ &= \int_a^b G(x, \xi)f(\xi)d\xi \end{aligned} \quad (62)$$

が得られる．ただし，

$$G(x, \xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{k - \lambda_n} u_n(\xi)u_n(x) \quad (63)$$

とおいた．これが求めるグリーン関数である．というのは (55) で $f(x) = \delta(x - \xi)$ とおくと

$$\mathcal{L}u(x) + k\rho(x)u(x) = \delta(x - \xi)$$

また, (62) より

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_a^b G(x, \alpha) f(\alpha) d\alpha = \int_a^b G(x, \alpha) \delta(\alpha - \xi) d\alpha \\ &= G(x, \xi) \end{aligned} \tag{64}$$

となるから, $G(x, \xi)$ はまさにグリーン関数であることがわかる．また, $k = 0$ の場合のグリーン関数は

$$G(x, \xi) = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} u_n(\xi) u_n(x) \tag{65}$$

となる．さて, それでは早速演習問題をやってみましょう．

例題-7 境界条件 $G(0, \xi) = G(\ell, \xi) = 0$ の下で

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + k^2 \right) G(x, \xi) = \delta(x - \xi)$$

を満たすグリーン関数を固有関数展開法で求めよ．

【解】 $\frac{d^2 u}{dx^2} + k^2 = 0, \quad u(0) = u(\ell) = 0$ の固有値と固有関数を求める．

この解は c_1, c_2 を定数として

$$u(x) = c_1 \cos kx + c_2 \sin kx$$

境界条件より

$$\begin{cases} u(0) = 0: & u(0) = c_1 = 0 \longrightarrow u(x) = c_2 \sin kx \\ u(\ell) = 0: & u(\ell) = c_2 \sin k\ell = 0 \longrightarrow k_n = \frac{n\pi}{\ell} \quad (n = 1, 2, \dots) \end{cases} \tag{66}$$

固有関数¹³はしたがって

$$\sin \frac{n\pi}{\ell} x$$

となる．固有値 λ_n は

$$\lambda_n = k_n^2 = \left(\frac{n\pi}{\ell} \right)^2$$

この固有関数を規格化すると $\int_0^\ell \left[\sin \frac{n\pi}{\ell} x \right]^2 dx = \frac{\ell}{2}$ より規格化固有関数 u_n は

$$u_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\ell}} \sin \frac{n\pi}{\ell} x$$

となる． $u_n(x)$ は完全正規直交系であるから

$$\sum_n u_n(x) u_n(\xi) = \delta(x - \xi)$$

¹³ $n = 0$ は固有関数 $\sin nx$ が恒等的に 0 になる．固有値ではない．

が成り立つ．したがって求めるグリーン関数は

$$\begin{aligned}
 G(x, \xi) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n(x)u_n(\xi)}{k^2 - \lambda_n} \\
 &= \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{a} \xi}{k^2 - \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2}
 \end{aligned} \tag{67}$$

2.2.4 その4 (フーリエ変換法)

フーリエ変換を用いる方法について述べる．この方法は常微分方程式の場合，かえって複雑になることが多く，あまり使われない．一方，偏微分方程式の場合には常套手段となっている．詳しいことは「対話・グリーン関数」を参照されたい．

さて，

$$\frac{d^2 G_s}{dt^2} - \mu^2 G_s = \delta(t - \xi) \quad (\mu > 0) \tag{68}$$

の主要解 G_s をフーリエ変換で求めてみる． G_s のフーリエ変換は

$$\begin{aligned}
 g(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} G_s(t, \xi) e^{-i\omega(t-\xi)} dt \\
 G_s(t, \xi) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) e^{i\omega(t-\xi)} d\omega
 \end{aligned} \tag{69}$$

G_s の時間微分は，

$$\begin{aligned}
 \frac{dG_s}{dt} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} i\omega g(\omega) e^{i\omega(t-\xi)} d\omega \\
 \frac{d^2 G_s}{dt^2} &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 g(\omega) e^{i\omega(t-\xi)} d\omega
 \end{aligned} \tag{70}$$

δ 関数のフーリエ変換は

$$\begin{aligned}
 1 &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - \xi) e^{-i\omega(t-\xi)} dt \\
 \delta(t - \xi) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot e^{i\omega(t-\xi)} d\omega
 \end{aligned} \tag{71}$$

これらの式を (68) に代入すると

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} (-\omega^2 - \mu^2) g(\omega) e^{i\omega(t-\xi)} d\omega &= \int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot e^{i\omega(t-\xi)} d\omega \\
 g(\omega) &= -\frac{1}{\omega^2 + \mu^2}
 \end{aligned} \tag{72}$$

これを (69) に入れると

$$\begin{aligned} G_s(t, \xi) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\omega^2 + \mu^2} e^{i\omega(t-\xi)} d\omega \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\omega - i\mu)(\omega + i\mu)} e^{i\omega(t-\xi)} d\omega \end{aligned} \quad (73)$$

