やさしい連立微分方程式

$\mathscr{KENZOU}$

2008 年 11 月 8 日

♣ 簡単な線形連立微分方程式の話です。これはいわゆる線形力学系の記述（数学の分野では活発にやられていますね。わたしはサッパリ分かりません：－），具体的には振動系などを解析する相空間解析のところなどででてきますが，今回はそれに関連する話はバッサリ切り捨て，連立微分方程式のアウトラインにとどめます。より突っ込んだ内容は適当なテキストでそれぞれフォローしてください。尚，本稿をまとめるに際して，小寺平治「なっとくする微分方程式」を参照しました。

1　連立線形微分方程式と線形代数

1.1　具体的に解いてみよう

線形代数の知識を使って簡単な連立線形微分方程式を解いていきましょう。ターゲットの方程式を

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 4x_1 - 2x_2 \\[2ex] \dfrac{dx_2}{dt} = x_1 + x_2 \end{cases} \tag{1.1}$$

とします。これは別に連立しなくても第 1 式目より

$$x_2 = 2x_1 - \frac{1}{2}\frac{dx_1}{dt}, \quad \frac{dx_2}{dt} = 2\frac{dx_1}{dt} - \frac{1}{2}\frac{d^2x_1}{dt^2} \tag{1.2}$$

となり，これを第 2 式に入れると

$$\frac{dx_2}{dt} = 3x_1 - \frac{1}{2}\frac{dx_1}{dt}$$

$$\therefore \quad \frac{d^2x_1}{dt^2} - 5\frac{dx_1}{dt} + 6x_1 = 0$$

となって，定数係数 2 階同次線形微分方程式となります。したがって，これを解いてもよいわけです。ただ，微分方程式は階数が上がると解くのが難しくなるので階数を下げて連立微分方程式の形に持ち込むということがよくやられます。余談になりますが，一般に 2 階線形微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} + P_1(t)\frac{dx}{dt} + P_2(t)x = Q(x)$$

を連立微分方程式にして階数を下げるには，

$$x = x_1, \quad x_2 = \frac{dx}{dt}$$

とおいてやります。そうすると上の 2 階線形微分方程式は

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_2 \\[2ex] \dfrac{dx_2}{dt} = -P_2(t)x_1 - P_1(t)x_2 + Q(x) \end{cases} \tag{1.3}$$

という未知関数 x_1, x_2 の連立微分方程式に焼きなおすことができます。本題に戻ります。（1.1）は次のように行列で表すことができますね。

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

これは

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

とすると

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \tag{1.4}$$

とスッキリした形にかけます。$\boldsymbol{A}$を係数行列といいます。$\boldsymbol{A}$が仮に対角化できれば（常に対角化できるとは限らないが），成分の混ざりあいがなくなるので微分方程式も簡単に解けることになります。そこで行列$\boldsymbol{A}$が対角化できるとして以下具体的にその処方を見ていくことにします。これは線形代数でいう固有値問題ですね。$\boldsymbol{A}$の固有値を λ とすると λ は次の固有方程式の根となります[1]。

$$|\,\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E}\,| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0, \quad \therefore \lambda_1 = 2,\, \lambda_2 = 3$$

ここで$\boldsymbol{E}$は単位マトリクスで，次のように書かれます。

$$\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

次に各固有値に属する固有ベクトル$\boldsymbol{p}$を求めていきます。固有ベクトル $\boldsymbol{p}$ は

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{p} = \lambda\boldsymbol{p}$$

から求められます。

(1) 固有値 $\lambda_1 = 2$ の固有ベクトルを $\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix}$ とすると

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} 4p_{11} - 2p_{21} = 2p_{11} \\ p_{11} + p_{21} = 2p_{21} \end{cases}$$

これからこの解の一つとして

$$p_{11} = 1,\ p_{21} = 1 \longrightarrow \boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

が得られます。

(2) $\lambda_2 = 3$ の固有ベクトルを $\boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{pmatrix}$ とすると，同様にして[2]

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} 4p_{12} - 2p_{22} = 3p_{12} \\ p_{12} + p_{22} = 3p_{22} \end{cases} \longrightarrow p_{12} = 2p_{22}$$

これからこの解の一つとして

$$p_{12} = 2,\ p_{22} = 1 \longrightarrow \boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

が得られます。

上で求めた固有ベクトルをまとめた行列$\boldsymbol{P}$は

$$\boldsymbol{P} = (\,\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2\,) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

[1] 固有値はケーリー・ハミルトンの定理より容易に求められます。
[2] 2011.8.23 kana さんから誤記の指摘あり。Thank's kana さん、修正しておきました。

で表され，この逆行列$\boldsymbol{P}^{-1}$ は

$$\boldsymbol{P}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

となります。なお，$\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}^{-1} = \boldsymbol{E}$ですね。

※一口メモ；逆行列の求め方　(注) 右辺分母がゼロになれば逆マトリクスは存在しない。

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longrightarrow \boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

　これらを使うとマトリクス$\boldsymbol{A}$は次のようにして対角化することができます。

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

これでマトリクス$\boldsymbol{A}$を対角化する行列$\boldsymbol{P}$が見つかりましたので, (1.4) に戻って対角行列 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ をつくるために (1.4) の左辺から$\boldsymbol{P}^{-1}$ をかけてやると

$$\boldsymbol{P}^{-1}\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x} \tag{1.5}$$

となります。左辺の $\boldsymbol{P}^{-1}$ は定数で，微分記号の中に入れてもよいので (1.5) は次のように表せます。

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{D}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x} \tag{1.6}$$

ここまでくればあともう少しです。$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}$ あるいは $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ とおくと (1.6) は次のように書くことができます。

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{dt} = \boldsymbol{D}\boldsymbol{y} \tag{1.7}$$

成分表示で書き直してこの微分方程式の解を求めると

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad \frac{dy_1}{dt} = 2y_1 \longrightarrow y_1 = y_1(0)e^{2t}$$

$$\frac{dy_2}{dt} = 3y_1 \longrightarrow y_2 = y_2(0)e^{3t}$$

となります。したがって行列,$\boldsymbol{y}$ は

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix}\boldsymbol{y}(0)$$

となります。いよいよ最後です。$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}$ とおきました。$\boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}(0)$ となりますから

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{P}\begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix}\boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{P}\begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}(0)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\boldsymbol{x}(0)$$

