

テンソル談議

KENZOU

2012年10月28日

2012年11月16日

付録追記

目次

第 1 話	テンソルとはなんだ	5
1.1	テンソルとはなんだ	5
1.1.1	線形条件	6
1.1.2	2 階テンソル	6
1.1.3	応力テンソル	8
第 2 話	テンソルの定義とその種類	12
2.1	多重線形形式によるテンソルの定義	12
2.1.1	双線形形式	12
2.1.2	多重線形形式	14
2.2	テンソルの演算	15
2.2.1	単位テンソルとゼロテンソル	15
2.2.2	和, 差, スカラー倍とテンソル積	16
	p 階と q 階のテンソル積は $p + q$ 階のテンソル	16
	ベクトルのテンソル積はダイアド	17
	2 階テンソルの基底	18
	3 階テンソルの基底	19
	テンソルの内積	19
2.3	対称・反対称テンソル	20
2.3.1	対称テンソル	20
	対称テンソルの独立成分数	21
2.3.2	反対称テンソル	22
	3 階反対称テンソルの独立成分の数	22
	4 階以上の反対称テンソルは存在しない	23
	任意の 2 階テンソルは対称テンソルと反対称テンソルの和	23
2.3.3	交代積 (ウェッジ積)	24
2.3.4	テンソルの既約分解	26
第 3 話	テンソルを座標変換すると	28
3.1	座標変換とテンソル	28
	空間反転では $\det A = -1$	28
3.1.1	テンソルの座標変換	29
	テンソルの座標変換公式	30
	対称性・反対称性は座標変換に依存しない	31
	テンソルの基底を使った変換公式	31
	テンソルとベクトルの積など	32
3.1.2	縮約	33

	縮約によりテンソルの階数は2階減る	34
3.1.3	軸性テンソル(擬テンソル)	37
	極性ベクトルと軸性ベクトル	37
	軸性テンソル(擬テンソル)	38
	2階反対称テンソルと軸性ベクトル	39
3.1.4	商法則	42
3.2	等方テンソル	43
3.2.1	2階等方テンソル	43
3.2.2	高階等方テンソル	45
	等方テンソルの形は限定されている	45
第4話	テンソル2次曲面とテンソル場	46
4.1	テンソル2次曲面	46
4.1.1	主軸問題の復習	46
4.1.2	テンソル不変量	48
4.1.3	テンソル2次曲面	50
	主軸方向はテンソルの主方向	50
	慣性テンソルの対角化	51
4.2	テンソル場	52
4.2.1	場という概念について	52
4.2.2	スカラー場とベクトル場	53
	スカラー場	53
	スカラー場の勾配はベクトル場	53
	スカラー場の方向微分係数	54
	ベクトル場	55
	ベクトル場の発散はスカラー場	55
	ベクトル場の回転はベクトル場(擬ベクトル場)	56
	テンソル場	57
	ベクトル場の勾配は2階テンソル場	57
	2階テンソル場の勾配は3階テンソル場	57
	2階テンソル場の発散はベクトル場	58
第5話	斜交座標とテンソル	60
5.1	斜交座標	60
5.1.1	ベクトルの反変成分と共変成分	61
5.1.2	座標変換	64
5.1.3	反変基底(双対基底)	66
5.2	2階テンソルの座標変換	68
5.2.1	混合テンソル成分	68
5.2.2	共変成分の座標変換	68
5.2.3	反変成分の座標変換	69
5.2.4	混合成分の座標変換	69
5.2.5	混合成分と共変・反変成分の関係	70

第 6 話	曲線座標とテンソル	71
6.1	曲線座標	71
6.1.1	自然基底	72
6.2	ベクトル場・テンソル場・スカラー場	73
6.2.1	ベクトル場	73
6.2.2	テンソル場	75
6.2.3	スカラー場	75
6.3	計量テンソル	75
6.4	共変微分	76
6.4.1	クリストッフェルの記号	76
	クリストッフェル記号の座標変換	77
6.4.2	スカラー場の共変微分	78
6.4.3	ベクトル場の共変微分	79
	反変ベクトル成分の共変微分	79
	共変ベクトル成分の共変微分	80
6.4.4	テンソル場の共変微分	81
	2 階反変テンソル成分の共変微分	81
	2 階共変テンソル, 混合テンソル成分の共変微分	83
6.4.5	計量テンソルの共変微分	84
6.5	発散と回転	85
6.5.1	発散	85
6.5.2	回転	86
6.6	曲率テンソル	87
6.7	直交曲線座標	87
6.7.1	勾配・発散・回転	89
A.1	共変微分について	91
A.1.1	ベクトルの平行移動	91
A.1.2	共変微分	93
A.2	測地線	94
A.2.1	レビ・チビタの平行性	94
A.2.2	測地線	95
A.3	曲率テンソルの物理的意味	97

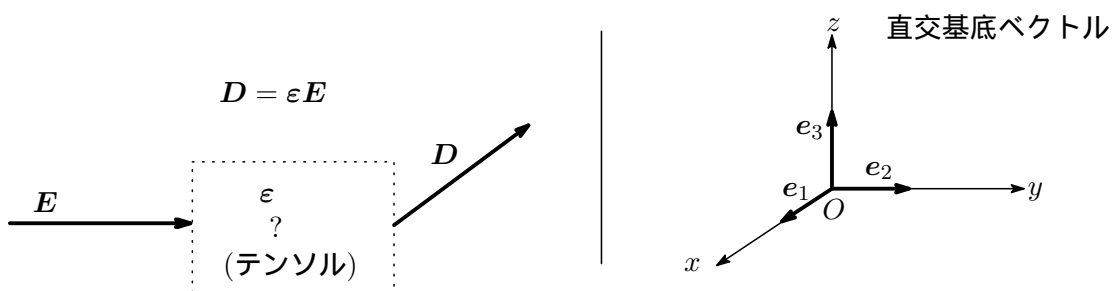
第1話 テンソルとはなんだ

1.1 テンソルとはなんだ

- エミリー：こんにちわ～Kさん，お元気ですか～．
- K氏：いやぁ～エミリー，こんにちは．ずいぶん久しぶりだねえ～．少し日焼けしているようだけどこの夏を十分エンジョイしたようだね．
- エミリー：そうなの，今年の猛暑はこたえたけど山に行ったりいろいろと野外活動に精をだしたから少し日焼けしたかな．
- K氏：ところで今日はなんだい．僕の淹れる旨いコーヒーでも飲みたくなかったのかい，歓迎するよ．
- エミリー：ありがとう．でもとくにコーヒーが飲みたくてきたわけじゃないの．実は最近テンソルというものを勉強し始めたのだけど，ベクトルとちがってイメージがつかみにくいのよ．そこをスッキリしたくてKさんを尋ねてきたというわけなの．
- K氏：そういうことなんだ，了解．ところで夏場の海辺はパラソルが一杯開くけど，パラソルとテンソルとは直接何の関係もないよね．
- エミリー：ほとんど面白くない冗談はそのくらいにして，お話を進めていただけるかしら，，，
- K氏：(うっふぉーんと咳払いして) そうだね．さて，それではまずテンソルというもののイメージを掴むところから始めようか．電磁気学を勉強すると誘電率テンソルというものにでくわしたりするだろう．今，誘電体の電束密度を D ，電場を E とすると，え～っと，これらはともにベクトル量であることはいいよね．誘電体が等方性の時には，電場と電束密度の方向は一致するから

$$D = \epsilon E$$

となって，誘電率 ϵ は向きも方向も持たない，大きさだけを持つスカラー量だ．ここまではいいよね．問題は誘電体が異方性の時なんだね．このときにはベクトル D と E の方向は一致しなくなる．だから， D と E を結び付ける ϵ は単なるスカラー量ですよとは言ってもらえなくなる．



だからなんだということになるんだが、つまりテンソルはベクトルとベクトルを結びつけるブラックボックスのようなものだね。このブラックボックスは一体どのようなものか、これを追求していこう。

- エミリー：なにかわくわくしてきたわ。楽しみね。

1.1.1 線形条件

- K氏：さて、ブラックボックスの意味を明らかにしていくために、 D と E の関係を一般化した議論を展開しておこう。いま x, y, z の空間座標系を基底ベクトル e_1, e_2, e_3 とする直交座標系としよう。もっとも、座標系としては x 軸, y 軸, z 軸 がそれぞれ斜めに交差している斜交座標というのもあるけど。この座標系についての議論は後でやることにする。ベクトル y がベクトル x の関数であるとして

$$y = Tx \tag{1.1.1}$$

と書くことにする。 $y = T(x)$ と書くこともある。ベクトル x が与えられると別のベクトル y が得られるという関係だね。そしてベクトル変数の関数 T は線形関数、つまり

$$\begin{aligned} T(x_1 + x_2) &= Tx_1 + Tx_2 \\ T(\alpha x) &= \alpha Tx \quad (\alpha : \text{スカラー}) \end{aligned} \tag{1.1.2}$$

という線形条件を満たすものとする。言い換えるとベクトル空間からベクトル空間への線形写像ということだね。ベクトル x は直交基底ベクトル e_i を使うと

$$x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 = \sum_{i=1}^3 x_i e_i \tag{1.1.3}$$

と表せる。同様にベクトル $y = (y_1, y_2, y_3)$ も

$$y = y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3 = \sum_{i=1}^3 y_i e_i \tag{1.1.4}$$

と表せる。そうすると (1.1.1) の右辺は線形条件により

$$Tx = T(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) = x_1Te_1 + x_2Te_2 + x_3Te_3 = \sum_{i=1}^3 x_i Te_i \tag{1.1.5}$$

となる。

1.1.2 2階テンソル

- K氏：ところで右辺の Te_i は (1.1.1) に見るように基底ベクトル e_i をあるベクトル f_i に変換したものと考えられるので、 f_i を基底 e_i を使って表すと

$$\begin{cases} f_1 = Te_1 = T_{11}e_1 + T_{21}e_2 + T_{31}e_3 \\ f_2 = Te_2 = T_{12}e_1 + T_{22}e_2 + T_{32}e_3 \\ f_3 = Te_3 = T_{13}e_1 + T_{23}e_2 + T_{33}e_3 \end{cases} \longrightarrow Te_j = \sum_{i=1}^3 T_{ij}e_i \quad (j = 1, 2, 3) \tag{1.1.6}$$

となるだろう．ここで T_{ij} という量はベクトル $f_i (= T e_i)$ の成分と考えられる．さて，ベクトル y との対応だけど

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^3 y_i e_i &= \sum_{i=1}^3 x_i T e_i \\
 &= x_1(T_{11}e_1 + T_{21}e_2 + T_{31}e_3) \\
 &\quad + x_2(T_{12}e_1 + T_{22}e_2 + T_{32}e_3) \\
 &\quad + x_3(T_{13}e_1 + T_{23}e_2 + T_{33}e_3) \\
 &= (x_1T_{11} + x_2T_{12} + x_3T_{13})e_1 + (x_1T_{21} + x_2T_{22} + x_3T_{23})e_2 + (x_1T_{31} + x_2T_{32} + x_3T_{33})e_3 \\
 \therefore y_1 &= x_1T_{11} + x_2T_{12} + x_3T_{13} \\
 y_2 &= x_1T_{21} + x_2T_{22} + x_3T_{23} \\
 y_3 &= x_1T_{31} + x_2T_{32} + x_3T_{33}
 \end{aligned} \tag{1.1.7}$$

となるね．まとめて書くと

$$\mathbf{y} = T\mathbf{x} \quad : \quad y_i = \sum_{j=1}^3 T_{ij}x_j \quad \longrightarrow \quad y_i = T_{ij}x_j \tag{1.1.8}$$

右側の表式は一つの項の中に同じ添字が 2 回現れた場合その添字について和をとるというアインシュタインの規約を使っている．(1.1.8) を行列で表すと

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \tag{1.1.9}$$

となる．ここに登場した T_{ij} という量は 2 階テンソルと呼ばれる．なぜ 2 階かという添字が 2 つ付いているからなんだ．添字 i, j の組み合わせは合計 3×3 あって 2 階テンソルは 9 成分ということになるね．つまり，ベクトル x を構成する 3 個の基底ベクトル e_1, e_2, e_3 がそれぞれまた 3 個の成分をもつベクトルに変換されるので成分の数は $3 \times 3 = 9$ 個となるわけだ．ベクトル x をベクトル y に変換（射影）するにはかなりきめ細かな対応が必要になるというようなイメージだね．3 階や 4 階，一般に n 階テンソルというものもあるけど，高階テンソルについてはまた後で話がでてくると思う．以上で冒頭に言ったブラックボックスの中身が少し分かってもらえたかな？

- エミリー：そうねえ～，テンソルというのはベクトルをベクトルに変換する演算子のようなものね．
- K 氏：そうだね．ただ，老婆心ながらコメントしておくけど，テンソルはベクトルに作用する演算子というだけじゃないんだね．テンソルそれだけで独立に存在する概念でもあるんだ．エッ？何のことと思うかもしれないけど，まあおいおい勉強していくことにするので，今はテンソルに慣れ親しむことをメインにしているので，その辺りのことは気にかけないで頂戴．
- エミリー：分かったわ．ところで 2 階テンソルは 3 行 3 列の行列で表せたけど，各成分は具体的に表されるのかしら？
- K 氏：うん，それを考えるには (1.1.6) を取り上げればいい．例えばテンソル T_{13} の成分を摘み出すには (1.1.6) より基底ベクトル e_1 とベクトル $T e_3$ の内積をとればいい，つまり

$$T_{13} = e_1 \cdot T e_3 = e_1 \cdot (T_{13}e_1 + T_{23}e_2 + T_{33}e_3) = T_{13}$$

