

テンソル談議

KENZOU

2012年10月28日

2012年11月16日

付録追記

目次

第 1 話	テンソルとはなんだ	5
1.1	テンソルとはなんだ	5
1.1.1	線形条件	6
1.1.2	2 階テンソル	6
1.1.3	応力テンソル	8
第 2 話	テンソルの定義とその種類	12
2.1	多重線形形式によるテンソルの定義	12
2.1.1	双線形形式	12
2.1.2	多重線形形式	14
2.2	テンソルの演算	15
2.2.1	単位テンソルとゼロテンソル	15
2.2.2	和, 差, スカラー倍とテンソル積	16
	p 階と q 階のテンソル積は $p + q$ 階のテンソル	16
	ベクトルのテンソル積はダイアド	17
	2 階テンソルの基底	18
	3 階テンソルの基底	19
	テンソルの内積	19
2.3	対称・反対称テンソル	20
2.3.1	対称テンソル	20
	対称テンソルの独立成分数	21
2.3.2	反対称テンソル	22
	3 階反対称テンソルの独立成分の数	22
	4 階以上の反対称テンソルは存在しない	23
	任意の 2 階テンソルは対称テンソルと反対称テンソルの和	23
2.3.3	交代積 (ウェッジ積)	24
2.3.4	テンソルの既約分解	26
第 3 話	テンソルを座標変換すると	28
3.1	座標変換とテンソル	28
	空間反転では $\det A = -1$	28
3.1.1	テンソルの座標変換	29
	テンソルの座標変換公式	30
	対称性・反対称性は座標変換に依存しない	31
	テンソルの基底を使った変換公式	31
	テンソルとベクトルの積など	32
3.1.2	縮約	33

	縮約によりテンソルの階数は2階減る	34
3.1.3	軸性テンソル(擬テンソル)	37
	極性ベクトルと軸性ベクトル	37
	軸性テンソル(擬テンソル)	38
	2階反対称テンソルと軸性ベクトル	39
3.1.4	商法則	42
3.2	等方テンソル	43
3.2.1	2階等方テンソル	43
3.2.2	高階等方テンソル	45
	等方テンソルの形は限定されている	45
第4話	テンソル2次曲面とテンソル場	46
4.1	テンソル2次曲面	46
4.1.1	主軸問題の復習	46
4.1.2	テンソル不変量	48
4.1.3	テンソル2次曲面	50
	主軸方向はテンソルの主方向	50
	慣性テンソルの対角化	51
4.2	テンソル場	52
4.2.1	場という概念について	52
4.2.2	スカラー場とベクトル場	53
	スカラー場	53
	スカラー場の勾配はベクトル場	53
	スカラー場の方向微分係数	54
	ベクトル場	55
	ベクトル場の発散はスカラー場	55
	ベクトル場の回転はベクトル場(擬ベクトル場)	56
	テンソル場	57
	ベクトル場の勾配は2階テンソル場	57
	2階テンソル場の勾配は3階テンソル場	57
	2階テンソル場の発散はベクトル場	58
第5話	斜交座標とテンソル	60
5.1	斜交座標	60
5.1.1	ベクトルの反変成分と共変成分	61
5.1.2	座標変換	64
5.1.3	反変基底(双対基底)	66
5.2	2階テンソルの座標変換	68
5.2.1	混合テンソル成分	68
5.2.2	共変成分の座標変換	68
5.2.3	反変成分の座標変換	69
5.2.4	混合成分の座標変換	69
5.2.5	混合成分と共変・反変成分の関係	70

第 6 話	曲線座標とテンソル	71
6.1	曲線座標	71
6.1.1	自然基底	72
6.2	ベクトル場・テンソル場・スカラー場	73
6.2.1	ベクトル場	73
6.2.2	テンソル場	75
6.2.3	スカラー場	75
6.3	計量テンソル	75
6.4	共変微分	76
6.4.1	クリストッフェルの記号	76
	クリストッフェル記号の座標変換	77
6.4.2	スカラー場の共変微分	78
6.4.3	ベクトル場の共変微分	79
	反変ベクトル成分の共変微分	79
	共変ベクトル成分の共変微分	80
6.4.4	テンソル場の共変微分	81
	2 階反変テンソル成分の共変微分	81
	2 階共変テンソル, 混合テンソル成分の共変微分	83
6.4.5	計量テンソルの共変微分	84
6.5	発散と回転	85
6.5.1	発散	85
6.5.2	回転	86
6.6	曲率テンソル	87
6.7	直交曲線座標	87
6.7.1	勾配・発散・回転	89
A.1	共変微分について	91
A.1.1	ベクトルの平行移動	91
A.1.2	共変微分	93
A.2	測地線	94
A.2.1	レビ・チビタの平行性	94
A.2.2	測地線	95
A.3	曲率テンソルの物理的意味	97