行列の演算ばかりで辟易しますが（笑い）ともかく計算を進めると

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{2t}+2e^{3t} & e^{-2t}+e^{3t} \\ 2e^{2t}-2e^{3t} & 2e^{2t}-e^{3t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad x_1 = \{-x_1(0)+2x_2(0)\}e^{2t} + 2\{x_1(0)-x_2(0)\}e^{3t} = c_1e^{2t} + 2c_2e^{3t}$$

$$x_2 = \{-x_1(0)+2x_2(0)\}e^{2t} + \{x_1(0)-x_2(0)\}e^{3t} = c_1e^{2t} + c_2e^{3t}$$

となり，求める解がでてきます。尚，この辺りのお話の一般化はのちほどでてきますのでお楽しみに。

※一口メモ：2 行 2 列の行列の対角化可能性について

$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ という行列はどのような条件のときに対角化できるか？

固有方程式は

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc = 0$$

で，これがあい異なる 2 つの解（虚数解も OK）をもてば対角化が可能 $\longrightarrow$ 判別式 $\neq 0$

対角化可能条件

$$(a+d)^2 - 4(ad-bc) = (a-d)^2 + 4bc \neq 0 \tag{1.8}$$

判別式 $= 0$ の場合，固有方程式は重解を持ち，固有値 $\lambda = (a+d)/2$ の一つだけとなる。

1.2 指数行列

連立微分方程式をベクトル形式であらわすと

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \tag{1.9}$$

という形になることをみました。この形を見て

$$\frac{1}{\boldsymbol{x}}d\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}dt \longrightarrow d\ln\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}dt \longrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(0)e^{\boldsymbol{A}t} \tag{1.10}$$

と ”解 ”が求まるんじゃないのと洞察された方は凄い！ただ解に含まれる $e^{\boldsymbol{A}t}$ という，指数関数の肩に行列$\boldsymbol{A}$が乗っているものをどう処理するかということが悩ましいですね。これは指数行列（exponential matrix）と呼ばれるもので，$\boldsymbol{A}$を正方行列とすると $e^{\boldsymbol{A}}$ は次のテイラー展開で定義されます。

$$e^{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{E} + \boldsymbol{A} + \frac{1}{2!}\boldsymbol{A}^2 + \frac{1}{3!}\boldsymbol{A}^3 + \cdots + \frac{1}{n!}\boldsymbol{A}^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\boldsymbol{A}^n \tag{1.11}$$

このベキ級数はどんな正方行列$\boldsymbol{A}$をとっても収束することが証明されています。それでは定義に従って早速指数行列の計算をやってみます。$\boldsymbol{A}$を次の対角行列

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

とします。テイラー展開すると

$$\begin{aligned}
e^{\boldsymbol{A}} &= \boldsymbol{E} + \boldsymbol{A} + \frac{1}{2!}\boldsymbol{A}^2 + \frac{1}{3!}\boldsymbol{A}^3 + \cdots \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} + \frac{1}{2!}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 + \frac{1}{3!}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^3 + \cdots \\
&= \begin{pmatrix} 1 + a + \frac{1}{2!}a^2 + \frac{1}{3!}a^3 + \cdots & 0 \\ 0 & 1 + b + \frac{1}{2!}b^2 + \frac{1}{3!}b^3 + \cdots \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} e^a & 0 \\ 0 & e^b \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

となります。

次に非対角行列$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} b & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}$の指数行列を計算します。

$$
\begin{aligned}
e^{\boldsymbol{B}} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix} + \frac{1}{2!}\begin{pmatrix} b & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 + \frac{1}{3!}\begin{pmatrix} b & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}^3 + \cdots \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix} + \frac{1}{2!}\begin{pmatrix} b^2 & 2b \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3!}\begin{pmatrix} b^3 & 3b^2 \\ 0 & b^3 \end{pmatrix} + \cdots \\
&= \begin{pmatrix} 1+b+\frac{1}{2!}b^2+\frac{1}{3!}a^3+\cdots & 1+\frac{2}{2!}b+\frac{3}{3!}b^2+\cdots \\ 0 & 1+b+\frac{1}{2!}b^2+\frac{1}{3!}b^3+\cdots \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} e^b & e^b \\ 0 & e^b \end{pmatrix} = e^b\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

もう一つみておきましょう。$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix}$とすると

$$
\begin{aligned}
e^{\boldsymbol{C}} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2!}\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix}^2 + \frac{1}{3!}\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix}^3 + \cdots \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2!}\begin{pmatrix} -\alpha^2 & 0 \\ 0 & -\alpha^2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3!}\begin{pmatrix} 0 & -\alpha^3 \\ \alpha^3 & 0 \end{pmatrix} + \cdots \\
&= \begin{pmatrix} 1-\frac{1}{2!}\alpha^2+\frac{1}{4!}\alpha^4+\cdots & c-\frac{1}{3!}\alpha^3+\frac{1}{5!}\alpha^5+\cdots \\ -\alpha+\frac{1}{3!}\alpha^3-\frac{1}{5!}\alpha^5+\cdots & 1-\frac{1}{2!}\alpha^2+\frac{1}{4!}\alpha^4+\cdots \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

となります。これをさらに分解すると

$$
e^{\boldsymbol{C}} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 \\ 0 & \cos\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cos\alpha + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\sin\alpha
$$

となります。そこでマトリクス$\boldsymbol{K}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$を考えると，$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{K}\alpha$だから$e^{\boldsymbol{C}}$は

$$
e^{\boldsymbol{C}} = e^{\boldsymbol{K}\alpha}
$$

と書け，結局

$$
e^{\boldsymbol{C}} = e^{\boldsymbol{K}\alpha} = \boldsymbol{E}\cos\alpha + \boldsymbol{K}\sin\alpha \tag{1.12}
$$

と表すことができます。なにやらオイラーの公式（$e^{i\theta}=\cos\alpha+i\sin\alpha$）のようなものがでてきました。虚数というのは 2 乗した値がゼロを超えない実数になる複素数と定義されますが，行列$\boldsymbol{K}$の 2 乗は

$$
\boldsymbol{K}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{1}
$$

で，虚数の定義に即しています。そこで行列$\boldsymbol{K}$を虚数の行列表現であるとすると，(1.12）は指数行列のオイラー公式ということになりますね！

最後にもう一つ，$\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$という行列を考えましょう。行列$\boldsymbol{D}$は上の処方に倣って

$$
\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}a + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}b = \boldsymbol{E}a + \boldsymbol{K}b \tag{1.13}
$$