となるだろう．

- エミリー：ナルホド．そうすると直交基底系 e_i についてのテンソル T の成分 T_{ij} は

$$T_{ij} = e_i \cdot T e_j \quad (1.1.10)$$

と表される．テンソル成分はスカラーね．

- K氏：そうだね，いままでのお話を整理すると次のようになる．

- (1) 2階テンソルは任意のベクトルを別のベクトルに変換する線形変換の作用素として定義される．ある変換を T として，任意のベクトルを x とするとき，

$$y = T x \quad (1.1.11)$$

によってベクトル x が他のベクトル y に変換され，かつこの関係が線形条件 (1.1.2) を満たすとき T をテンソルと呼ぶ．

- (2) 直交基底系 e_i についてのテンソル T の成分 T_{ij} は

$$T_{ij} = e_i \cdot T e_j \quad (1.1.12)$$

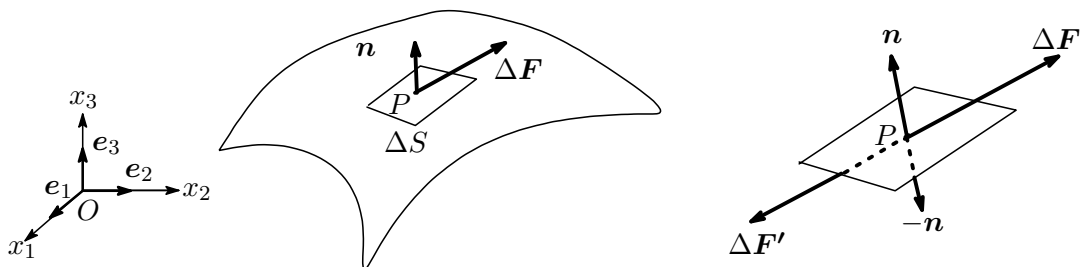
で与えられるスカラー量で，テンソル T を使うとベクトル y はベクトル x と

$$y_i = T_{ij} x_j \quad (1.1.13)$$

という関係で結ばれるということだね．

1.1.3 応力テンソル

- K氏：以上でテンソルの大体のイメージがつかめたと思うけど，もう一つ念押しとして応力テンソルというのを見てみよう．絵でも描きながらゆっくり考えていけばいいと思う．ある物体に作用する外力はベクトルで与えられる．物体内部の任意の断面を考えたとき，この単位面積当たりにおよぼしあう力（応力）もベクトルだけど，ただ断面のとりかたによってこのベクトルは変化するから，応力を完全に決定するにはもっと多くの成分が必要になってくるんだね．具体的に見ていこう．



物体の内部に微小断面 ΔS を考え， ΔS の向きを表す単位法線ベクトルを n とする． n は ΔS の下部から上部に向くように選ぶ．微小断面 ΔS に作用している面積力を ΔF とすると，点 P における応力ベクトル T は

$$T = \frac{\Delta F}{\Delta S}$$

与えられる。ただし、応力ベクトル T は ΔS が変われば、言い換えると単位法線ベクトル n が変われば異なるベクトルになるし、また ΔS の大きさが変化するとベクトル T の大きさも変化すると考えられるので、正確に言えば点 P における応力ベクトルは n の指定も含めて

$$T(n) = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta S} \quad (1.1.14)$$

と表すべきだね。

さて、いま物体の変形は小さいと仮定して、外力が加わっても物体内の点は移動しないとしよう。そうすると点 P は動いていない、つまり ΔS を通して上部の物質が下部の物質に及ぼす力 $T(n)$ と下部の物質が上部の物質に及ぼす力 $T(-n)$ の合力は 0 ということだ。

$$T(n) + T(-n) = 0 \longrightarrow T(-n) = -T(n) \quad (1.1.15)$$

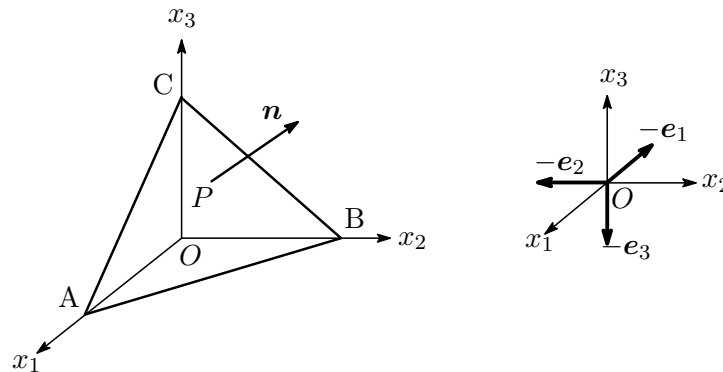
議論を進めていく前にちょっと準備をしておく。いま、空間内にある直交座標系 x_1, x_2, x_3 を定めて、その基底を e_1, e_2, e_3 としよう。点 P を通り e_1 を法線ベクトルとする x_2x_3 平面内の微小断面を用いて得られた応力ベクトルを $T(e_1)$ としよう。そうすると $T(e_1)$ は基底ベクトルを使って

$$T(e_1) = \tau_{11}e_1 + \tau_{21}e_2 + \tau_{31}e_3 \quad (1.1.16)$$

と表すことができる。同様に、 e_2, e_3 を法線ベクトルとする微小断面に対する応力ベクトルは

$$\begin{aligned} T(e_2) &= \tau_{12}e_1 + \tau_{22}e_2 + \tau_{32}e_3 \\ T(e_3) &= \tau_{13}e_1 + \tau_{23}e_2 + \tau_{33}e_3 \end{aligned} \quad (1.1.17)$$

と表せる。ここまではいいよね。以上の準備をもとに、図のように単位法線ベクトル n の微小断面 $\triangle ABC$ を考え、 $\triangle ABC$ と x_1x_2, x_2x_3, x_1x_3 の三つの座標平面とによって囲まれた四面体の微小体積要素 $OABC$ を考えよう。



四面体の各面 $\triangle ABC, \triangle OBC, \triangle OCA, \triangle OAB$ の面積をそれぞれ $\Delta S, \Delta S_1, \Delta S_2, \Delta S_3$ とし、それぞれの面の外向き法線ベクトルを $n, -e_1, -e_2, -e_3$ とする。 $\Delta S_1, \Delta S_2, \Delta S_3$ は ΔS の各座標平面上への正射影の面積となるので

$$\Delta S_1 = e_1 \cdot n \Delta S, \quad \Delta S_2 = e_2 \cdot n \Delta S, \quad \Delta S_3 = e_3 \cdot n \Delta S \quad (1.1.18)$$

と表すことができるよね。いま、四面体微小体積要素に作用している面積力は釣り合っているで(釣り合っていないと動いてしまう) その合力は 0 だ。つまり

$$\begin{aligned} &T(n)\Delta S + T(-e_1)\Delta S_1 + T(-e_2)\Delta S_2 + T(-e_3)\Delta S_3 \\ &= T(n)\Delta S - T(e_1)\Delta S_1 - T(e_2)\Delta S_2 - T(e_3)\Delta S_3 = 0 \end{aligned} \quad (1.1.19)$$

$$\therefore T(n)\Delta S = T(e_1)\Delta S_1 + T(e_2)\Delta S_2 + T(e_3)\Delta S_3$$

これに (1.1.18) を入れると

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(\mathbf{n}) &= \mathbf{T}(\mathbf{e}_1)(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{n}) + \mathbf{T}(\mathbf{e}_2)(\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{n}) + \mathbf{T}(\mathbf{e}_3)(\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{n}) \\ &= \mathbf{T}(\mathbf{e}_1)n_1 + \mathbf{T}(\mathbf{e}_2)n_2 + \mathbf{T}(\mathbf{e}_3)n_3 \end{aligned} \quad (1.1.20)$$

が得られる。 n_1, n_2, n_3 は \mathbf{n} の x_1, x_2, x_3 方向の成分だね。いま応力ベクトル $\mathbf{T}(\mathbf{n})$ の成分を $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \mathcal{T}_3$ とすると, (1.1.20) に (1.1.16) と (1.1.17) を入れて整理すれば

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_1 \mathbf{e}_1 + \mathcal{T}_2 \mathbf{e}_2 + \mathcal{T}_3 \mathbf{e}_3 &= (\tau_{11}n_1 + \tau_{12}n_2 + \tau_{13}n_3)\mathbf{e}_1 \\ &\quad + (\tau_{21}n_1 + \tau_{22}n_2 + \tau_{23}n_3)\mathbf{e}_2 \\ &\quad + (\tau_{31}n_1 + \tau_{32}n_2 + \tau_{33}n_3)\mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad (1.1.21)$$

となる。各基底ベクトルは 1 次独立なので両辺の各基底の係数は等しくなければならない。したがって

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_1 &= \tau_{11}n_1 + \tau_{12}n_2 + \tau_{13}n_3 \\ \mathcal{T}_2 &= \tau_{21}n_1 + \tau_{22}n_2 + \tau_{23}n_3 \\ \mathcal{T}_3 &= \tau_{31}n_1 + \tau_{32}n_2 + \tau_{33}n_3 \end{aligned} \quad (1.1.22)$$

となる。これを行列形式で表すと

$$\mathbf{T}(\mathbf{n}) = \begin{pmatrix} \mathcal{T}_1 \\ \mathcal{T}_2 \\ \mathcal{T}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \mathbf{T}\mathbf{n} \quad (1.1.23)$$

と書けるね。この式を見ると、まず \mathbf{n} について線形であることが分かる。また、 \mathbf{T} はベクトル \mathbf{n} に作用してベクトル $\mathbf{T}(\mathbf{n})$ に変換している、ということで \mathbf{T} は 2 階テンソルになるんだね。このテンソルを応力テンソルと呼んでいる。応力テンソル τ_{ij} の各成分の意味だけど、最初の添え字 i は応力成分 $T_k (k = 1, 2, 3)$ を考えている微小面の法線の向きを表しており、2 つ目の添字 j は考えている微小面に作用する力の向きをそれぞれ表しているんだね。

- エミリー：例えば、 τ_{11} だったら法線の方向が x_1 軸の向きに一致する微小面、これは x_2x_3 面ね、その面において考えている x_1 軸方向の力の成分で、 τ_{12} だったら、法線の方向が x_1 軸の向きに一致する微小面において考えている x_2 軸方向の力の成分を意味するということね。
- K 氏：そうだね。だから、応力テンソルの成分には、微小面の法線と力の作用方向が一致する垂直応力成分 τ_{ii} と、法線方向と力の作用方向が異なるせん断応力成分 $\tau_{ij} (i \neq j)$ の 2 種類に分類することができるんだね。
- エミリー：なるほどねえ～、具体的なお話でテンソルというもののイメージがだいぶハッキリしてきたわ。
- K 氏：そうかい、それじゃついでにもう少し突っ込んで、,, (1.1.23) を見てみよう。応力ベクトル $\mathbf{T}(\mathbf{n})$ の表記はいちいち面倒なので \mathbf{T} で表すことにしておく

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}\mathbf{n} \quad (1.1.24)$$

応力ベクトル T とベクトル n の内積は T の n 方向の成分となるよね．従って内積をとることで T の n の方向成分のみを抽出することができる．その成分を T_n とすると

$$\begin{aligned} T_n = \mathbf{n}^t T = \mathbf{n}^t T \mathbf{n} &= \begin{pmatrix} n_1 & n_2 & n_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \\ &= \tau_{11}n_1^2 + \tau_{22}n_2^2 + \tau_{33}n_3^2 \\ &\quad + (\tau_{12} + \tau_{21})n_1n_2 + (\tau_{13} + \tau_{31})n_1n_3 + (\tau_{23} + \tau_{32})n_2n_3 \end{aligned} \quad (1.1.25)$$

上付き文字の t は転置の意味だ．これから例えば x_1 軸方向の応力は $n_1 = 1, n_2 = 0, n_3 = 0$ とおくと垂直応力成分の一つ $T_{(1,0,0)} = \tau_{11}$ が得られる．また, $n_1 = 1/\sqrt{2}, n_2 = 1/\sqrt{2}, n_3 = 0$ ($|\mathbf{n}| = 1$) とおけば, これは単位法線ベクトルが x_1 軸と x_2 軸とのなす角 $\pi/4$ の方向を向いている場合だね, その場合の応力は

$$T_{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)} = \frac{1}{2}(\tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{12} + \tau_{21}) = \frac{1}{2}(\tau_{11} + \tau_{22}) + \tau_{12} \quad (1.1.26)$$

で与えられる．最後の式の変形は応力テンソルは対称テンソルという性質を使った．対称テンソルの話はまだしていなかったけど．いまのところ $\tau_{ij} = \tau_{ji}$ というものだと思ってくれればいい．いずれにしてもこの場合は垂直応力に加えてせん断応力が顔をだしてくるね．

- エミリー：せん断応力というのは，物体内部のある面の，面に平行方向にすべらせるように作用する応力のことね．
- K氏：そうだね．さて，テンソルとは何だ！ということについて，いままでのお話で大体のイメージがつかめたと思う．第1話はこの辺りでお開きとしよう．第1話ではテンソルをベクトルに作用してベクトルを生み出す線形作用素という面から紹介したけど，第2話ではテンソルを別の面から定義してみよう．また，テンソルの和や差，積などの演算の話をする予定だ．楽しみにして．
- エミリー：テンソルのいろいろなことが紹介されるのね．楽しみだわ．

第2話 テンソルの定義とその種類

2.1 多重線形形式によるテンソルの定義

2.1.1 双線形形式

- K氏：さて，お約束通りテンソルを新たに定義しよう．第1話でテンソルの成分 T_{ij} は (1.1.12) で見たように

$$T_{ij} = e_i \cdot T e_j \quad (2.1.1)$$

というベクトルの内積で与えられた． T_{ij} は一つの実数，スカラーだ．この数 T_{ij} は見て分かるようにベクトル e_i と e_j によって決まる．ということは実数値 T_{ij} は2つのベクトル e_i, e_j の関数と見做そうというわけだ．この関係を

$$T_{ij} = e_i \cdot T e_j = T(e_i, e_j) = \begin{cases} T_{11} = T(e_1, e_1) & T_{12} = T(e_1, e_2) & T_{13} = T(e_1, e_3) \\ T_{21} = T(e_2, e_1) & T_{22} = T(e_2, e_2) & T_{23} = T(e_2, e_3) \\ T_{31} = T(e_3, e_1) & T_{32} = T(e_3, e_2) & T_{33} = T(e_3, e_3) \end{cases} \quad (2.1.2)$$

と表わそう．次に，これを少し拡張して，ベクトル x, y を変数とし，実数値 (スカラー) をとる関数 T を考えてみよう．ベクトル x, y, z とスカラー α に対して

$$\begin{cases} T(x + y, z) = T(x, z) + T(y, z) \\ T(\alpha x, z) = \alpha T(x, z) \end{cases} \quad (2.1.3)$$

$$\begin{cases} T(x, y + z) = T(x, y) + T(x, z) \\ T(x, \alpha y) = \alpha T(x, y) \end{cases} \quad (2.1.4)$$

が成り立つとき， T を双線形形式と呼んでいる．これは2つの変数それぞれについて線形性が成り立っているという意味だ．(2.1.3) で第2の変数 z を固定すると，第1の変数に対して線形関係が成り立っているし，(2.1.4) では第1の変数 x を固定すると，第2の変数に対して線形関係が成り立っているだろう．だからあわせて双線形形式というんだね．そして双線形形式の T を2階テンソルと呼んでいる．例えばベクトル x とベクトル y の内積なんかはそのいい例だね．

$$T(x, y) = x \cdot y \quad (2.1.5)$$

とおくと

$$\begin{aligned} T(x_1 + x_2, y) &= (x_1 + x_2) \cdot y = x_1 \cdot y + x_2 \cdot y = T(x_1, y) + T(x_2, y) \\ T(\alpha x, y) &= (\alpha x) \cdot y = \alpha(x \cdot y) = \alpha T(x, y) \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