$G_s(t, \xi)$ は極 $\pm i\mu$ をもつ . C_1 経路の積分を計算¹⁴すると

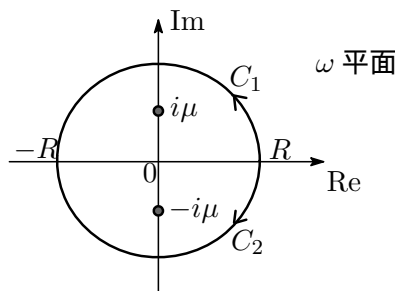
$$\begin{aligned} G_s(t, \xi) &= 2\pi i \operatorname{Res}[G_s, i\mu] = 2\pi i \lim_{\omega \rightarrow i\mu} (\omega - i\mu) \frac{1}{(\omega - i\mu)(\omega + i\mu)} e^{i\omega(t-\xi)} d\omega \\ &= -\frac{1}{2\mu} e^{-\mu(t-\xi)} \end{aligned} \quad (74)$$

次に , C_2 経路の積分を計算すると

$$\begin{aligned} G_s(t, \xi) &= -2\pi i \operatorname{Res}[G_s, -i\mu] = 2\pi i \lim_{\omega \rightarrow -i\mu} (\omega + i\mu) \frac{1}{(\omega - i\mu)(\omega + i\mu)} e^{i\omega(t-\xi)} d\omega \\ &= -\frac{1}{2\mu} e^{\mu(t-\xi)} \end{aligned} \quad (75)$$

となる . 求める主要解は , したがって

$$G_s(t, \xi) = \begin{cases} -\frac{1}{2\mu} e^{-\mu(t-\xi)} & (t > \xi) \\ -\frac{1}{2\mu} e^{\mu(t-\xi)} & (t < \xi) \end{cases} \quad (76)$$



(68) の一般解¹⁵ $G(t, \xi)$ はこの $G_s(t, \xi)$ と同次微分方程式 $\frac{d^2 u}{dx^2} - \mu^2 u = 0$ の解をもちいて

$$G(t, \xi) = G_s(t, \xi) + k_1 e^{\mu t} + k_2 e^{-\mu t} \quad (77)$$

と表される . 境界条件として

$$G(0, \xi) = G(\ell, \xi) = 0 \quad (0 < \xi < \ell) \quad (78)$$

¹⁴複素積分の詳細は拙稿【対話】ローラン展開と留数・主値積分を参照されたい .

¹⁵非同次線形微分方程式 $L(y) = R(x)$ の一般解は $L(y) = R(x)$ の特殊解と $L(y) = 0$ の一般解の和で表される .

が与えられたとすると

$$\begin{aligned}0 &= G_s(0, \xi) + k_1 + k_2 \\0 &= G_s(\ell, \xi) + k_1 e^{\mu t} + k_2 e^{-\mu t}\end{aligned}\tag{79}$$

が成り立つ．これから k_1, k_2 を求めると

$$\begin{aligned}k_1 &= \left(\frac{1}{2\mu} e^{-\mu(t+\xi)} - \frac{1}{2\mu} e^{-\mu(t-\xi)} \right) / \Delta \\k_2 &= \left(\frac{1}{2\mu} e^{-\mu(t-\xi)} - \frac{1}{2\mu} e^{-\mu(t+\xi)} \right) / \Delta\end{aligned}\tag{80}$$

ただし， $\Delta = e^{-\mu t} - e^{\mu t}$ ．求めるグリーン関数はしたがって

$$G(t, \xi) = G_s(t, \xi) + \frac{1}{2\mu\Delta} \left[e^{-\mu t} \left\{ e^{-\mu(\xi-t)} + e^{-\mu(t\xi)} \right\} - e^{-\mu(\ell-\xi-t)} - e^{-\mu(-\ell+\xi+t)} \right]\tag{81}$$

で与えられる．

***** おわり *****

ここまでお付き合いいただきまして大変お疲れ様でした．以上で本稿を終わります．細かな計算はミスがあるかも知れませんが，その辺は適当に修正しながら読み進めてください．またおかしな議論をしているかも知れません．そのようなところがあれば，労をかけて申し訳ないですがご指摘をいただくとありがたい．

グリーン関数 (1) (2) でグリーン関数の基礎編を一応終了し，次回は形式的なグリーン関数のお話をレポートしようかなと考えています (いつになるか分らんが) ．

一応参考したテキストを載せておきます．本稿を一読されたらこれら参考テキストに取り組みられるのもいいのではと思います．

それでは，またお会いできることを楽しみに

See you again and Goo Luck!!

参考文献

- [1] 松浦武信，高橋宣明，吉田廣「物理・工学のためのグリーン関数入門」2000.11 (東海大学出版)
- [2] 今村勤「物理とグリーン関数」1978.06 (岩波書店)
- [3] 小野寺嘉孝「物理のための応用数学」2005.6 (裳華房)