と表すことができます。したがって，指数行列 $e^{\boldsymbol{D}}$ はいままでの結果を利用すると

$$e^{\boldsymbol{D}} = e^{\boldsymbol{E}a+\boldsymbol{K}b} = e^{\boldsymbol{E}a}\,e^{\boldsymbol{K}b} = e^{\boldsymbol{E}a}\begin{pmatrix} \cos b & \sin b \\ -\sin b & \cos b \end{pmatrix} = e^{a}\begin{pmatrix} \cos b & \sin b \\ -\sin b & \cos b \end{pmatrix}$$

と表すことができます。ただし，上の展開で指数関数の肩の和を ”実数の場合と同じように ”指数関数の積で表しましたが，このようにできるのは指数関数の肩に乗っているマトリクスが互いに可換である場合だけ可能です（←下記「指数マトリクスの基本的性質」を参照ください）。結局マトリクス$\boldsymbol{D}$は（1.13）より複素数 $a+bi$ に対応していることがわかります。

さて，ここで指数マトリクス $e^{\boldsymbol{A}}$ の基本的な性質を証明なしに上げておきます。証明が必要な方は適当な線形代数のテキストを参照ください。

■指数マトリクスの基本的な性質

(1) $\boldsymbol{AB}$=$\boldsymbol{BA}$　ならば　$e^{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}} = e^{\boldsymbol{A}}\,e^{\boldsymbol{B}}$

　　$\longrightarrow$ ただし，$\boldsymbol{A}$と$\boldsymbol{B}$が可換でないとき（$\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}$）には一般には成立しません。

(2) $e^{\boldsymbol{PAP}^{-1}} = \boldsymbol{P}e^{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{P}^{-1}$

(3) $\left(e^{\boldsymbol{A}}\right)^{-1} = e^{-\boldsymbol{A}}$

(4) $\dfrac{d}{dt}e^{t\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{A}e^{t\boldsymbol{A}}$

1.3　指数行列の具体的計算例

指数行列 $e^{t\boldsymbol{A}}$ の具体的な計算法を見ていきます。前項では定義に従ってテイラー展開しましたが，実はこれは労多くしてうまいやり方ではないのです。実際の計算には，上の基本的性質 (2) を使います。つまり $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ を求め，

$$e^{t\boldsymbol{A}} = e^{t\boldsymbol{PDP}^{-1}} = \boldsymbol{P}e^{t\boldsymbol{D}}\boldsymbol{P}^{-1} \tag{1.14}$$

とやって求めていくわけです。具体的な計算をはじめる前にいままでの結果を整理しておきます。

■計算例

(a) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \Longrightarrow e^{t\boldsymbol{A}} = \begin{pmatrix} e^{at} & 0 \\ 0 & e^{bt} \end{pmatrix}$

(b) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \Longrightarrow e^{t\boldsymbol{A}} = e^{at}\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \Longrightarrow e^{t\boldsymbol{A}} = e^{at}\begin{pmatrix} \cos at & \sin bt \\ -\sin bt & \cos bt \end{pmatrix}$

それでは計算をやっていきます。

●例ー１：$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ の指数行列 $e^{t\boldsymbol{A}}$ を計算せよ。

○**解答**：上の (2) より即座に $e^{t\boldsymbol{A}} = e^{-4t}\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ が得られます。労多いやり方としては (笑い),

$$\begin{aligned} e^{t\boldsymbol{A}} &= e^{\left\{\begin{pmatrix} -4t & 0 \\ 0 & -4t \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}} = e^{-4t\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \times e^{\begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} \\ &= e^{-4t}\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

●**例－ 2**：$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$ の指数行列 $e^{t\boldsymbol{A}}$ を計算せよ。

○**解答**：行列$\boldsymbol{A}$を対角化します。$\boldsymbol{A}$の固有値 λ は $|\ \boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E}\ | = 0$ の根ですから

$$|\ \boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E}\ | = (\lambda - 4)(\lambda - 5) = 0, \quad \therefore \lambda_1 = 4,\ \lambda_2 = 5$$

$\lambda_1 = 4$ に属する固有ベクトルは $\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix}$ とおいて，固有方程式 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{p} = \lambda_1\boldsymbol{p}$ より

$$\begin{cases} 3p_{11} + p_{21} = 4p_{11} \\ -2p_{11} + 6p_{21} = 4p_{21} \end{cases}$$

この解の一つとして $\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ をとることにします。

$\lambda_2 = 5$ に属する固有ベクトルは上と同様にして固有方程式より

$$\begin{cases} 3p_{12} + p_{22} = 5p_{12} \\ -2p_{12} + 6p_{22} = 5p_{22} \end{cases}$$

これからこの解の一つとして $\boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ をとることにします。

これから固有ベクトル $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$，その逆行列として $\boldsymbol{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ が得られます。したがって$\boldsymbol{A}$の対角マトリクスを$\boldsymbol{D}$とすると

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

また，$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{D}\boldsymbol{P}^{-1}$ であるので「基本的な性質 (2)」と「計算例 (a)」より

$$e^{t\boldsymbol{A}} = e^{t\boldsymbol{P}\boldsymbol{D}\boldsymbol{P}^{-1}} = \boldsymbol{P}e^{t\boldsymbol{D}}\boldsymbol{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{4t} & 0 \\ 0 & e^{5t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{4t} - e^{5t} & -e^{4t} + e^{5t} \\ 2e^{4t} - 2e^{5t} & -e^{4t} + 2e^{5t} \end{pmatrix}$$

が得られます。

●**例－ 3**：$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 9 & -9 \end{pmatrix}$ の指数行列 $e^{t\boldsymbol{A}}$ を計算せよ。

○解答：$\boldsymbol{A}$の固有値 λ は

$$|\ \boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E}\ | = (\lambda + 3)^2 = 0, \quad \therefore \lambda = -3,\ -3$$

この場合，固有値は重解となりました[3]。固有値が重解となる場合，$\boldsymbol{A}$を対角化する正則行列[4]$\boldsymbol{P}$は一般に存在しません。そこで