となつて， T は (2.1.3) の関係を満たすだろう．同様にして (2.1.4) の関係も満たすね．これから T は双線形形式で，ベクトルの内積は2階テンソルということになる．なお，第1話でやったテンソルの定義 $y = T x$ の T と同じだね．

- エミリー：双線形形式による2階テンソルの定義はなんとなく分かったような気にもなるけど、もう少し具体的に説明していただけるかしら。
- K氏：了解。ベクトル x, y は基底を使って書くと次のようになる。

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3 = \sum_{i=1}^2 x_i\mathbf{e}_i \\ \mathbf{y} &= y_1\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 + y_3\mathbf{e}_3 = \sum_{j=1}^2 y_j\mathbf{e}_j \end{aligned} \quad (2.1.7)$$

T の双線形性より

$$\begin{aligned} T(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= T(x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3, y_1\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 + y_3\mathbf{e}_3) \\ &= T(x_1\mathbf{e}_1, y_1\mathbf{e}_1) + T(x_1\mathbf{e}_1, y_2\mathbf{e}_2) + T(x_1\mathbf{e}_1, y_3\mathbf{e}_3) \\ &\quad + T(x_2\mathbf{e}_1, y_1\mathbf{e}_1) + T(x_2\mathbf{e}_1, y_2\mathbf{e}_2) + T(x_2\mathbf{e}_1, y_3\mathbf{e}_3) \\ &\quad + T(x_3\mathbf{e}_1, y_1\mathbf{e}_1) + T(x_3\mathbf{e}_1, y_2\mathbf{e}_2) + T(x_3\mathbf{e}_1, y_3\mathbf{e}_3) \end{aligned} \quad (2.1.8)$$

と表すことができる。さらに続けると

$$\begin{aligned} T(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= x_1y_1T(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) + x_1y_2T(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) + x_1y_3T(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3) \\ &\quad + x_2y_1T(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) + x_2y_2T(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) + x_2y_3T(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \\ &\quad + x_3y_1T(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1) + x_3y_2T(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2) + x_3y_3T(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3) \\ &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 x_iy_jT(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = x_iy_jT(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) \end{aligned} \quad (2.1.9)$$

ここで (2.1.2) を使うと

$$\begin{aligned} T(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= x_iy_jT(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) \\ &= x_1y_1T_{11} + x_1y_2T_{12} + x_1y_3T_{13} \\ &\quad + x_2y_1T_{21} + x_2y_2T_{22} + x_2y_3T_{23} \\ &\quad + x_3y_1T_{31} + x_3y_2T_{32} + x_3y_3T_{33} \\ &= \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 T_{ij}x_iy_j = T_{ij}x_iy_j \end{aligned} \quad (2.1.10)$$

最後は、一つの項の中に同じ添字が2回現れた場合その添字について和をとる、というアインシュタインの規約を使っている。この規約による書き方はこれからもちよいちよい顔をだすので??とならないように頼むよ。さて、基底ベクトル \mathbf{e}_i に対する T の9個の成分 T_{ij} を知れば、任意のベクトル \mathbf{x}, \mathbf{y} に対する実数値 $T(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ を知ることができる。 T_{ij} は基底 \mathbf{e}_i に関する2階テンソル T の成分だね。ところで少し話題を変えて、ある特定のベクトル \mathbf{a} と任意のベクトル \mathbf{b} との内積を考えると

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^3 a_i b_i \quad (2.1.11)$$

となつて、この値は実数だ。そこで $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ をベクトル \mathbf{b} の関数と考え

$$\mathbf{a}(\mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \quad (2.1.12)$$

としてみよう．そうすると，この関数 $a(b)$ は実数値をとり，さらに次のように線形性が成り立つことが分かる．

$$\begin{aligned} a(b+c) &= a(b) + a(c) \\ a(\alpha b) &= \alpha a(b) \end{aligned} \tag{2.1.13}$$

つまり，ベクトル a はそれ自身 1 個のベクトル変数 b について線形性を持つ実数値関数であるといえる．このことからベクトルは 1 階のテンソルとも言われるんだ．基底ベクトル e_i に対する a の値は

$$a(e_i) = a \cdot e_i = a_i \tag{2.1.14}$$

で， a のもともとの第 i 成分と一致している．

- エミリー：2 個のベクトル変数をもつ線形スカラー関数は 2 階テンソルということだから，ベクトル変数が 1 個の線形スカラー関数は 1 階のテンソルということね．その成分は $T_i = a_i$ ということで，下付きの添え字は 1 個ね．テンソルというのはベクトルより基本的な量ということかしら．スカラーはそうすると 0 階テンソルということになるの？

2.1.2 多重線形形式

- K 氏：うん，スカラーは 0 階テンソルだね．この辺りのことは先の話で予定しているテンソルの座標変換のところでもよりはっきりと分かるようになると思う．その話題はまだ先へ伸ばしておくとして，ここでは双線形性を拡張して多重線形形式による高階テンソルの定義を載せておこう．
まず 3 階テンソルだけど，任意の 3 つのベクトル x, y, z に対して実数値 $T(x, y, z)$ を対応させる関数 T があって，次の 3 重線形性が成り立つとしたとき， T を 3 階テンソルといっている．

$$\begin{cases} T(x+w, y, z) = T(x, y, z) + T(w, y, z) \\ T(\alpha x, y, z) = \alpha T(x, y, z) \end{cases} \tag{2.1.15}$$

$$\begin{cases} T(x, y+w, z) = T(x, y, z) + T(x, w, z) \\ T(x, \alpha y, z) = \alpha T(x, y, z) \end{cases} \tag{2.1.16}$$

$$\begin{cases} T(x, y, z+w) = T(x, y, z) + T(x, y, w) \\ T(x, y, \alpha z) = \alpha T(x, y, z) \end{cases} \tag{2.1.17}$$

T を 3 階テンソルとして

$$T_{ijk} = T(e_i, e_j, e_k) \quad (i, j, k = 1, 2, 3) \tag{2.1.18}$$

とおこう．成分の数は $3^3 = 27$ 個だ！ T の 3 重線形性より

$$\begin{aligned} T(x, y, z) &= T\left(\sum_{i=1}^3 x_i e_i, \sum_{j=1}^3 y_j e_j, \sum_{k=1}^3 z_k e_k\right) \\ &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 T(x_i e_i, y_j e_j, z_k e_k) \\ &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 x_i y_j z_k T(e_i, e_j, e_k) \\ &= T_{ijk} x_i y_j z_k \end{aligned} \tag{2.1.19}$$

となる．基底ベクトル系 e_i に対する T の 27 個の成分 T_{ijk} が分かれば，任意のベクトルに対する実数値 $T(x, y, z)$ を知ることができる． T_{ijk} は基底系 e_i に関する 3 階テンソル T の成分だね．

次に 4 階テンソルだが，任意の 4 つのベクトル x, y, z, u に対して実数値 $T(x, y, z, u)$ を対応させる関数 T があって，4 重線形性が成り立つとしたとき， T を 4 階テンソルといっている．基底ベクトルを e_1, e_2, e_3 として，テンソル成分を

$$T_{ijkl} = T(e_i, e_j, e_k, e_l) \quad (2.1.20)$$

とおくと，成分の数は合計ナント $3^4 = 81$ 個となる． $T(x, y, z, u)$ は次式で与えられる．

$$T(x, y, z, u) = T_{ijkl}x_i y_j z_k u_l \quad (2.1.21)$$

以上，多重線形形式による 4 階までの高階テンソルの定義を見てきたけど，5 階，6 階などへの形式的な拡張は容易だよな．一般に n 個の任意のベクトル x_1, x_2, \dots, x_n に対して実数値 $T(x_1, x_2, \dots, x_n)$ を対応させる関数 T があって，それぞれのベクトル変数について線形性

$$\begin{aligned} T(x_1, \dots, x_r + x_r', \dots, x_n) &= T(x_1, \dots, x_r, \dots, x_n) + T(x_1, \dots, x_r', \dots, x_n) \\ T(x_1, \dots, \alpha x_r, \dots, x_n) &= \alpha T(x_1, \dots, x_r, \dots, x_n) \quad (r = 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (2.1.22)$$

が成り立つとき，関数 T を n 階のテンソルといい， n をそのテンソルの階数というんだね．テンソルは高階になるほどその成分の数は厭になるほど多くなるネ．

- エミリー：一般論になると“...”なんかが沢山でてきて目がチラチラし，難しそうに感じてしまうわ．
- K 氏：具体的なケースさえしっかり捉えておけば，一般論はざっくり見ておけばよいと思うけど．
- エミリー：2 階，3 階，4 階と高階テンソルのお話を伺ってきたわけだけど，具体的な物理量としてどのようなものがあるのかしら．2 階テンソルは冒頭に登場した誘電率テンソルや応力テンソルがそうなんだけど，3 階や 4 階テンソルの具体例を上げていただけませんかしら．
- K 氏：そうだね，思いつくままに上げると，2 階テンソルはエミリーがいった他に慣性テンソル，角運動量テンソル，マクスウェルの応力テンソルなどがあるし，3 階テンソルはいまちょっと思いつかないけど，4 階テンソルは弾性テンソルなどがあるね．
- エミリー：そうなんだ．2 階ぐらいで収めておこうかなと思っていたけど，そういうわけにもいかないわね．
- K 氏：まあ，余力をまずにやっていくことにしよう．

2.2 テンソルの演算

2.2.1 単位テンソルとゼロテンソル

- K 氏：演算の基本的な数として 0 と 1 は必須だよな．ベクトルに単位ベクトル I とかゼロベクトル 0 があったように，テンソルにも単位テンソルとゼロテンソルがある．任意のベクトル x に対して

$$Ix = x \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad (2.2.1)$$

であるとき, I を単位テンソルという. クロネッカ - のデルタと呼ばれる δ_{ij} を使うと単位テンソルは

$$I_{ij} = \delta_{ij}, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (2.2.2)$$

と小洒落た書き方ができる. 逆に言うとクロネッカーの (δ_{ij}) は単位テンソルということだね. 次にゼロテンソルだけど, 任意のベクトル x に対して

$$Ox = 0 \quad (2.2.3)$$

であるとき, O をゼロテンソルという. 当たり前だけど, ゼロテンソル成分はすべて 0.

- エミリー: 単位テンソルは 2 階テンソルだけど, 3 階, 4 階といった高階単位テンソルというものもあるのかしら?
- K 氏: そうだね, 4 階単位テンソルというのをどこかでみかけたことはあるよ. さて, 次にテンソル算法の話に入るう.

2.2.2 和, 差, スカラー倍とテンソル積

- K 氏: 簡単のために 2 階テンソルを例にとるけど, 同じ階数のテンソル T と S があってそれぞれの成分を T_{ij}, S_{ij} とすると, テンソルの和, 差, スカラー倍は次のように表される. 高階テンソルでも同じだ. もっとも, テンソルの階数は同じでないと駄目だけど.

$$\begin{cases} \text{テンソルの和: } U = T + S, & \text{成分: } U_{ij} = T_{ij} + S_{ij} \\ \text{テンソルの差: } V = T - S, & \text{成分: } V_{ij} = T_{ij} - S_{ij} \\ \text{スカラー倍: } W = \alpha T, & \text{成分: } W_{ij} = \alpha T_{ij} \end{cases} \quad (2.2.4)$$

テンソルの対応する成分がすべて等しく $T_{ij} = S_{ij}$ ならば, $T = S$ だね.

p 階と q 階のテンソル積は $p + q$ 階のテンソル

- 次にテンソル積だ. この場合 2 つのテンソル T, S の階数は異なってもかまわない. いま 2 階テンソル T, S の成分をそれぞれ T_{ij}, S_{ij} としよう. そうすると T と S のテンソル積は

$$W = T \otimes S = T_{ij}S_{kl} = W_{ijkl} \quad (2.2.5)$$

で表し, これか 4 階テンソルになる. 同様に, 2 階テンソル T_{ij} と 3 階テンソル S_{ijk} のテンソル積は

$$U = T \otimes S = T_{ij}S_{klm} = W_{ijklm} \quad (2.2.6)$$

と表し, これは 5 階テンソルになる. \otimes という記号はテンソル積ですよという意味だね. 一般に p 階テンソルと q 階テンソルのテンソル積は $p + q$ 階のテンソルとなる. なお, 一般にテンソル積は交換関係が成立しない,

$$T \otimes S \neq S \otimes T \quad (2.2.7)$$

であることに注意してください.

- エミリー：テンソル積というのは各テンソルのすべての成分の相互の積，つまり総当りの積を成分とするのね． T, S を

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{pmatrix}$$

という 2 階テンソルすれば， W は合計 $9 \times 9 = 81$ 個の成分を持つ 4 階テンソルになるのね．成分を全部書くのは大変だから，少しだけ具体的に書くと

$$\begin{aligned} W_{1111} &= T_{11}S_{11}, & W_{1112} &= T_{11}S_{12}, & W_{1113} &= T_{11}S_{13} \\ W_{1121} &= T_{11}S_{21}, & W_{1122} &= T_{11}S_{22}, & W_{1123} &= T_{11}S_{23} \\ W_{1131} &= T_{11}S_{31}, & W_{1132} &= T_{11}S_{32}, & W_{1133} &= T_{11}S_{33} \\ &\vdots & &\vdots & &\vdots \\ W_{1211} &= T_{12}S_{11}, & W_{1212} &= T_{12}S_{12}, & W_{1213} &= T_{12}S_{13} \\ &&&&&\vdots \end{aligned} \tag{2.2.8}$$

といった調子ね．

ベクトルのテンソル積はダイアド

- K 氏：そうだね．ところで，テンソル積については次の演算則が成り立つんだ． α, β を任意の数として

$$\begin{aligned} (\alpha T \otimes \beta S) \otimes U &= \alpha T \otimes (\beta S \otimes U) \\ (\alpha T + \beta S) \otimes U &= \alpha T \otimes U + \beta S \otimes U \quad (T \text{ と } S \text{ は同階}) \\ U \otimes (\alpha T + \beta S) &= \alpha U \otimes T + \beta U \otimes T \quad (T \text{ と } S \text{ は同階}) \end{aligned} \tag{2.2.9}$$

ベクトルは 1 階のテンソルと見做せるね．だから，ベクトル a と b のテンソル積，これを直積といたりもするけど，

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} &= (a_i \mathbf{e}_i) \otimes (b_j \mathbf{e}_j) \\ &= a_i b_j \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \\ &= a_1 b_1 \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + a_1 b_2 \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + a_1 b_3 \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_3 \\ &\quad + a_2 b_1 \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 + a_2 b_2 \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + a_2 b_3 \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_3 \\ &\quad + a_3 b_1 \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_1 + a_3 b_2 \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_2 + a_3 b_3 \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 \end{aligned} \tag{2.2.10}$$

と表せる．これは 1 階 + 1 階の 2 階テンソルだね．基底ベクトル $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ から作られるテンソル積 $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ ($i, j = 1, 2, 3$) の数は，相異なる 3 個から重複を許して 2 個とってできる順列の数（重

複順列： ${}_n\Pi_r = n^r$ 個) となるので全部で $3^2 = 9$ 個だね，具体的には

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

なので，(2.2.10) は

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = a_i b_j \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j = (a_i b_j) = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{pmatrix} \quad (2.2.12)$$

となる．ベクトルのテンソル積 $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ を ab と書くこともあり，内積と違って真ん中のドットはないだろう，これをダイアドと呼んでいる．ダイアドについては「電磁気学のコーナー」にレポートを載せているから時間のあるときにでもチェックすればいいと思うけど．

ところで，ベクトルの内積は交換可能，つまり $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$ だったが，ベクトルのテンソル積は

$$\mathbf{b} \otimes \mathbf{a} = b_i a_j \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j = (a_j b_i) = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_2 b_1 & a_3 b_1 \\ a_1 b_2 & a_2 b_2 & a_3 b_2 \\ a_1 b_3 & a_2 b_3 & a_3 b_3 \end{pmatrix} \quad (2.2.13)$$

となるので，一般に交換則は成立せず

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \neq \mathbf{b} \otimes \mathbf{a} \quad (2.2.14)$$

となる．ただし， $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$ であれば $\mathbf{a} = \alpha \mathbf{b}$ (α : 実数) なので，交換則は成立する．

2 階テンソルの基底

- さて，先ほどでてきた基底ベクトル $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ から作られる 9 個のテンソル積 $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ ($i, j = 1, 2, 3$) を使うと，任意の 2 階テンソル T_{ij} はこれら 9 個の $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ の線形結合で表すことができるね．つまり

$$\begin{aligned} T &= \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix} \\ &= T_{11} \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + T_{12} \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + T_{13} \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_3 \\ &\quad + T_{21} \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 + T_{22} \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + T_{23} \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_3 \\ &\quad + T_{31} \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_1 + T_{32} \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_2 + T_{33} \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 \\ &= T_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \end{aligned} \quad (2.2.15)$$

と表せる．

$$T_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j = O \quad (\text{ゼロテンソル}) \quad (2.2.16)$$

のとき，すべてのテンソル成分は $T_{ij} = 0$ となるので，9 個の $e_i \otimes e_j$ は 1 次独立だ．そこでベクトルの基底と同じように $e_i \otimes e_j$ はテンソル成分 T_{ij} の基底をなすと考えることができる．ついでに，先ほどでてきた単位テンソル I は

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \delta_{ij} e_i \otimes e_j = e_1 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_2 + e_3 \otimes e_3 \quad (2.2.17)$$

と表せるね．

3 階テンソルの基底

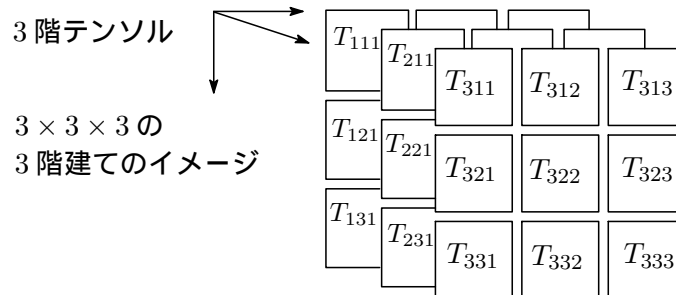
- 3 階テンソルの場合の基底も同様にして

$$e_i \otimes e_j \otimes e_k \quad (2.2.18)$$

で，3 階テンソルは

$$T = T_{ijk} e_i \otimes e_j \otimes e_k \quad (2.2.19)$$

と表せる．3 階テンソルの成分の数は先ほどの重複順列の考えから ${}_3\Pi_3 = 3^3 = 27$ 個となる．3 階以上は行列形式で書けないんだ．先ほどエミリーが 4 階テンソルの成分を書きだしていたけど，3 階テンソルを図で描くと 3 階建ての建物 ($9 \times 3 = 27$) のようになるし，4 階テンソルなら 9 階建て ($9 \times 9 = 81$) となるんだね．



- エミリー：高階テンソルは高層建築ね！ n 階テンソルの成分の数は ${}_3\Pi_n = 3^n$ で，2 階以上のテンソル建築物の敷地面積は $3 \times 3 = 9$ だから，建屋の階層は $3^n \div 9$ になるというわけね．

テンソルの内積

- K 氏：さて，このセクションの話の最後に，テンソルの内積について少し触れておこう．テンソルに内積があるの？と思われそうだが，2 つの 2 階テンソル T と S の内積は

$$T : S = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 T_{ij} S_{ij} = T_{ij} S_{ij} = T_{11} S_{11} + T_{12} S_{12} + \cdots + T_{32} S_{32} + T_{33} S_{33} \quad (2.2.20)$$

と定義されるんだ．ベクトルの内積と同じように同じ成分同士の積の総和でスカラーだ．ベクトルの内積と異なるという意味でドットのかわりに $:$ を使っている．例えば 2 階テンソル T の大きさ（長さ）は

$$\|T\| = \sqrt{T : T} = \sqrt{T_{ij} T_{ij}} \quad (2.2.21)$$

で定義されているね．この幾何学的意味を考えようとしても意味ないよ．ベクトルに倣って形式的に拡張しただけのものだ．

2.3 対称・反対称テンソル

2.3.1 対称テンソル

- K氏：2階テンソルの成分が

$$T_{ij} = T_{ji} \quad (2.3.1)$$

を満たすとき、 T を対称テンソルという。第2話の冒頭で双線形形式によるテンソルの定義をしたけど、それに従えば

$$T(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = T(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \quad (2.3.2)$$

ということだ。9個の成分のうち独立成分は6個となる。というのは独立成分の数は添え字としての $i, j = 1, 2, 3$ の3個から重複を許して2個選択する組み合わせの数¹のに等しいので

$$\text{独立成分数} = {}_3H_2 = {}_4C_2 = 6$$

となるね。2階テンソルの場合、成分は行列形式で書けたから、対称テンソルは

$$\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{21} & T_{31} \\ T_{12} & T_{22} & T_{32} \\ T_{13} & T_{23} & T_{33} \end{pmatrix} \quad (2.3.3)$$

と表せる。転置を上付きの t で表すと2階対称テンソルは

$$T = {}^tT \iff T_{ij} = T_{ji} \quad (2.3.4)$$

とも書ける。 tT を転置テンソルという。

3階対称テンソルはすべての添え字について対称、つまり任意の2つの添字を交換しても変わらないので

$$T_{ijk} = T_{jik} = T_{kij} \quad (2.3.5)$$

3重線形形式に従えば

$$T(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = T(\mathbf{y}, \mathbf{x}, \mathbf{z}) = T(\mathbf{z}, \mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (2.3.6)$$

と書ける。独立成分の数は添え字の組み合わせとして

$$(i, j, k) = (111), (112), (122), (113), (133), (222), (223), (233), (333), (123)$$

の10個になるね。この数は3つの異なる数から重複を許して3つとる重複組み合わせの数に等しいので、 ${}_nH_r = {}_{n+r-1}C_r$ で $n = 3, r = 3$ とおいて10となる。

とことで、3階テンソル T_{ijk} で j, k について対称の場合の独立成分の数をついでに求めておこう。

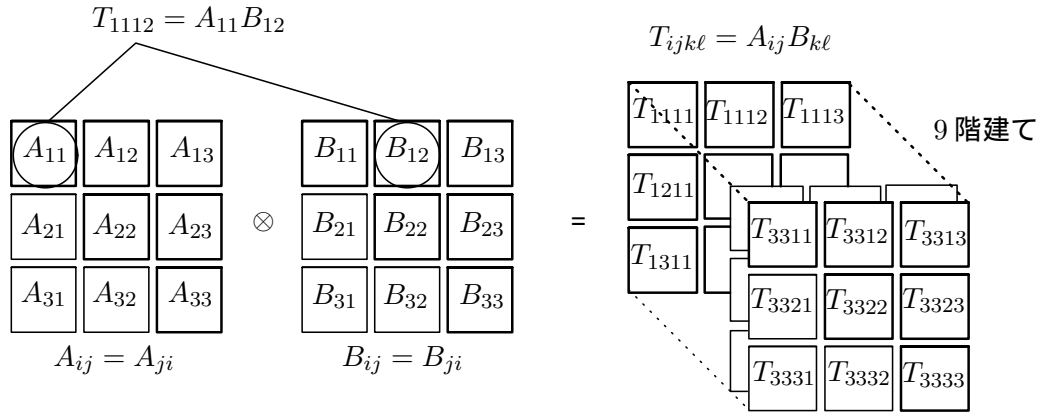
$$T_{ijk} = T_{ikj} \quad (2.3.7)$$

j, k の選び方は3つの異なる数から重複を許して2つとる重複組み合わせの数に等しいので ${}_3H_2 = 6$ だね。 i は3通りあるので $3 \times 6 = 18$ 個が独立成分の数となる。

最後に4階対称テンソルの独立成分の数だけど、これも重複組み合わせの考えを使えば ${}_3H_4 = 15$ 個となる。また、 T_{ijkl} で $i \leftrightarrow j, k \leftrightarrow l$ について対称な場合の独立成分の数は36個、さらに $ij \leftrightarrow kl$ についても対称な場合には21個の独立成分数となる。

¹重複組み合わせ： n 種の中から重複を許して r 個取りだす組み合わせの数は ${}_nH_r = {}_{n+r-1}C_r = \frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!}$ で与えられる。

- エミリー：一寸待って，後の2つのケースの独立成分数の算出法はどうなっているの？
- K氏：え～っと，4階テンソルは2階テンソルのテンソル積で与えられるだろう．4階対称テンソルで T_{ijkl} で $i \leftrightarrow j, k \leftrightarrow l$ について対称ということは2階対称テンソルのテンソル積と考えれば いいわけだね．2階対称テンソルの独立成分は6個だろう．だから4階対称テンソルの独立成分は $6 \times 6 = 36$ 個となる．下に図を書いておいたから参考にして．



次に， $ij \leftrightarrow kl$ についても対称な場合だけど，言ってみればAブロックとBブロックは対称なので上で求めた独立成分を2分すると $36 \div 2 = 18$ 個．これが独立成分の数 ... と思いがちだが，ここで注意が必要だ．というのはAブロックの添え字 ij とBブロックの添え字 kl が同じ成分，具体的にいえば $T_{1111}, T_{1212}, T_{1313}, T_{2222}, T_{2323}, T_{3333}$ の6成分は36成分の中でそれぞれ1個しかないのをこれを2分すると $6 \div 2 = 3$ で残りの3個の成分数を足さなければいけない．つまり，独立成分は $18 + 3 = 21$ 個となるというわけなんだ．

- エミリー：... え～っと，36成分を全部書き出すと

$$\begin{bmatrix}
 \underline{T_{1111}} & T_{1211} & T_{1311} & T_{2211} & T_{2311} & T_{3311} \\
 \underline{T_{1112}} & \underline{T_{1212}} & T_{1312} & T_{2212} & T_{2312} & T_{3312} \\
 \underline{T_{1113}} & \underline{T_{1213}} & \underline{T_{1313}} & T_{2213} & T_{2313} & T_{3313} \\
 \underline{T_{1122}} & T_{1222} & \underline{T_{1322}} & \underline{T_{2222}} & T_{2322} & T_{3322} \\
 \underline{T_{1123}} & T_{1223} & \underline{T_{1323}} & \underline{T_{2223}} & \underline{T_{2323}} & T_{3323} \\
 \underline{T_{1133}} & T_{1233} & \underline{T_{1333}} & T_{2233} & \underline{T_{2333}} & \underline{T_{3333}}
 \end{bmatrix} \tag{2.3.8}$$

となって，アンダーラインを引いた6成分以外の成分は対称成分として“対”であるわけね．だから $6 \div 2 = 3$ で3成分不足することになるわけか．つまり独立成分は $36 \div 2 + 3 = 21$ 個というわけね，了解したわ．

対称テンソルの独立成分数

- 対称テンソルの独立成分の数をまとめておくと
 - 2階対称テンソル : 6個
 - 3階対称テンソル : 10個 ただし，対称性が低い $T_{ijk} = T_{ikj}$ の場合は18個
 - 4階対称テンソル : 15個 ただし，対象性が低い $i \leftrightarrow j, k \leftrightarrow l, ij \leftrightarrow kl$ の場合は21個
さらに " $i \leftrightarrow j, k \leftrightarrow l$ の場合は36個

ということね．

2.3.2 反対称テンソル

- K氏：反対称テンソルは交代テンソルとも呼ばれる．反対称テンソルは添え字を入れ替えたときに正負が反対になるもので，2階反対称テンソルは

$$T_{ij} = -T_{ji} \quad (2.3.9)$$

を満たす．行列形式で表すと

$$\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} T_{11} & T_{21} & T_{31} \\ T_{12} & T_{22} & T_{32} \\ T_{13} & T_{23} & T_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & T_{12} & -T_{31} \\ -T_{12} & 0 & T_{23} \\ T_{31} & -T_{23} & 0 \end{pmatrix} \quad (2.3.10)$$