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \tag{1.15}$$

[3] 固有値が縮退しているともいわれます。
[4] 正則行列とは逆行列をもつ正方行列のこと。

とおきます。変換行列$\boldsymbol{P}$を $\boldsymbol{P}=(\,\boldsymbol{p}\,,\,\boldsymbol{q}\,)$ とおくと（1.15）より

$$\begin{aligned}(\,\boldsymbol{Ap},\,\boldsymbol{Aq}\,)&=\boldsymbol{A}(\,\boldsymbol{p}\,,\,\boldsymbol{q}\,)=\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{PD}\\&=(\,\boldsymbol{p}\,,\,\boldsymbol{q}\,)\begin{pmatrix}-3&1\\0&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3p_1&p_1-3q_1\\-3p_2&p_2-3q_2\end{pmatrix}=(\,-3\boldsymbol{p},\,\boldsymbol{p}\text{-}3\boldsymbol{q}\,)\end{aligned}$$

これから

$$\begin{cases}\boldsymbol{Ap}=-3\boldsymbol{p}\\\boldsymbol{Aq}=\boldsymbol{p}-3\boldsymbol{q}\end{cases}\tag{1.16}$$

を得ます。1 番目の式から

$$\begin{pmatrix}3&-4\\9&-9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p_1\\p_2\end{pmatrix}=-3\begin{pmatrix}p_1\\p_2\end{pmatrix}\longrightarrow\quad 6p_1=4p_2,\;9p_1=6p_2$$

この解として $\boldsymbol{p}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ を選ぶと，2 番目の式は

$$\begin{pmatrix}3&-4\\9&-9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}q_1\\q_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}q_1\\q_2\end{pmatrix}\longrightarrow\quad 6q_1-4q_2=2,\;9q_1-6q_2=3$$

となり，この解として $\boldsymbol{q}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ を選びます。そうすると $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}2&1\\3&1\end{pmatrix}$ で $\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}-1&1\\3&-2\end{pmatrix}$ となります。（1.14）より

$$e^{t\boldsymbol{A}}=e^{t\boldsymbol{PDP}^{-1}}=\boldsymbol{P}e^{t\boldsymbol{D}}\boldsymbol{P}^{-1}\tag{1.17}$$

また＜計算例 (b) ＞より

$$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}-3&1\\0&-3\end{pmatrix}$$

$$e^{t\boldsymbol{D}}=e^{-3t}\begin{pmatrix}1&t\\0&1\end{pmatrix}$$

なので（1.17）は

$$\begin{aligned}e^{t\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{P}e^{t\boldsymbol{D}}\boldsymbol{P}^{-1}&=e^{-3t}\begin{pmatrix}2&1\\3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&t\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1\\3&-2\end{pmatrix}\\&=e^{-3t}\begin{pmatrix}1+6t&-4t\\9t&1-6t\end{pmatrix}\text{となります。}\end{aligned}$$

●例－ 4：$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}5&-3\\6&-1\end{pmatrix}$ の指数行列 $e^{t\boldsymbol{A}}$ を計算せよ。

○解答：$\boldsymbol{A}$の固有値 λ は

$$|\,\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}\,|=(\lambda-2)^2+3^2=0,\quad\therefore\lambda_1=2+3i,\,\lambda_2=\lambda_1^*=2-3i$$

2 つの固有値は共役複素数となっています。$\lambda_1=2+3i$ に属する固有ベクトル $\boldsymbol{p}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ は $\boldsymbol{Ap}=\lambda_1\boldsymbol{p}$ の解なので

$$\begin{cases}5x-3y=(2+3i)x\\6x-y=(2+3i)y\end{cases}$$

を解いてこの解の一つとして

$$\boldsymbol{p}=\begin{pmatrix}1\\1-i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+i\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}=\boldsymbol{p}+i\boldsymbol{q}$$

をとります。この解を使って変換行列 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})$ とおくと

$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})=\begin{pmatrix}1&0\\1&-1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0\\1&-1\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&-3\\6&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&3\\-3&2\end{pmatrix}$$

＜計算例 (c) ＞より

$$e^{t\boldsymbol{D}}=e^{2t}\begin{pmatrix}\cos 3t&\sin 3t\\-\sin 3t&\cos 3t\end{pmatrix}$$

したがって，

$$\begin{aligned}e^{t\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{P}e^{t\boldsymbol{D}}\boldsymbol{P}^{-1}&=e^{2t}\begin{pmatrix}1&0\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos 3t&\sin 3t\\-\sin 3t&\cos 3t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&-1\end{pmatrix}\\&=e^{2t}\begin{pmatrix}\cos 3t+\sin 3t&-\sin 3t\\2\sin 3t&\cos 3t-\sin 3t\end{pmatrix}\end{aligned}$$

が得られます。

※ 一口メモ：ケーリー・ハミルトンの定理と固有方程式

行列 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ の固有値を λ とすると λ は

$$f(\lambda)=\lambda^2-(a+d)\lambda+(ad-bc)=0$$

の根である。これをケーリー・ハミルトンの定理と呼んでいます。

$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&1\\-2&6\end{pmatrix}$ の固有値を求めてみましょう。

$$f(\lambda)=\lambda^2-9\lambda+20=(\lambda-4)(\lambda-5)=0,\quad \therefore\lambda=4,\,5$$

固有値が重解の場合でも同様にして求められます。尚，3 次の正方行列の場合は次のようになります。

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{pmatrix}$$

$$f(\lambda)=\lambda^3-(a+e+i)\lambda^2+(ae-bd+ai-cg+ei-fh)\lambda+(aei+bfg+cdh-ceg-bdi-afh)=0$$

詳細は適当な線形代数のテキストを参照下さい。

2　定数係数連立同次線形微分方程式

さて，同次の連立微分方程式を解いていくことにします。この場合の連立微分方程式は

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \tag{2.1}$$

と書けます。この一般解は $\boldsymbol{c}$ を任意の定ベクトルとすると

$$\boldsymbol{x}=e^{t\boldsymbol{A}}\boldsymbol{c},\quad \boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix} \tag{2.2}$$

ですね。そして係数行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値を $\lambda_1,\,\lambda_2$（$\lambda_1\neq\lambda_2$）とし，各固有値の属する固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_1,\,\boldsymbol{x}2$ とすると一般解は

$$\boldsymbol{x}=c_1e^{\lambda_1 t}\boldsymbol{x}_1+c_2e^{\lambda_2 t}\boldsymbol{x}_2 \tag{2.3}$$