なので

$$T = -{}^tT \iff T_{ij} = -T_{ji} \quad (2.3.11)$$

とも書ける． tT は転置テンソルと呼んでいる．2階反対称テンソルの対角成分は0になるから，独立成分の数は3個になるね．3階反対称テンソルは

$$T_{ijk} = T_{jki} = T_{kij} = -T_{jik} = -T_{kji} = -T_{ikj} \quad (2.3.12)$$

を満たす．

- エミリー：最初の3つは添え字の入れ替えを偶数回やっている所以符号は正，後の3つは入れ替えを奇数階やっている所以符号は負ということで，具体的に書けば

$$T_{123} = T_{231} = T_{312} = -T_{213} = -T_{321} = -T_{132}$$

ということね．このことから3階反対称テンソルの独立成分の数は1個になる．

3階反対称テンソルの独立成分の数

- K氏：うん．ところで，3階反対称テンソルでも T_{ijk} が jk について反対称というのもあり，このケースの独立成分は i の選び方が3通りで j, k の選び方は3個のものから2個取りだす組み合わせの数で ${}_3C_2 = 6$ ．従って $3 \times 3 = 9$ 個となるね．また， i と j について対称で j と k については反対称というのも考えられるけど，これはゼロテンソルになる．というのは1番目と2番目の添え字は対称で2番目と3番目の添え字は反対称ということだから

$$T_{ijk} = -T_{ikj} = -T_{kij} = T_{kji} = T_{jki} = -T_{jik} = -T_{ij k}, \quad \therefore T_{ijk} = -T_{ij k}$$

となって T_{ijk} はゼロになるだろ．

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{完全反対称} & : \text{独立成分は1個} \\ T_{ijk} \text{ が } jk \text{ について反対称} & : \quad \quad \quad \text{"} \quad \quad 9 \text{ 個} \\ \quad \quad \quad \text{" } i \text{ と } j \text{ について対称, } j \text{ と } k \text{ について反対称} & : \text{ゼロテンソル} \end{array} \right. \quad (2.3.13)$$

ところで，よく知っていると思うけどレビ・チビタの記号 ε_{ijk} は3階完全反対称テンソルの代表的なものだ．

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & i, j, k: \text{偶置換} \\ -1 & i, j, k: \text{奇置換} \\ 0 & i, j, k \text{ のうちに等しいものがある} \end{cases} \quad (2.3.14)$$

$$\longrightarrow \varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{jki} = \varepsilon_{kij} = -\varepsilon_{jik} = -\varepsilon_{kji} = -\varepsilon_{ikj}$$

この3階完全反対称テンソルを使えば、ベクトルの外積は簡潔に

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k \quad (2.3.15)$$

と定義されるのはご存知の通りだ。\$\varepsilon_{ijk}\$ の次の性質はよく活用される。\$\delta_{ij}\$ はいわゆるクロネッカー - のデルタ。

$$\begin{cases} \sum_i \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ilm} = \delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl} \\ \sum_i \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ijl} = 2\delta_{kl} \\ \sum_{i,j,k} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ijk} = 6 \end{cases} \quad (2.3.16)$$

この \$\varepsilon_{ijk}\$ を使うと2階対称テンソルは

$$\varepsilon_{ijk} T_{jk} = \sum_{j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} T_{jk} = 0 \quad (2.3.17)$$

と書ける。\$\therefore u_i = \varepsilon_{ijk} T_{jk}\$ とおくと

$$u_1 = T_{23} - T_{32}, \quad u_2 = T_{31} - T_{13}, \quad u_3 = T_{12} - T_{21}$$

で、\$u_i = 0\$ は \$T_{jk} = T_{kj}\$ と同じことだからね。

4階以上の反対称テンソルは存在しない

- さて、4階の反対称テンソルはどうかということだが、3次元空間においては4階以上の反対称テンソルはすべて0テンソルになり、存在しないんだ。仮に \$T_{ijkl}\$ を4階反対称テンソルとすると、添え字の \$i, j, k, \ell\$ は1, 2, 3のいずれかであるので、このうち少なくとも2つは等しい。いま \$i = j\$ とすると

$$T_{ijkl} = T_{iikl}$$

ところが \$T_{ijkl} = -T_{jikl}\$ において \$i = j\$ とすると、\$T_{iikl} = -T_{iikl}\$ だから、\$T_{iikl} = 0\$ となる。つまり、\$T_{ijkl} = 0\$ となり、この反対称テンソルは0になるね。

任意の2階テンソルは対称テンソルと反対称テンソルの和

- いま2階対称テンソルを \$S_{ij}\$, 反対称テンソルを \$A_{ij}\$ と表すと、任意の2階テンソル \$T_{ij}\$ は、対称テンソルと反対称テンソルの和で表すことができる。というのは

$$S_{ij} = \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji}) \iff S_{ij} = S_{ji}, \quad A_{ij} = \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji}) \iff A_{ij} = -A_{ji} \quad (2.3.18)$$

とおけるだろ。これから

$$T_{ij} = S_{ij} + A_{ij} \quad (2.3.19)$$

となるね。3階テンソル \$T_{ijk}\$ の場合は

$$S_{ijk} = \frac{1}{2}(T_{ijk} + T_{jik}) \iff S_{ijk} = S_{jik}, \quad A_{ijk} = \frac{1}{2}(T_{ijk} - T_{jik}) \iff A_{ijk} = -A_{jik} \quad (2.3.20)$$

として

$$T_{ijk} = S_{ijk} + A_{ijk} \quad (2.3.21)$$

と表すことができる。

2.3.3 交代積 (ウェッジ積)

- K 氏 : 2 つのベクトル a, b に対して

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} &= \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} - \mathbf{b} \otimes \mathbf{a} \\ &= (a_i b_j - a_j b_i) = \begin{pmatrix} 0 & a_1 b_2 - b_1 a_2 & -(a_3 b_1 - b_3 a_1) \\ -(a_1 b_2 - b_1 a_2) & 0 & a_2 b_3 - b_2 a_3 \\ a_3 b_1 - b_3 a_1 & -(a_2 b_3 - b_2 a_3) & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.3.22)$$

で定義される 2 階反対称テンソル $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ を \mathbf{a} と \mathbf{b} の交代積という。ウェッジ積 (くさび積) とか, 外積, グラスマン積とも呼ばれる。また, 3 個のベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ の交代積は

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} &= \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \otimes \mathbf{c} + \mathbf{b} \otimes \mathbf{c} \otimes \mathbf{a} + \mathbf{c} \otimes \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \\ &\quad - \mathbf{a} \otimes \mathbf{c} \otimes \mathbf{b} - \mathbf{b} \otimes \mathbf{a} \otimes \mathbf{c} - \mathbf{c} \otimes \mathbf{b} \otimes \mathbf{a} \end{aligned} \quad (2.3.23)$$

で定義される。この成分は

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c})_{ijk} &= a_i b_j c_k + b_i c_j a_k + c_i a_j b_k - a_i c_j b_k - b_i a_j c_k - c_i b_j a_k \\ &= \begin{vmatrix} a_i & a_j & a_k \\ b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{vmatrix} = \varepsilon_{ijk} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (2.3.24)$$

となる。2 つのベクトルの交代積は次の規則に従う。

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{定数倍} \quad (k\mathbf{a}) \wedge \mathbf{b} = \mathbf{a} \wedge (k\mathbf{b}) = k(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \\ \text{分配則} \quad \mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{c} \\ \quad \quad \quad (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \wedge \mathbf{c} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{c} + \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} \\ \text{交代性} \quad \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = -\mathbf{b} \wedge \mathbf{a} \end{array} \right. \quad (2.3.25)$$

同様に 3 つのベクトルの交代積は

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{定数倍} \quad (k\mathbf{a}) \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} = \mathbf{a} \wedge (k\mathbf{b}) \wedge \mathbf{c} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge (k\mathbf{c}) = k(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) \\ \text{分配則} \quad (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \wedge \mathbf{c} \wedge \mathbf{d} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{c} \wedge \mathbf{d} + \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} \wedge \mathbf{d} \\ \quad \quad \quad \mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} + \mathbf{c}) \wedge \mathbf{d} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{d} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{c} \wedge \mathbf{d} \\ \quad \quad \quad \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge (\mathbf{c} + \mathbf{d}) = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{d} \\ \text{交代性} \quad \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} = -\mathbf{a} \wedge \mathbf{c} \wedge \mathbf{b} = -\mathbf{c} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{a} = -\mathbf{b} \wedge \mathbf{a} \wedge \mathbf{c} \end{array} \right. \quad (2.3.26)$$

基底ベクトル e_1, e_2, e_3 の交代積を見てみよう。

$$\begin{aligned} e_1 \wedge e_1 &= e_2 \wedge e_2 = e_3 \wedge e_3 = O \quad (2 \text{ 階ゼロテンソル}) \\ e_2 \wedge e_3 &= -e_3 \wedge e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ e_3 \wedge e_1 &= -e_1 \wedge e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ e_1 \wedge e_2 &= -e_2 \wedge e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.3.27)$$

となり, $e_2 \wedge e_3, e_3 \wedge e_1, e_1 \wedge e_2$ は互いに異なる 2 階反対称テンソルとなる. (2.2.15) より任意の 2 階テンソルは

$$T = T_{ij}e_i \otimes e_j \quad (2.3.28)$$

で表せた. いま, A_{ij} を反対称テンソルとすると

$$\begin{aligned} A &= A_{ij}e_i \otimes e_j = A_{12}e_1 \otimes e_2 + A_{13}e_1 \otimes e_3 + A_{21}e_2 \otimes e_1 \\ &\quad + A_{23}e_2 \otimes e_3 + A_{31}e_3 \otimes e_1 + A_{32}e_3 \otimes e_2 \\ &= A_{12}(e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1) + A_{13}(e_1 \otimes e_3 - e_3 \otimes e_1) + A_{23}(e_2 \otimes e_3 - e_3 \otimes e_2) \\ &= A_{12}e_1 \wedge e_2 + A_{13}e_1 \wedge e_3 + A_{23}e_2 \wedge e_3 \\ &= \sum_{i < j} A_{ij}e_i \wedge e_j = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 A_{ij}e_i \wedge e_j = \frac{1}{2} A_{ij}e_i \wedge e_j \end{aligned} \quad (2.3.29)$$

と表せる. また, $A_{ij}e_i \wedge e_j$ がゼロテンソルなら係数 A_{ij} はすべて 0 でなければならない. という
ことで 3 個の $e_2 \wedge e_3, e_3 \wedge e_1, e_1 \wedge e_2$ は 1 次独立で, 反対称テンソルの基底をなすことが分かる.

- エミリー: 3 階テンソルは (2.2.19) より

$$T = T_{ijk}e_i \otimes e_j \otimes e_k \quad (2.3.30)$$

と表せたわね. 2 階反対称テンソルの基底が 3 個の $e_1 \wedge e_2, e_2 \wedge e_3, e_3 \wedge e_1$ なら, 3 階反対称テンソルの基底はどうなるのかしら?

- K 氏: そうだね, 結論からいうと

$$\begin{aligned} e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 &= e_2 \wedge e_3 \wedge e_1 = e_3 \wedge e_1 \wedge e_2 \\ &= -e_1 \wedge e_3 \wedge e_2 = -e_2 \wedge e_1 \wedge e_3 = -e_3 \wedge e_2 \wedge e_1 \\ &= (\varepsilon_{ijk}) \end{aligned} \quad (2.3.31)$$

となって, 独立な基底は 1 個になるんだ. このことは上でやったと同じようにすれば分かるので
フォローしておいてください. ε_{ijk} は 3 階反対称テンソルとなるので, テンソル成分は下図の
ように $3 \times 3 \times 3$ の 3 階建てのイメージで表せる.

$$(\varepsilon_{ijk}) \equiv \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \varepsilon_{111} & \varepsilon_{113} & \varepsilon_{211} & \varepsilon_{213} & \varepsilon_{311} & \varepsilon_{313} \\ \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 0 & -1 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|c|} \hline -1 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & -1 & 0 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \\ \varepsilon_{131} & & & & & \end{array} \end{array}$$

- エミリー: え~っと, ここでのお話の要点を整理すると次ようになるのね. まず 2 階テンソル
に関して

- $e_i \otimes e_j$ は 2 階テンソルの基底をなす. 独立成分は 9 個.

$$T = T_{ij}e_i \otimes e_j \quad (2.3.32)$$

- $e_i \wedge e_l$ は 2 階反対称テンソルの基底をなす．独立成分は 3 個．

$$A = \frac{1}{2} A_{ij} e_i \wedge e_j \quad (2.3.33)$$

- 2 階対称テンソルは次式が成立する．独立成分の数は 6 個．

$$\varepsilon_{ijk} S_{jk} = 0 \quad (2.3.34)$$

- すべての 2 階テンソルは 2 階対称テンソルと反対称テンソルの和で表される．

$$T_{ij} = S_{ij} + A_{ij} \quad (2.3.35)$$

3 階テンソルに関して

- $e_i \otimes e_j \otimes e_k$ は 3 階テンソルの基底をなす．成分の数は $9 \times 3 = 27$ 個．
- $e_i \wedge e_j \wedge e_k$ は 3 階反対称テンソルの基底をなす．独立成分の数は 1 個．
- すべての 3 階テンソルは 3 階対称テンソルと反対称テンソルの和で表される．

$$T_{ijk} = S_{ijk} + A_{ijk} \quad (2.3.36)$$

4 階以上の高階反対称テンソルは存在しない．

2.3.4 テンソルの既約分解

- K 氏：そろそろ第 2 話をお開きにしたいと思うのだが，最後にテンソルの既約分解について少しだけ触れておこう．任意のテンソルは対称テンソルと反対称テンソルの和に分解できたね．既約分解というのはテンソルを既約テンソルに分解することで，既約テンソルというのはトレースが 0 のテンソル，もうそれ以上分解できないテンソルのことをいう．それでは早速具体的にみていこう．2 階テンソルは (2.3.19) でやったように

$$T_{ij} = S_{ij} + A_{ij} \quad (2.3.37)$$

と分解できた．反対称テンソル A_{ij} は $Tr(A) = 0$ だからこれは既約テンソルだね．ところで対称テンソル S_{ij} は必ずしもトレースが 0 でないので既約テンソルではない．そこで

$$\begin{aligned} S_{ij} &= \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji}) - \frac{1}{3}T\delta_{ij} = S_{ij} - \frac{1}{3}T\delta_{ij}, \quad (T = T_{ii}) \\ \therefore S_{ij} &= S_{ij} + \frac{1}{3}T\delta_{ij} \end{aligned} \quad (2.3.38)$$

としてやれば S_{ij} は既約テンソル S_{ij} ($Tr(S) = 0$) とスカラー $-\frac{1}{3}T\delta_{ij}$ に分解することができる．