で表されます。

2.1　固有値が相異なる 2 実数の場合

具体的に次の線形微分方程式を考えます。

$$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$$

係数行列$\boldsymbol{A}$の固有値はケーリー・ハミルトンの定理から

$$\lambda^2 - 13\lambda + 40 = 0, \quad \therefore \lambda = 5,\, 8$$

固有ベクトル$\boldsymbol{P}$は $\boldsymbol{Ax} = \lambda \boldsymbol{x}$ より

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

したがって行列$\boldsymbol{A}$は**例－２**で見たように

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

と対角化されます。これから一般解は

$$\boldsymbol{x} = e^{t\boldsymbol{A}}\boldsymbol{c} = e^{\boldsymbol{P}t\boldsymbol{DP}}\boldsymbol{c} = \boldsymbol{P}e^{t\boldsymbol{D}}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{c}$$

ここで $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{c}$ を改めて$\boldsymbol{c}$とおけば

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{5t} & 0 \\ 0 & e^{8t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = c_1 e^{5t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^8 t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と求まります。

以上の話を一般化します。

$$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

係数行列$\boldsymbol{A}$の固有値を λ_1, λ_2 とします。固有方程式 $\boldsymbol{Ax} = \lambda \boldsymbol{x}$ より

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda_1\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} ax_1 + bx_2 = \lambda_1 x_1 \\ cx_1 + dx_2 = \lambda_1 x_2 \end{cases} \longrightarrow x_1 = b,\, x_2 = \lambda_1 - a$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda_2\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} ax_1 + bx_2 = \lambda_2 x_1 \\ cx_1 + dx_2 = \lambda_2 x_2 \end{cases} \longrightarrow x_1 = b,\, x_2 = \lambda_2 - a$$

したがって $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} b & b \\ \lambda_1 - a & \lambda_2 - a \end{pmatrix}$ が得られます。一般解は

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}e^{t\boldsymbol{D}}\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} b & b \\ \lambda_1 - a & \lambda_2 - a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} b \\ \lambda_1 - a \end{pmatrix}e^{\lambda_1 t} + c_2\begin{pmatrix} b \\ \lambda_2 - a \end{pmatrix}e^{\lambda_2 t} \tag{2.5}$$

(A) 固有値が相異なる 2 実数の場合

固有値を λ_1, λ_2, それぞれに属する固有ベクトルを $\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$ とすると，$\lambda_1 \neq \lambda_2$ のとき一般解は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}e^{\lambda_1 t} + c_2\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}e^{\lambda_2 t} \tag{2.6}$$

となる。あるいは次のようにも書ける。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} b \\ \lambda_1 - a \end{pmatrix} e^{\lambda_1 t} + c_2 \begin{pmatrix} b \\ \lambda_2 - a \end{pmatrix} e^{\lambda_2 t} \tag{2.7}$$

●例－5：次の連立方程式を解け。

$$\frac{dx}{dt} = 2x - 6y$$
$$\frac{dy}{dt} = 2x + 9y$$

〇解答：$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$，固有値はケーリー・ハミルトンの定理より

$$\lambda^2 - 11\lambda + 30 = (\lambda - 5)(\lambda - 6) = 0, \quad \lambda = 5,\, 6$$

固有ベクトル$\boldsymbol{P}$は $\boldsymbol{Ax} = \lambda \boldsymbol{x}$ より

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

したがって一般解は公式（2.7）より

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} e^{5t} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} e^{6t}$$

2.2　固有値が重解の場合

次の連立微分方程式を解きます。

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -10x - 9y \\[2mm] \dfrac{dy}{dt} = 16x + 14y \end{cases}$$

係数行列は $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -10 & -9 \\ 16 & 14 \end{pmatrix}$ なので，その固有値はケーリー・ハミルトンの定理より

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2 = 0, \quad \lambda_1 = 2,\, \lambda_2 = 2$$

重解固有値なので$\boldsymbol{A}$を対角化する行列は存在しません。そこで**例-3** でやったように

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

とおくと，**■計算例 (b)** より

$$e^{t\boldsymbol{D}} = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

また，$\boldsymbol{PD} = \boldsymbol{AP}$ で

$$\begin{pmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & -9 \\ 16 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{pmatrix}$$

より $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$ を得ます。これから一般解は

$$\boldsymbol{x} = e^{t\boldsymbol{A}}\boldsymbol{c} = e^{\boldsymbol{P}t\boldsymbol{D}\boldsymbol{P}}\boldsymbol{c} = \boldsymbol{P}e^{t\boldsymbol{D}}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{c}$$

ここで $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{c}$ を改めて$\boldsymbol{c}$とおけば

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = e^{2t} \begin{pmatrix} 3 & 3t+2 \\ -4 & -4t-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

と求まります。
天下り的ですが，固有値が重解の場合の一般解を求める公式を載せておきます。

(B) 固有値が重解の場合
重解の固有値を λ とすると一般解は，$b \neq 0$ または $c \neq 0$ のとき

$$\begin{cases} x(t) = C_1 e^{\lambda t} + \{bC_2 + (a-\lambda)C_1\{te^{\lambda t} \\ y(t) = C_2 e^{\lambda t} + \{cC_1 - (a-\lambda)C_2\}te^{\lambda t} \end{cases} \tag{2.8}$$

2.3 固有値が複素共役の場合

次の連立微分方程式を解きます。

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = 5x + y \end{cases}$$

係数行列 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ なので，その固有値はケーリー・ハミルトンの定理より

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 + 13 = 0, \quad \lambda_1 = 2+3i,\ \lambda_2 = 2-3i$$

固有方程式 $\boldsymbol{Ap} = \lambda \boldsymbol{p}$ より

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = (2+3i) \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 3p_1 - 2p_2 = (2+3i)p_1 \\ 5p_1 + p_2 = (2+3i)p_2 \end{cases} \longrightarrow (1-3i)p_1 = 2p_2 \longrightarrow p_1 = 1+3i \text{ とおくと } p_2 = 5, \therefore \boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} 1+3i \\ 5 \end{pmatrix}$$

同様にして $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = (2-3i) \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} 3q_1 - 2q_2 = (2-3i)q_1 \\ 5q_1 + q_2 = (2-3i)q_2 \end{cases} \longrightarrow (1+3i)q_1 = 2q_2 \longrightarrow q_1 = 1-3i \text{ とおくと } q_2 = 5, \therefore \boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} 1-3i \\ 5 \end{pmatrix}$$

したがって固有ベクトル$\boldsymbol{P}$は

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1+3i & 1-3i \\ 5 & 5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{P}^{-1} = \frac{1}{30i} \begin{pmatrix} 5 & -1+3i \\ -5 & 1+3i \end{pmatrix}$$