- エミリー：具体的に書き下すと

$$\begin{aligned} S_{11} &= \frac{1}{2}(T_{11} + T_{11}) - \frac{1}{3}(T_{11} + T_{22} + T_{33}) = T_{11} - \frac{1}{3}(T_{11} + T_{22} + T_{33}) \\ S_{22} &= \frac{1}{2}(T_{22} + T_{22}) - \frac{1}{3}(T_{11} + T_{22} + T_{33}) = T_{22} - \frac{1}{3}(T_{11} + T_{22} + T_{33}) \\ S_{33} &= \frac{1}{2}(T_{33} + T_{33}) - \frac{1}{3}(T_{11} + T_{22} + T_{33}) = T_{33} - \frac{1}{3}(T_{11} + T_{22} + T_{33}) \end{aligned} \quad (2.3.39)$$

$$\therefore Tr(S) = S_{11} + S_{22} + S_{33} = 0$$

となって， S は既約テンソルになるわね，ナルホド．

- K氏：そうすると T_{ij} は次のように 3 個の既約テンソルに分解できることになるだろう。

$$T_{ij} = \frac{1}{3}T\delta_{ij} + A_{ij} + S_{ij} \quad (2.3.40)$$

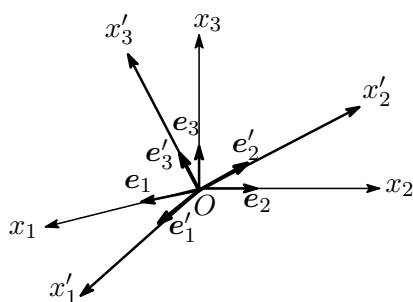
右辺第 1 項はスカラーで 0 階テンソル，第 2 項の反対称テンソルは成分が 3 個でベクトルに相当するので 1 階のテンソル（第 3 話の軸性テンソルの項を参照），第 3 項は 2 階のテンソルということだね．既約テンソルの話は量子力学の角運動量理論で使われるが，詳しいことを知りたければ参考図書として M.E ローズ著（山内恭彦，森田正人訳）「角運動量の基礎理論」（みすず書房）をあげておこう．

以上で第 2 話を終了する，お疲れ様．第 3 話はテンソルの直交座標変換の話題を取り上げる予定だ．お楽しみに．

第3話 テンソルを座標変換すると

3.1 座標変換とテンソル

- K氏：さて，第3話に入ったね．ここでは座標変換でテンソルがどのように変換されるのか調べていこう．2つの空間座標系として x_1, x_2, x_3 と x'_1, x'_2, x'_3 を考える．それぞれの座標系の直交基底ベクトルの組を $\Sigma: (e_1, e_2, e_3)$, $\Sigma': (e'_1, e'_2, e'_3)$ としよう．



$$e_i \cdot e_j = \delta_{ij}, \quad e'_i \cdot e'_j = \delta_{ij}$$

$$e'_i = \sum_{j=1}^3 a_{ij} e_j = a_{ij} e_j, \quad e_j = \sum_{i=1}^3 a_{ij} e'_i = a_{ij} e'_i$$

$$a_{ik} a_{jk} = \delta_{ij}, \quad a_{ki} a_{kj} = \delta_{ij}$$

A : 直交行列

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad {}^t A = (a_{ji}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} {}^t A A &= I \\ |A| &= \pm 1 \\ A^{-1} &= {}^t A \end{aligned}$$

直交座標変換の計算で必要となる関係式を図中に載せておいたけど，よく知っているものとして特に説明は省くよ．忘れたのなら適当なベクトル解析の本や線形代数の本をザッと眺めておいて欲しい．

- エミリー：座標変換は「推進」「回転」「空間反転」の3つがあるわね． \det は行列式を意味するとして，回転の場合，

$$\det A = |A| = 1, \quad a_{ik} a_{jk} = \delta_{ij} \tag{3.1.1}$$

が成り立ち，空間反転の場合は $(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, -z)$ となるので

$$\det A = |A| = -1, \quad a_{ij} = -\delta_{ij} \tag{3.1.2}$$

が成り立つ．直交行列 A の転置行列 ${}^t A$ は逆行列 A^{-1} に等しいのね．

空間反転では $\det A = -1$

- K氏：そうだね．ところで後の話とも関係してくるので，直交変換の空間反転というのを少し復習しておこう．空間反転は右手座標系から左手座標系への変換だね．これは回転のように連続的に変わらない不連続な変換だ．通常われわれは右手座標系で考えているわけだが，右があれば左があるわけで，これは互いの基底の向きが真反対という関係にあるんだね．いま空間反転変換で

e_i が e'_i に変換されたとすると

$$e'_i = a_{ij}e_j \begin{cases} e'_1 = a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + a_{13}e_3 \\ e'_2 = a_{21}e_1 + a_{22}e_2 + a_{23}e_3 \\ e'_3 = a_{31}e_1 + a_{32}e_2 + a_{33}e_3 \end{cases} \quad (3.1.3)$$

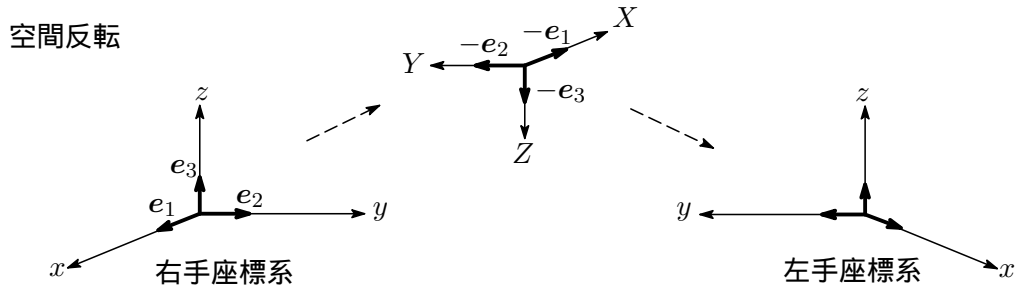
ここで $e'_1 = -e_1, e'_2 = -e_2, e'_3 = -e_3$ とおいて, 上式に入れて整理すると

$$\begin{aligned} (a_{11} + 1)e_1 + a_{12}e_2 + a_{13}e_3 &= 0 \\ a_{21}e_1 + (a_{22} + 1)e_2 + a_{23}e_3 &= 0 \\ a_{31}e_1 + a_{32}e_2 + (a_{33} + 1)e_3 &= 0 \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

基底ベクトルは 1 次独立なので上式より

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = -1 \quad (3.1.5)$$

で他の係数は 0 となるね. だから, 反転では $\det A = -1$ となるわけだ. $\det A$ の符号を調べれば



空間反転かどうか分かるわけだ. さて, テンソルの座標変換の話に入ろう.

3.1.1 テンソルの座標変換

- K 氏: 基底 Σ と Σ' に関する 2 階テンソル T の成分は (2.1.2) より

$$T_{ij} = T(e_i, e_j), \quad T'_{ij} = T(e'_i, e'_j) \quad (3.1.6)$$

と表される. 直交基底の変換則 $e'_i = a_{ik}e_k$ を使うと (3.1.6) の第 2 式は T の双線形性 (2.1.3), (2.1.4) より

$$T'_{ij} = T(e'_i, e'_j) = T(a_{ik}e_k, a_{jl}e_l) = a_{ik}a_{jl}T(e_k, e_l) = a_{ik}a_{jl}T_{kl} \quad (3.1.7)$$

となって 2 階テンソルの求める座標変換変換公式

$$T'_{ij} = a_{ik}a_{jl}T_{kl} \quad (3.1.8)$$

が得られる. ついでと云ったらナンだけど, $T_{kl} = \delta_{kl}$ と置いてやると

$$T'_{ij} = a_{ik}a_{jl}\delta_{kl} = a_{ik}a_{jk} = \delta_{ij} \quad (3.1.9)$$

となるだろう. クロネッカーの δ はどの直角座標系においても単位行列の成分をもつ 2 階テンソルということだね. さて, 話を元に戻して, いま, ベクトル u_i, v_i をそれぞれベクトルの成分と

するとき, $u_i v_j$ ($i, j = 1, 2, 3$) は 2 階テンソルの成分であることを示しておこう. ベクトルの座標変換により

$$\begin{aligned} u'_i &= a_{jk} u_k, & v'_j &= a_{j\ell} v_\ell \\ \therefore u'_i v'_j &= a_{ik} u_k a_{j\ell} v_\ell = a_{ik} a_{j\ell} u_k v_\ell \end{aligned} \quad (3.1.10)$$

となる. ここで $T'_{ij} = u'_i v'_j$ とおくと (3.1.10) は

$$T'_{ij} = a_{ik} a_{j\ell} T_{k\ell} \quad (3.1.11)$$

となるので, $u_i v_j$ ($i, j = 1, 2, 3$) は 2 階テンソルの成分ということになる.

さて, 3 階テンソルの座標変換公式は 2 階テンソルの場合とまったく同様にして

$$T'_{ijk} = a_{i\ell} a_{jm} a_{kn} T_{lmn} \quad (3.1.12)$$

となる. いま, ベクトル u_i, v_i, w_i をそれぞれベクトルの成分とすると, $u_i v_j w_k$ ($i, j, k = 1, 2, 3$) は 3 階テンソルの成分であることを示しておこう. ベクトルの座標変換により

$$\begin{aligned} u'_i &= a_{i\ell} u_\ell, & v'_j &= a_{jm} v_m, & w'_k &= a_{kn} w'_n \\ \therefore u'_i v'_j w'_k &= a_{i\ell} a_{jm} a_{kn} u_\ell v_m w_n \end{aligned} \quad (3.1.13)$$

となる. ここで $T'_{ijk} = u'_i v'_j w'_k$ とおくと (3.1.13) は

$$T'_{ijk} = a_{i\ell} a_{jm} a_{kn} T_{lmn} \quad (3.1.14)$$

となるので, $u_i v_j w_k$ ($i, j, k = 1, 2, 3$) は 3 階テンソルの成分ということになる. ところで, 左右の辺の添え字の並びを見るとキチンと規則だって並んでいることが分かるだろう.

テンソルの座標変換公式

- このことを利用すれば高階テンソルの座標変換公式は即座に求めることができる! 例えば 4 階テンソルなら次の通りだ.

$$T'_{ijkl} = a_{ip} a_{jq} a_{kr} a_{ls} T_{pqrst} \quad (3.1.15)$$

添え字の並び方を図示すると 3 階テンソルの場合次の通りだね.

$$T'_{ijk} = a_{i\ell} a_{jm} a_{kn} T_{lmn}$$

- エミリー: ナルホドねえ~, テンソルの座標変換といっても恐くわないわね!
- K氏: そうだね, 公式として覚えておけばいいと思う. このような変換則によって, テンソルの 1 つの直交基底に関する成分が分かれば, 他の任意の直交基底に関する成分も即座に求めることができるようになる.

対称性・反対称性は座標変換に依存しない

- ところで，テンソルには対称テンソルと反対称テンソルの2種類があったけど，これらの対称性は座標変換には無関係なテンソルの性質であることを示しておこう．テンソルが Σ 系で対称であったとする． Σ' 系での成分を T'_{ij} とすると

$$T'_{ij} = a_{ik}a_{j\ell}T_{k\ell} \quad (3.1.16)$$

$T_{k\ell} = T_{\ell k}$ なので，上式は

$$T'_{ij} = a_{ik}a_{j\ell}T_{\ell k} = a_{j\ell}a_{ik}T_{\ell k} = T'_{jk} \quad (3.1.17)$$

となって，対称性は座標変換で不変ということが分かる．次に反対称性だが，同様にして

$$T'_{ij} = a_{ik}a_{j\ell}T_{k\ell} = -a_{ik}a_{j\ell}T_{\ell k} = -a_{j\ell}a_{ik}T_{\ell k} = -T'_{jk} \quad (3.1.18)$$

となって，反対称性は座標変換で不変だね．

テンソルの基底を使った変換公式

- さて，変換則の公式を違う視点から導出してみよう．2階テンソルは(2.2.15)に示したように直交基底 $\Sigma: e_i$ あるいは $\Sigma': e'_i$ を使って

$$T_{ij}e_i \otimes e_j, \quad T'_{ij}e'_i \otimes e'_j \quad (3.1.19)$$

と表せた．ところで(3.1.8)と基底の座標変換の公式を使うと

$$T'_{ij}e'_i \otimes e'_j = a_{ik}a_{j\ell}T_{k\ell}e'_i \otimes e'_j = T_{k\ell}e_k \otimes e_\ell \quad (\because e_k = a_{ik}e'_i, e_\ell = a_{j\ell}e'_j) \quad (3.1.20)$$

となるね．これは(3.1.19)で定義される2つのテンソル量は直交基底の取り方に無関係ということになる．つまり

$$T = T_{ij}e_i \otimes e_j = T'_{ij}e'_i \otimes e'_j \quad (3.1.21)$$

だね．(3.1.20)より

$$T'_{ij} = a_{ik}a_{j\ell}T_{k\ell} \quad (3.1.22)$$

が得られるだろ．これは(3.1.8)と同じ公式だ．繰り返さないけど，高階テンソルの場合もまったく同様にできるね．ところで，物理のテキストなんかでは通常，座標変換でこのように変換されるものをテンソルと定義されている．

- エミリー：第1話や第2話ではテンソルをベクトル変数について線形性をもつ関数として捉えてきたけど，直交基底の変換で決められた変換則に従う実数の組をテンソルとして捉えるというのね．え〜っと，ここらで座標変換の公式をまとめておくと，アインシュタインの規約を使えば次のようになるわね．

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{直交基底の変換公式} \quad e'_i = a_{ij}e_j \longleftrightarrow e_j = a_{ij}e'_i \\ \text{ベクトルの変換公式} \quad v'_i = a_{ij}v_j \longleftrightarrow v_j = a_{ij}v'_i, \quad \text{ただし } v(v_1, v_2, v_3) \\ \text{2階テンソルの変換公式} \quad T'_{ij} = a_{ik}a_{j\ell}T_{k\ell} \longleftrightarrow T_{k\ell} = a_{ik}a_{j\ell}T'_{ij} \\ \text{3階テンソルの変換公式} \quad T'_{ijk} = a_{il}a_{jm}a_{kn}T_{lmn} \longleftrightarrow T_{lmn} = a_{il}a_{jm}a_{kn}T'_{ijk} \end{array} \right. \quad (3.1.23)$$

テンソルとベクトルの積など

- K氏：OK！それじゃエミリー，このセクションの最後に次の2つの計算をやるか．これらはいずれも添え字の付き方に留意しておくといいね．

(1) 3階テンソル T_{ijk} とベクトル u_k の積は2階テンソル U_{ij} になる

$$U_{ij} = T_{ijk}u_k \quad (3.1.24)$$

(2) 3階テンソル T_{ijk} と2階テンソル S_{jk} の積はベクトル u_i になる

$$u_i = T_{ijk}S_{jk} \quad (3.1.25)$$

- エミリー：まず1番目は， Σ' 系で

$$U'_{ij} = T'_{ijk}u'_k$$

が成立する．3階テンソルとベクトルは次のように変換される．

$$T'_{ijk} = a_{ip}a_{jq}a_{kr}T_{pqr}, \quad u'_k = a_{k\ell}u_\ell$$

これを上式に入れて整理すると

$$U'_{ij} = a_{ip}a_{jq}a_{kr}a_{k\ell}T_{pqr}u_\ell = a_{ip}a_{jq}\delta_{r\ell}T_{pqr}u_\ell = a_{ip}a_{jq}T_{pq\ell}u_\ell$$

ところで $T_{pq\ell}u_\ell = U_{pq}$ なので

$$U'_{ij} = a_{ip}a_{jq}U_{pq}$$

となる．これは2階テンソルの変換式，つまり U_{ij} は2階テンソルということになるわね．次に2番目は，同様にして

$$\begin{aligned} T'_{ijk} &= a_{ip}a_{iq}a_{kr}T_{pqr}, & S'_{jk} &= a_{jt}a_{ku}S_{tu} \\ T'_{ijk}S'_{jk} &= a_{ip}a_{jq}a_{jt}a_{kr}a_{ku}T_{pqr}S_{tu} = a_{ip}\delta_{qt}\delta_{ru}T_{pqr}S_{tu} = a_{ip}T_{ptr}S_{tr} = a_{ip}u_p \end{aligned}$$

これはベクトルの変換式．つまり u_i はベクトルということね．

- K氏：そうだね． A, B, S はいずれも添え字の数の階数のテンソルとして，一般に次の関係式が成立するんだ．これは時間のあるときにでもチェックすればいいと思う．ただ，両辺を見比べてみると，添え字の種類と付き方にルールのようなものがあることが分かるだろ．

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{1階テンソル} \quad B_i = S_{ijk}A_{jk} \\ \text{(ベクトル)} \quad B_i = S_{ijk}u_jv_k \\ \text{2階テンソル} \quad B_{ik} = S_{ij}A_{jk} \\ \quad \quad \quad B_{ij} = S_{ijk}A_k \\ \quad \quad \quad B_{k\ell} = S_{ijk\ell}A_{ij} \\ \text{3階テンソル} \quad B_{ijk} = S_{ij}A_k \end{array} \right. \quad (3.1.26)$$

- エミリー：そうね，右辺の添え字で同じものを消すと，残った添え字は左辺の添え字になっているわね．つまり， B は残った添え字の数の階数テンソルというわけね．
- K氏：そういうことだね．このことは先の話になるけど，§5.4「商の法則」のところで再度触れる予定だ．
- エミリー：そうなの，楽しみね．

3.1.2 縮約

- K氏：さて，テンソルの縮約について話を進めよう．2階テンソルの変換

$$T'_{ij} = a_{ik}a_{jl}T_{kl} \quad (3.1.27)$$

で， $i = j$ として i について和を作ると

$$T'_{ii} = a_{ik}a_{il}T_{kl} \quad (3.1.28)$$

となる．ところで a_{ij} は直交行列だから $a_{ik}a_{il} = \delta_{kl}$ となるね．だから

$$T'_{ii} = \delta_{kl}T_{kl} = T_{ii} \quad (T_{ii} = \sum_{i=1}^3 T_{ii} : \text{念のため}) \quad (3.1.29)$$

となって，これは座標変換に対して変化しない，つまりスカラーになる．トレースは座標変換で不変ということだね． T_{ii} を作ることを T_{ij} を縮約するというんだ．

$$\text{tr}(T) = T_{11} + T_{22} + T_{33} \quad (3.1.30)$$

- エミリー：ベクトルの場合， \mathbf{a} と \mathbf{b} の内積，つまり同じ成分同士の内積を加え合わせることでスカラーを作ったわね．

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \quad (3.1.31)$$

\mathbf{a} と \mathbf{b} のテンソル積はダイアドと呼ばれる2階テンソルだった．

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = \mathbf{ab} = (a_i b_j) = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{pmatrix}, \quad T_{ij} = a_i b_j \quad (3.1.32)$$

この2階テンソルを $i = j$ として縮約すると $a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$ となってスカラーを得る．つまり縮約というのは，ベクトルの内積でスカラーを作ったように，2階テンソルからスカラーを作るための操作ということかしら．

- K氏：そうだね，2階テンソルに関してはそういうことになるね．ただ，テンソルの場合，ベクトルと違って高階テンソルというものがあるだろう．例えば3階テンソルなら添え字が i, j, k と3個ある．このような場合，相等しいとおく添え字の組み合わせ，具体的には

$$\begin{cases} i = j & \longrightarrow & T_{iik} = T_{11k} + T_{22k} + T_{33k} & (T_{111}, T_{221}, T_{331} \text{の3成分}) \\ i = k & \longrightarrow & T_{iji} = T_{1j1} + T_{2j2} + T_{3j3} & (T_{111}, T_{222}, T_{323} \text{の3成分}) \\ j = k & \longrightarrow & T_{ijj} = T_{i11} + T_{i22} + T_{i33} & (T_{111}, T_{122}, T_{133} \text{の3成分}) \end{cases} \quad (3.1.33)$$

の3通りがあるわけで，それぞれの組み合わせによる縮約を考えるんだね．

- エミリー：そうするとどうなるのかしら？

縮約によりテンソルの階数は 2 階減る

- K氏：うん．そうするとテンソルの階数が 2 階減ってベクトルになるんだ．先ほど書いたように 3 階テンソルを縮約すると成分が 9 成分からベクトル成分の数と同じ 3 成分になっただろう．このことを座標変換の観点から調べてみよう．3 階テンソルの変換公式より

$$T'_{ijk} = a_{il}a_{jm}a_{kn}T_{lmn} \quad (3.1.34)$$

いま, $j = k$ として j について和をとる, つまり j, k で縮約すると, 直交行列 a_{ij} の性質を使って

$$T'_{ijj} = a_{il}a_{jm}a_{jn}T_{lmn} = a_{il}(a_{jm}a_{jn})T_{lmn} = a_{il}\delta_{mn}T_{lmn} = a_{il}T_{lmm} \quad (3.1.35)$$

となるね．ここで次の置き換えをしてやる．

$$v_i = T_{ijj} \quad (= T_{i11} + T_{i22} + T_{i33}) \quad (3.1.36)$$

そうすると (3.1.35) は

$$v'_i = T'_{ijj} = a_{il}v_l \quad (v_l = T_{lmm}) \quad (3.1.37)$$

となるね．これはとりもなおさずベクトルの変換則だ．ということで, 3 階テンソルを縮約するとベクトル (1 階のテンソル) になるということが分かる．同様にして, 添え字の組み合わせを変えた $u_i = T_{ijj}$, $v_j = T_{iji}$, $w_k = T_{ikk}$ はそれぞれベクトル u , v , w の成分となることが分かってもらえると思う．

$$u_i = T_{ijj} \begin{cases} u_1 = T_{1jj} = T_{111} + T_{122} + T_{133} \\ u_2 = T_{2jj} = T_{211} + T_{222} + T_{233} \\ u_3 = T_{3jj} = T_{311} + T_{322} + T_{333} \end{cases}, \quad v_j = T_{iji} \begin{cases} \text{(略)} \\ \text{(略)} \\ \text{(略)} \end{cases}, \quad w_k = T_{ikk} \begin{cases} \text{(略)} \\ \text{(略)} \\ \text{(略)} \end{cases}$$

ついでに 4 階テンソル T_{ijkl} の縮約を見てみよう．一つのケースとして $k = \ell$ とし, k について和をとると

$$T'_{ijkk} = a_{ip}a_{jq}a_{kr}a_{ks}T_{pqrs} = a_{ip}a_{jq}\delta_{rs}T_{pqrs} = a_{ip}a_{jq}T_{pqrr} \quad (3.1.38)$$

(3.1.38) の右辺は 2 階テンソル T_{ij} の変換則になっている．つまり,

$$T'_{ij} = a_{ip}a_{jq}T_{pq} \quad (3.1.39)$$

だね．だから 4 階テンソルを縮約すると 2 階テンソルになるというわけだ．

- エミリー：縮約によってテンソルの階数は 2 階分減る, これを一般化すれば p 階 ($p \geq 2$) テンソルを縮約すると $p - 2$ 階のテンソルが得られるということね．
- K氏：そうなんだ．ただし, 縮約の際, どの添え字について縮約したかは明示しないとイケない．
- エミリー：え〜っと, 縮約のお話を終わる前に具体的な事例をあげていただけるといいね．
- K氏：そうだね, 内容の詳しい説明は省いて, 縮約操作のイメージ的なものを掴んでもらうという意味で, 等方性弾性体の応力テンソルの事例を紹介しよう．応力テンソルは

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \quad (i, j, k, \ell = 1, 2, 3) \quad (3.1.40)$$

で与えられる．これは応力-歪方程式といわれるね． C_{ijkl} は弾性テンソルで物質に固有な 4 階テンソルで, ε_{ij} は歪テンソルと呼ばれる 2 階対称テンソル．弾性テンソルは

$$C_{ijkl} = \mu(\delta_{ik}\delta_{j\ell} + \delta_{i\ell}\delta_{jk}) + \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} \quad (3.1.41)$$

で与えられ、等方性弾性体の弾性テンソルは対称テンソルとなる。μ, λ はラメの弾性定数と呼ばれる定数。この式を先ほどの式に入れると

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})\varepsilon_{kl} + \lambda\delta_{ij}\delta_{kl}\varepsilon_{kl} \\ &= 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\delta_{ij}\delta_{kl}\varepsilon_{kl} \\ &= 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\delta_{ij}\varepsilon_{pp}\end{aligned}\tag{3.1.42}$$

が得られる。右辺の ε_{pp} は歪テンソルの対角和だね。さて、ここで縮約の登場だ。両辺を i と j で縮約すると

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = 2\mu(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + 3\lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})\tag{3.1.43}$$

アインシュタインの既約を使って書けば

$$\begin{aligned}\sigma_{pp} &= 2\mu\varepsilon_{pp} + 3\lambda\varepsilon_{pp} = (2\mu + 3\lambda)\varepsilon_{pp} \\ \therefore \varepsilon_{pp} &= \frac{1}{2\mu + 3\lambda}\sigma_{pp}\end{aligned}\tag{3.1.44}$$

これで歪テンソルと応力テンソルの対角成分和（トレース）の関係が得られた。次にこの式を (3.1.42) に入れると

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= 2\mu\varepsilon_{ij} + \frac{\lambda}{2\mu + 3\lambda}\sigma_{pp}\delta_{ij} \\ \therefore \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2\mu}\sigma_{ij} - \frac{\lambda}{2\mu(2\mu + 3\lambda)}\sigma_{pp}\delta_{ij}\end{aligned}\tag{3.1.45}$$

を得る。等方性弾性体の歪、応力テンソル成分の表式だ。ということで縮約することでうまく物理量をひっぱり出すことができたというか、そういうものが感じられたのではと思うけどいかがかな ... ?

- エミリー：そうね、例えば2つのベクトル a, b があって、ベクトルの交差角を知りたいときは内積 $a \cdot b$ をとるわね。テンソルの縮約もテンソル成分の汲みだし方をうまくやって必要な物理量を引き出してくるといったような感じね。
- K氏：うん、マッ、人によって感じ方はいろいろだと思うので、この話はここで切り上げて、以前登場したレビ・チビタ記号の次の関係式を証明しておこう。なぜここでやるのかという理由は縮約を使うからなんだ。この関係式はレビ・チビタ記号の積の縮約公式ともいわれる。証明方法はいろいろあるようだけど、ここでは簡易な方法でやる。公式 (3.1.46) はいろいろとよく使われるね。

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}\tag{3.1.46}$$

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijl} = 2\delta_{kl}\tag{3.1.47}$$

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = 6\tag{3.1.48}$$

- (1) j と k が等しい場合 (3.1.46) の左辺は0。一方右辺は0となることは明らかだね。従って等式は成立する。次に $j \neq k$ のときは、例えば $j = 2, k = 3$ とすると、(3.1.46) の左辺は

$$\varepsilon_{i23}\varepsilon_{ilm} = \varepsilon_{123}\varepsilon_{1lm} = \begin{cases} 1 & (\ell = 2, m = 3) \\ -1 & (\ell = 3, m = 2) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

となり、一方右辺も同じ値をとるので等式が成立する。 j, k を他の値にとっても同様となるので、(3.1.46) は成立する。

(2) (3.1.46) で j と l について縮約すると, これは $j = l$ として和を作ることだが

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijm} = \delta_{jj}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kj} = 3\delta_{km} - \delta_{km} = 2\delta_{km}$$

(3) さらに続けて k と m について縮約すると

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = 2\delta_{kk} = 2 \cdot 3 = 6$$

となり, これは公式 (3.1.48) だね.

さて, ε_{ijk} の記号を使うと 2 階テンソルで次のような関係式が成立することがわかる.

A) 2 階対称テンソルは次式を満たす.

$$\varepsilon_{ijk}T_{jk} = 0 \quad (3.1.49)$$

$\therefore u_i = \varepsilon_{ijk}T_{ji}$ とおくと,

$$u_1 = \varepsilon_{123}T_{23} + \varepsilon_{132}T_{32} = T_{23} - T_{32} = 0 \quad \longrightarrow T_{23} = T_{32}$$

$$u_2 = \varepsilon_{213}T_{13} + \varepsilon_{231}T_{31} = -T_{13} + T_{31} = 0 \quad \longrightarrow T_{13} = T_{31}$$

$$u_3 = \varepsilon_{312}T_{12} + \varepsilon_{321}T_{21} = T_{12} - T_{21} = 0 \quad \longrightarrow T_{12} = T_{21}$$

B) 2 階テンソル T_{ij} について次式が成立する.

$$\varepsilon_{ijk}T_{il}T_{jm}T_{kn} = \varepsilon_{lmn} \det(T), \quad \det(T) = |T_{ij}| \quad (3.1.50)$$

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn}T_{il}T_{jm}T_{kn} = 6 \det(T) \quad (3.1.51)$$

\therefore (3.1.50)

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ijk}T_{il}T_{jm}T_{kn} &= T_{1l}T_{2m}T_{3n} + T_{1m}T_{2n}T_{3l} + T_{1n}T_{2l}T_{3m} \\ &\quad - T_{1n}T_{2m}T_{3l} - T_{1m}T_{2l}T_{3n} - T_{1l}T_{2n}T_{3m} \\ &= \begin{vmatrix} T_{1l} & T_{1m} & T_{1n} \\ T_{2l} & T_{2m} & T_{2n} \\ T_{3l} & T_{3m} & T_{3n} \end{vmatrix} = \varepsilon_{lmn} \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{vmatrix} \\ &= \varepsilon_{lmn} \det(T) \end{aligned}$$

\therefore (3.1.51) (3.1.50) と (3.1.48) を使うと

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn}T_{il}T_{jm}T_{kn} = \varepsilon_{lmn}\varepsilon_{lmn} \det(T) = 6 \det(T) \quad (3.1.52)$$

- エミリー: (3.1.50) の証明でわざわざ $\varepsilon_{ijk}T_{il}T_{jm}T_{kn}$ を和に分解しているけど, ベクトル 3 重積のところまででくる

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} = \varepsilon_{ijk}A_iB_jC_k \quad (3.1.53)$$

という公式を使えば一発じゃないの.