共役複素数を固有値にもつ$\boldsymbol{A}$は対角化可能ですから

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP} = \begin{pmatrix} 2+3i & 0 \\ 0 & 2-3i \end{pmatrix}$$

一般解は

$$\boldsymbol{x} = e^{t\boldsymbol{A}}\boldsymbol{c} = e^{\boldsymbol{P}_t\boldsymbol{D}}\boldsymbol{Pc} = \boldsymbol{P}e^{t\boldsymbol{D}}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{c}$$

で与えられるので $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{c}$ を改めて$\boldsymbol{c}$とおけば

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+3i & 1-3i \\ 5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda^* t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$
$$= c_1 \begin{pmatrix} 1+3i \\ 5 \end{pmatrix} e^{(\alpha+i\beta)t} + c_2 \begin{pmatrix} 1-3i \\ 5 \end{pmatrix} e^{(\alpha-i\beta)t}$$

となります。また，複素数を使わない表現では，すぐあとにでてくる公式を使えば

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 2\cos 3t - 6\sin 3t)e^{3t} \\ 10\cos 3te^{2t} \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -6\cos 3t - 2\sin 3t)e^{3t} \\ 10\sin 3te^{2t} \end{pmatrix}$$

となります。

以上の話を一般化します。

$$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tag{2.9}$$

係数行列$\boldsymbol{A}$の固有値を $\lambda(=\alpha+i\beta)$, $\lambda^*(=\alpha-i\beta)$（複素共役）とし，それぞれの固有値の属する固有ベクトルをそれぞれ $\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$ とします。そうすると一般解は（2.6）より

$$\boldsymbol{x} = c_1\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} e^{\lambda t} + c_2\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} e^{\lambda^* t} = c_1\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} e^{(\alpha+i\beta)t} + c_2\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} e^{(\alpha-i\beta)t} \tag{2.10}$$

となります。（2.10）は複素数を使って表しています。複素数を使わないで表す場合は，上の $e^{(\alpha+i\beta)t}$ と $e^{(\alpha-i\beta)t}$ の和と差をとり

$$\left.\begin{aligned} e^{(\alpha+i\beta)t} + e^{(\alpha-i\beta)t} &= 2e^{\alpha t}\cos\beta t \\ e^{(\alpha+i\beta)t} - e^{(\alpha-i\beta)t} &= -2ie^{\alpha t}\sin\beta t \end{aligned}\right\}$$

が得られます。これを基本解[5]にとると，一般解は

$$\boldsymbol{x} = C_1\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}(2e^{\alpha t}\cos\beta t) + C_2\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}(-2ie^{\alpha t}\sin\beta t) \tag{2.11}$$

と表すことができます。次に固有ベクトル$\boldsymbol{P}$を求めます。固有方程式 $\boldsymbol{Ap} = \lambda\boldsymbol{p}$ より

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = (\alpha+i\beta)\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} ap_1 + bp_2 = (\alpha+i\beta)p_1 \\ cp_1 + dp_2 = (\alpha+i\beta)p_2 \end{cases} \longrightarrow (a-\alpha-i\beta)p_1 = -bp_2$$

$$\therefore \quad p_1 : p_2 = -b : (a-\alpha-i\beta) = k \longrightarrow p_1 = -bk,\ p_2 = \{(a-\alpha)-i\beta\}k$$

そこで $k = (a-\alpha)+i\beta$ とおくと

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b(a-\alpha) - ib\beta \\ (a-\alpha)^2 + \beta^2 \end{pmatrix}$$

が得られます。全く同様にして

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b(a-\alpha) + ib\beta) \\ (a-\alpha)^2 + \beta^2 \end{pmatrix}$$

[5] あとにでてくる一口メモ参照。

が得られる。これらを使うと基本解は

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} e^{(\alpha+i\beta)t} &= \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} e^{(\alpha+i\beta)t} = e^{\alpha t}\begin{pmatrix} -b(a-\alpha)-ib\beta \\ (a-\alpha)^2+\beta^2 \end{pmatrix}(\cos\beta t + i\sin\beta t) \\
&= e^{\alpha t}\left\{\begin{pmatrix} -b(a-\alpha)\cos\beta t + b\beta\sin\beta t \\ \{(a-\alpha)^2+\beta^2\}\cos\beta t \end{pmatrix} - i\begin{pmatrix} b\beta\cos\beta t + b(a-\alpha)\sin\beta t \\ \{(a-\alpha)^2+\beta^2\}\sin\beta t \end{pmatrix}\right\} \\
\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} e^{(\alpha-i\beta)t} &= \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} e^{(\alpha-i\beta)t} = e^{\alpha t}\begin{pmatrix} -b(a-\alpha)+ib\beta \\ (a-\alpha)^2+\beta^2 \end{pmatrix}(\cos\beta t - i\sin\beta t) \\
&= e^{\alpha t}\left\{\begin{pmatrix} -b(a-\alpha)\cos\beta t + b\beta\sin\beta t \\ \{(a-\alpha)^2+\beta^2\}\cos\beta t \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} b\beta\cos\beta t + b(a-\alpha)\sin\beta t \\ \{(a-\alpha)^2+\beta^2\}\sin\beta t \end{pmatrix}\right\}
\end{aligned}$$

（2.12）と（2.12）とは共役関係となっていることがわかります。（2.12）の実部と虚部はそれぞれ独立した解ですから，一般解はこれらの独立な解の 1 次結合で表すことができます。つまり

$$\begin{cases} x(t) = C_1\{-b(a-\alpha)\cos\beta t + b\beta\sin\beta t\}e^{\alpha t} + C_2\{b\beta\cos\beta t + b(a-\alpha)\sin\beta t\}e^{\alpha t} \\ y(t) = C_1\{(a-\alpha)^2+\beta^2\}\cos\beta t e^{\alpha t} + C_2\{(a-\alpha)^2+\beta^2\}\sin\beta t e^{\alpha t} \end{cases}$$

(C) 固有値が共役複素数の場合

固有値を $\lambda = \alpha + i\beta,$, $\lambda^* = \alpha - i\beta$ とし，各固有値の属する固有ベクトルを $\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$ とすると一般解は

$$\begin{cases} x(t) = C_1 p_1 e^{(\alpha+i\beta)t} + C_2 q_1 e^{(\alpha-i\beta)t} \\ y(t) = C_1 p_2 e^{(\alpha+i\beta)t} + C_2 q_2 e^{(\alpha-i\beta)t} \end{cases} \tag{2.12}$$

また，複素数を使わない表現では

$$\begin{cases} x(t) = C_1\{-b(a-\alpha)\cos\beta t + b\beta\sin\beta t\}e^{\alpha t} + C_2\{b\beta\cos\beta t + b(a-\alpha)\sin\beta t\}e^{\alpha t} \\ y(t) = C_1\{(a-\alpha)^2+\beta^2\}\cos\beta t e^{\alpha t} + C_2\{(a-\alpha)^2+\beta^2\}\sin\beta t e^{\alpha t} \end{cases} \tag{2.13}$$

●例－ 6：次の連立方程式を解け。

$$\frac{dx}{dt} = -x - 2y$$
$$\frac{dy}{dt} = x + y$$

○解答：$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$，固有値はケーリー・ハミルトンの定理より

$$\lambda^2 + 1 = 0, \quad \lambda = i,\, -i \tag{2.14}$$

一般解は公式（2.13）より

$$\begin{cases} x(t) = 2C_1(-\cos t - \sin t) + 2C_2(-\cos t + \sin t) = -C_1(\cos t + \sin t) - C_2(\cos t - \sin t) \\ y(t) = 2C_1\cos t + 2C_2\sin t = C_1\cos t + C_2\sin t \end{cases}$$

ただし定数項は書き直しました。

※一口メモ：一般解，特殊解，基本解について

簡単のために 2 階の微分方程式 $y'' - 2y' + y = 0$ を考えます。この微分方程式の解は $y = C_1e^x + C_2xe^x$ で表されます。

●一般解：上の解は 2 個の 任意定数を含んでいます。このような解を**一般解**といいます。

●特殊解：一般解の 任意定数に具体的な数値を代入 して得られるここの解を**特殊解**といいます。
例えば $y = 2e^x - 3xe^x$ など。

●基本解：2 階同次線形微分方程式の解は（一般に無数存在しますが）少なくとも 2 個の 1 次独立な解 があります。
この解を**基本解**といいます。一般解は基本解の線形和で表されます。
(例) $y'' - 8y' + 15y = 0$ の基本解は e^{3x}, e^{5x} で一般解は $y = C_1e^{3x} + C_2e^{5x}$ となります。ところでこの
2 つの基本解の和 $e^{3x} + e^{5x}$ と差 $e^{3x} - e^{5x}$ も微分方程式の解で 1 次独立ですからこれも基本解となります。

このほか**特異解**というのもありますが，これについては説明を省きます。

−−−−−−−−−−−−−−−−−◦−−−−−−−−−−−−−−−−−−

◆ 1 次独立：関数列 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ の線形和 $C_1y_1 + C_2y_2 + \cdots C_ny_n = 0$ が成立する条件として
(1)$C_1 = C_2 = \cdots = C_n = 0$ のときのみである場合，関数 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ は **1 次独立**であるといいます。
(2)$C_1 = C_2 = \cdots = C_n = 0$ 以外にある場合，関数 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ は **1 次従属**であるといいます。
具体的な判定法としてロンスキアンと呼ばれる次の行列式

$$W(y_1, y_2, \cdots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{n-1} & y_2^{n-1} & \cdots & y_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

で $W \neq 0$ の場合関数列 $y_1, \cdots, y_n$ は 1 次独立で，$W = 0$ の場合 1 次従属になります。

3　定数係数連立非同次線形微分方程式

このレポートの最後に非同次の連立微分方程式を解いていくことにします。この場合の連立微分方程式は

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}(t) \tag{3.1}$$

と書けます。通常の非同次線形微分方程式の一般解は ”**非同次方程式の特殊解＋同次方程式の一般解** ”で表されますが，非同次連立微分方程式の場合も同様に成り立ちます。連立同次方程式の $\dfrac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ の一般解は（2.2）より $\boldsymbol{x} = e^{t\boldsymbol{A}}\boldsymbol{c}$ でした。そこで非同次連立微分方程式（3.1）の特殊解を求めていきます。
先ほどの同次方程式の一般解の定数係数,$\boldsymbol{c}$ を t によって変化する関数$\boldsymbol{c}$(t) に置き換える**定数変化法**という方法を使います。そうすると $\boldsymbol{x} = e^{t\boldsymbol{A}}\boldsymbol{c}(t)$ とおいて t で微分すると

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{A}e^{t\boldsymbol{A}}\boldsymbol{c}(t) + e^{t\boldsymbol{A}}\frac{d\boldsymbol{c}}{dt}$$

が得られます。これを（3.1）に代入すると

$$\boldsymbol{A}e^{t\boldsymbol{A}}\boldsymbol{c}(t) + e^{t\boldsymbol{A}}\frac{d\boldsymbol{c}}{dt} = \boldsymbol{A}e^{t\boldsymbol{A}}\boldsymbol{c}(t) + \boldsymbol{b}(t)$$
$$\therefore\ \frac{d\boldsymbol{c}(t)}{dt} = e^{-t\boldsymbol{A}}\boldsymbol{b}(t)$$

が得られます。これから

$$\boldsymbol{c}(t) = \int e^{-t\boldsymbol{A}}\boldsymbol{b}(t)dt + \boldsymbol{C} \quad (\boldsymbol{C}\text{: 任意の定ベクトル})$$

が得られます。したがって一般解は

$$\boldsymbol{x} = e^{t\boldsymbol{A}}\boldsymbol{c} + e^{t\boldsymbol{A}}\boldsymbol{c}(t) = e^{t\boldsymbol{A}}\boldsymbol{c} + e^{t\boldsymbol{A}}\left(\int e^{-t\boldsymbol{A}}\boldsymbol{b}(t)dt + \boldsymbol{C}\right) = e^{t\boldsymbol{A}}\left(\int e^{-t\boldsymbol{A}}\boldsymbol{b}(t)dt + \boldsymbol{c}\right) \tag{3.2}$$

となります。ただし，右辺最後の項の定ベクトルはまとめて$\boldsymbol{c}$としました。

●例－７：次の連立方程式を解け。

$$\frac{dx}{dt} = 7x - 4y + 2e^t$$
$$\frac{dy}{dt} = 12x - 7y + 4e^t$$

○解答：係数行列$\boldsymbol{A}$は

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 12 & -7 \end{pmatrix}$$

で, (1.8) より対角化可能行列であることがわかります。ケーリー・ハミルトンの定理から固有値を求めると

$$\lambda^2 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0 \quad \therefore\ \lambda_1 = -1,\, \lambda_2 = 1$$

したがって，$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ で，固有ベクトル$\boldsymbol{P}$は $\boldsymbol{PD} = \boldsymbol{AP}$ より

$$\begin{pmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 12 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{pmatrix}$$

これを解いて一つの解として $p_1 = 1, p_2 = 2, q_1 = 2, q_3 = 3$ を得ます。したがって$\boldsymbol{P}$と $\boldsymbol{P}^{-1}$ は

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{P}^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

また,

$$e^{t\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{P}e^{t\boldsymbol{D}}\boldsymbol{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3e^{-t} + 4e^t & 2e^{-t} - 2e^t \\ -6e^{-t} + 6e^t & 4e^{-t} - 3e^t \end{pmatrix}$$

これから

$$\left.\begin{aligned} e^{t\boldsymbol{A}} &= \begin{pmatrix} -3e^{-t} + 4e^t & 2e^{-t} - 2e^t \\ -6e^{-t} + 6e^t & 4e^{-t} - 3e^t \end{pmatrix} \\ e^{-t\boldsymbol{A}} &= \begin{pmatrix} -3e^t + 4e^{-t} & 2e^t - 2e^{-t} \\ -6e^t + 6e^{-t} & 4e^t - 3e^{-t} \end{pmatrix} \end{aligned}\right\}$$

を得ます。尚，下段の式は上段の式のは t の代わりに $-t$ を入れました。
次に $\boldsymbol{b}$(t) は $\boldsymbol{b}(t) = \begin{pmatrix} 2e^t \\ 4e^t \end{pmatrix}$ ですから

$$\begin{aligned} \int e^{-t\boldsymbol{A}}\,\boldsymbol{b}(t)dt &= \int \begin{pmatrix} -3e^t + 4e^{-t} & 2e^t - 2e^{-t} \\ -6e^t + 6e^{-t} & 4e^t - 3e^{-t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2e^t \\ 4e^t \end{pmatrix} dt \\ &= \int \begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ 4e^{2t} \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 2e^{2t} \end{pmatrix} dt \end{aligned}$$

したがって求める一般解は（3.2）より

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} &= e^{t\boldsymbol{A}}\left(\int e^{-t\boldsymbol{A}}\boldsymbol{b}(t)dt + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}\right) \\ &= \begin{pmatrix} -3e^{-t} + 4e^t & 2e^{-t} - 2e^t \\ -6e^{-t} + 6e^t & 4e^{-t} - 3e^t \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} e^{2t} \\ 2e^{2t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}\right) \\ &= \begin{pmatrix} e^t + c_1(-3e^{-t} + 4e^t) + c_2(2e^{-t} - 2e^t) \\ 2e^t + c_1(-6e^{-t} + 6e^t) + c_2(4e^{-t} - 3e^t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

【余禄】

・1 階常微分方程式にはベルヌイ形（Bernoulli）形，リッカチ形（Riccati），クレーロー形（Clairaut），ラグランジュ形（Lagrange）など，有名な数学者の名前を冠したものがありますね。昔，学生時代に微分方程式の講義を聴いたとき，いろんな名前がでてきて名前と形を覚えるのは煩わしいなと思ったものです。しかし，モノの本には，これはベルヌイ形で，とかリッカチ形でと書かれているのを目にしますので，形を見て何形か判定するのも芸の一つと思い，以下に具体的な形と名前の覚え方，一般解を記すことにしました。なにかの参考にでもなれば。

(A) ベルヌイ形 $\quad y' + P(x)y = Q(x)y^n \quad (n \neq 0, 1)$

$Q(x) = 0$ であれば $y' = ky$（k：定数/１次反応式など）というよく見かける微分方程式と酷似していますね。ベルヌイ形は y^n が加わった非線形微分方程式となっています。この解法は $y^{1-n} = u$ とおいて線形に焼きなおしてから解かれます。一般解は

$$y^{1-n} = e^W \left\{ C - (n-1) \int Qe^{-W} dx \right\}, \quad W = (n-1) \int P(x)dx$$

(B) リッカチ形 $\quad y' + P(x)y^2 + Q(x)y + R(x) = 0 \longrightarrow y' = -\{P(x)y^2 + Q(x)y + R(x)\}$

上のようにリッカチ形の特長は y' が y の２次式となっていることです。これは見かけに反して初等関数を使って一般解を求めること（求積法）は一般に不可能とされています。ただ，特殊解が何らかの方法で得られれば一般解を求めることができます。詳しいことは微分方程式のテキストを参照いただくとして，一つの特殊解 y_1 が得られた時に一般解を載せておきます。

$$y = y_1 + \frac{e^{-W}}{\int Pe^{-W} dx + C}, \quad W = \int (2P_1 y_1 + Q) dx$$

(C) クレーロー形 $\quad y = xp + f(p) \longrightarrow y = xy' + f(y') \quad (p = y')$

クレーロー形は具体的な姿を示してクレロー（寒ぶ）ということで $y = xy' + \sqrt{1 + (y')^2}$ なんかがあります。この一般解は

$$y = Cx + f(C)$$

この方程式は特異解（一般解の任意定数にどのような値を与えても得られない解）を持ちます。
特異解は

$$x = -f'(C), \quad y = Cx + f(C) = -Cf'(C) + f(C)$$

(D) ラグランジュ形 $\quad y = xf(p) + g(p) \longrightarrow y = xf(y') + g(y') \quad (p = y')$

ラグランジュ形はクレーロー形とよく似ていますね。ということでラグランジュとクレーローは兄弟（？）と覚えておきます。一般解は p をパラメーターとして

$$\begin{cases} x = exp\left(-\int \frac{f'(p)}{f(p)-p} dp \right) \left\{ C - \int \frac{g'(p)}{g(p)-p} exp\left(\int \frac{f'(p)}{f(p)-p} dp \right) \right\} \\ y = xf(p) + g(p) \end{cases}$$

$p_0 = f(p_0)$ を満たす実数 p_0 があれば，$y = xf(p_0) + g(p_0)$ このが特異解を与えます。特異解の存在はクローレーの場合とよく似ていますね。

（了）

またお会いできる機会を楽しみに,,,

GOOD LUCK！
SEE YOU AGAIN！