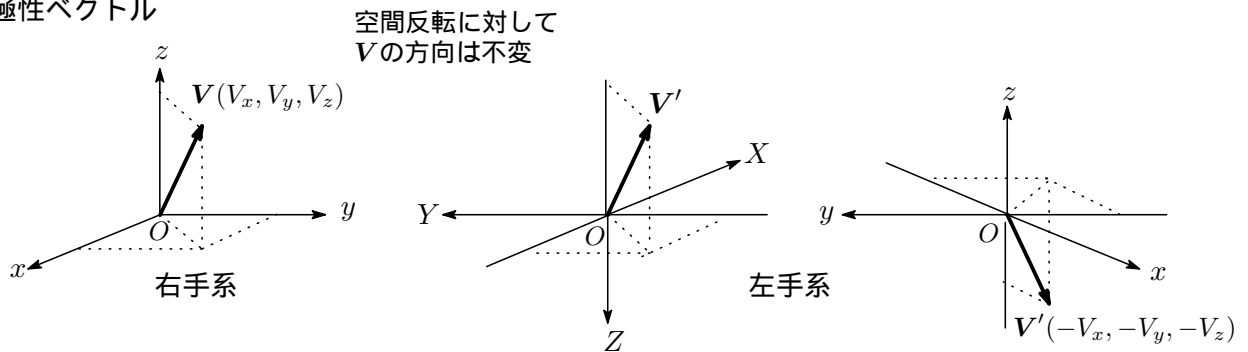
- K 氏: うん, そうなんだけど, ここはできるだけ泥臭く迫ってみようと思ったんだ.

3.1.3 軸性テンソル (擬テンソル)

極性ベクトルと軸性ベクトル

- K氏：軸性テンソルの話に入る前にベクトルの復習としてしておこう。ご存知のようにベクトルには極性ベクトルと軸性ベクトルの2種類がある¹。粒子の位置ベクトルや速度，加速度，力などの普通のベクトルは極性ベクトルと呼ばれ，これらのベクトルは初めから方向を持っているね。いま， x, y, z 軸をすべて反対向きにする空間反転を考えよう。粒子の位置座標や速度，加速度，力など極性ベクトルの成分を (V_x, V_y, V_z) とおくと，もともとのベクトルの方向は変わらないので空間反転で各成分の符号は反転し $(-V_x, -V_y, -V_z)$ と変換される。座標系というのはあくまで観測者の視点の設定ということだね。

極性ベクトル



一方，空間反転により方向を変えるベクトルがある。これを軸性ベクトルと呼んでいるん。具体的な例としては次のようなものがある。

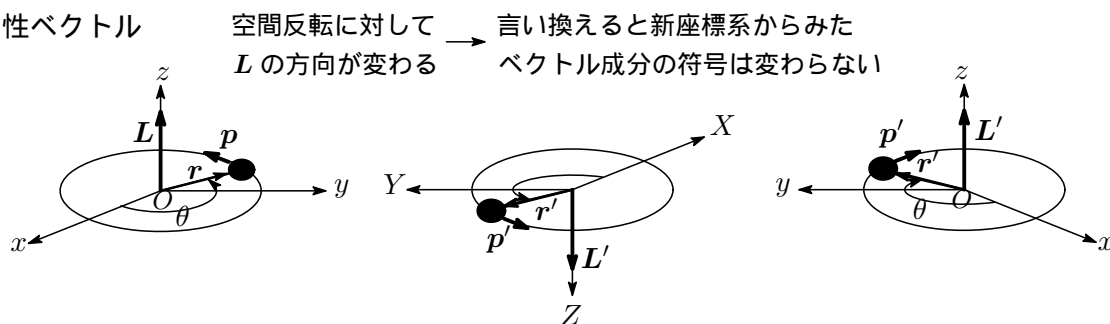
$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{角速度ベクトル } (\omega) & : \mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r} \\ \text{角運動量ベクトル } (L) & : \mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \\ \text{磁場ベクトル} & : \mathbf{B} = -\nabla \times \mathbf{E} \\ & \vdots \end{array} \right. \quad (3.1.54)$$

角運動量ベクトルを取り上げよう。繰り返しになるが

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \quad (3.1.55)$$

で定義される。いうまでもないことだが \mathbf{r} は位置ベクトルで \mathbf{p} は運動量ベクトルだ。

軸性ベクトル



¹1896年，フォークト (Woldemar Voigt, 1850.9.2-1919.12.13：ドイツの物理学者) によりこれら2種類のベクトルに区別された。

r や p は極性ベクトルだから、空間反転によって $r(r_i, r_j, r_k) \rightarrow r'(-r_i, -r_j, -r_k)$, $p \rightarrow p'(-p_i, -p_j, -p_k)$ と変換される。空間反転後の角運動量ベクトルを L' とするとその i 成分は

$$L'_i = \varepsilon_{ijk}(-r_j)(-p_k) = \varepsilon_{ijk}r_j p_k = L_i \quad (3.1.56)$$

となって、成分の符号は変わらない。言い換えると、空間反転で L は方向を変えているということだ。軸性ベクトルは擬ベクトルとも呼ばれる。軸性ベクトルの方向は回転軸の方向になっているんだね。 A を直交変換行列とすると、一般に軸性ベクトルは

$$v'_i = |A| a_{ij} v_j \quad \begin{cases} \text{平行, 回転} & : |A| = 1 \\ \text{空間反転} & : |A| = -1 \end{cases} \quad (3.1.57)$$

という変換を受ける²。

- エミリー：軸性ベクトルというネーミングはベクトルの方向が回転軸の方向になっているということでナルホドと思うけど、どうして擬ベクトルという名前もあるのかしら。
- K氏：そうだね。極性ベクトルも軸性ベクトルも平行移動や回転などの座標変換に対しては同様に振舞うので、コレだけからはどちらのベクトルか区別できない。しかし空間反転をしてやると極性ベクトルの成分は符号が反転するけど、軸性ベクトルはそこでボロをだすというか成分の符号は変わらない。つまりベクトルのフリをしているけど、本来のベクトルではない。”擬”というのは『本物らしく似せる』という意味があるから、このベクトルの接頭語に”擬”が付いたんだらうね。
- エミリー：英語で *pseudo vector* というのね。ナルホド...

軸性テンソル (擬テンソル)

- K氏：ベクトルはテンソルの一種だからテンソルにも軸性テンソルというのが考えられる。ベクトルの場合と同様、空間反転でテンソル成分の符号が変わらないテンソルのことで、擬テンソルとも呼ばれる。具体的な例としては、いままで何度もでてきたレビ・チビタの記号 ε_{ijk} がそれにあたる。これは第2話の § 4.3 交代積のところでも3階完全反対称テンソルとしての具体的な成分表示をしたね。

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & i, j, k: \text{偶置換} \\ -1 & i, j, k: \text{奇置換} \\ 0 & i, j, k \text{ のうちに等しいものがある} \end{cases} \quad (3.1.58)$$

忘れていればもう一度見直して欲しい。さて、直交変換行列の行列式 $|A|$ はレビ・チビタの記号を使えば

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{1\ell} a_{2m} a_{3n} \varepsilon_{\ell mn} \quad (3.1.59)$$

と書ける。これはいいだろう。

- エミリー：そうね、手間を惜みず右辺の項のすべて書くと、 $\varepsilon_{\ell mn}$ の符号に注意して

$$\begin{aligned} a_{1\ell} a_{2m} a_{3n} \varepsilon_{\ell mn} &= a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} \\ &\quad - a_{13} a_{22} a_{31} - a_{12} a_{21} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32} \end{aligned}$$

²行列式の値 $|A|$ はスカラーだが、空間反転で符号が変わるスカラーを擬スカラーと呼んでいる。

これは $|A|$ の値ね .

- K氏 : うん . さて , 行を奇数回置換すると -1 が掛かり , 偶数回の置換では符号は変化しないという行列式の性質を思いだしながら (3.1.59) を眺めて欲しい . 例えば 1 行目と 2 行目を入れ替えると

$$a_{2\ell}a_{1m}a_{3n}\varepsilon_{\ell mn} = |A|\varepsilon_{213} = -|A| \quad (3.1.60)$$

となるだろう . これを一般化して書くと

$$|A|\varepsilon_{ijk} = a_{i\ell}a_{jm}a_{kn}\varepsilon_{\ell mn} \quad (3.1.61)$$

と書ける . これは 3 階テンソル ε_{ijk} の座標変換公式だ . ただ頭に $|A|$ がかかっている点に注目 . これは次のように書いたほうがベクトルのケースと対比しやすいね .

$$\varepsilon_{ijk} = |A| a_{i\ell}a_{jm}a_{kn}\varepsilon_{\ell mn} \begin{cases} \text{平行, 回転} & : |A| = 1 \\ \text{空間反転} & : |A| = -1 \end{cases} \quad (3.1.62)$$

- エミリー : え ~ っと , 軸性ベクトルや軸性テンソルの変換公式を整理すると ...

$$\begin{cases} \text{軸性ベクトル} & v'_i = |A| a_{ij}v_j \\ \text{軸性テンソル} & T'_{ij} = |A| a_{ik}a_{jl}T_{kl}, \quad T'_{ijk} = |A| a_{i\ell}a_{jm}a_{kn}T_{\ell mn}, \end{cases} \quad (3.1.63)$$

極性ベクトルや普通のテンソルでは $|A|$ の係数は付かなかったのね .

2 階反対称テンソルと軸性ベクトル

- K氏 : さて , 任意の 2 階反対称テンソル A_{ij} に対して

$$v_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}A_{jk} \quad (3.1.64)$$

という量を考えよう . $A_{ij} = -A_{ji}$ であることに注意して成分表記すると

$$\begin{cases} v_1 = \frac{1}{2}\varepsilon_{1jk}A_{jk} = \frac{1}{2}(A_{23} - A_{32}) = A_{23} \\ v_2 = \frac{1}{2}\varepsilon_{2jk}A_{jk} = \frac{1}{2}(A_{31} - A_{13}) = A_{31} \\ v_3 = \frac{1}{2}\varepsilon_{3jk}A_{jk} = \frac{1}{2}(A_{12} - A_{21}) = A_{12} \end{cases} \quad (3.1.65)$$

v_i をベクトル v の成分とすれば , v の成分は 2 階反対称テンソルの 3 個の独立成分 A_{12}, A_{23}, A_{31} に対応していることになる . ベクトル v は (3.1.62), (3.1.64) から軸性ベクトルだね . このベクトル v を反対称テンソル A_{ij} に対応するとか付随する軸性ベクトルとっている . また , 逆に

$$A_{ij} = \varepsilon_{ijk}v_k \quad (3.1.66)$$

が成り立つことを見ておこう . これは公式 (3.1.46) を使えばすぐ分かる .

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ijk}v_k &= \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}A_{lm} = \frac{1}{2}(\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})A_{lm} \\ &= \frac{1}{2}(A_{ij} - A_{ji}) = \frac{1}{2}(A_{ij} + A_{ij}) = A_{ij} \end{aligned} \quad (3.1.67)$$

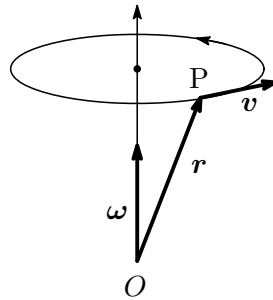
2 階反対称テンソル A_{ij} を軸性ベクトル v に対応するテンソルとっている .

- エミリー：いまお話されたベクトルとそれに対応するテンソルの具体的な例をあげていただけませんか。
- K氏：そうだね，具体例がないとサッパリ面白くないよね．そこで軸性ベクトルの代表的なものとして角速度ベクトルを取りあげてみよう．角速度ベクトルを ω とすると

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (3.1.68)$$

\mathbf{v} は P 点における速度ベクトルだ．(3.1.68) を成分表記すれば

$$v_i = \varepsilon_{ijk} \omega_j x_k \quad \begin{cases} v_1 = \omega_2 x_3 - \omega_3 x_2 \\ v_2 = \omega_3 x_1 - \omega_1 x_3 \\ v_3 = \omega_1 x_2 - \omega_2 x_1 \end{cases} \quad (3.1.69)$$



角速度ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ に対応する 2 階反対称テンソルを Ω_{ij} とすると (3.1.66) より

$$(\Omega_{ij}) = \varepsilon_{ijk} \omega_k = \begin{pmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.1.70)$$

を得る．この 2 階反対称テンソル を角速度テンソルという．角速度ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ の成分と角速度テンソル Ω の成分の関係は

$$\omega_1 = \Omega_{23}, \quad \omega_2 = \Omega_{31}, \quad \omega_3 = \Omega_{12} \quad (3.1.71)$$

だね．角速度テンソルを使えば (3.1.69) は

$$v_i = -\Omega_{ij} x_j \longrightarrow \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad (3.1.72)$$

$$\therefore \mathbf{v} = - \boldsymbol{\Omega} \mathbf{r}$$

と線形変換の形で表せる．

次に角運動量ベクトルについて考えてみよう．角運動量を \mathbf{L} とするとベクトル解析の公式 $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$ を使って

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= m\mathbf{r} \times \mathbf{v} = m\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \\ &= m\{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})\boldsymbol{\omega} - (\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega})\mathbf{r}\} \longrightarrow \begin{cases} L_x = m\{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})\omega_x - (\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega})r_x\} \\ L_y = m\{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})\omega_y - (\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega})r_y\} \\ L_z = m\{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})\omega_z - (\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega})r_z\} \end{cases} \quad (3.1.73) \end{aligned}$$

と展開できる．ここで添え字 x, y, z を $1, 2, 3$ に , r_x, r_y, r_z をそれぞれ x_1, x_2, x_3 に書き換えると

$$L_i = m\{(x_k x_k)\omega_i - (x_j \omega_j)x_i\} \quad (3.1.74)$$

となる．各項は同じ添え字があるので，例のアインシュタインの規則だね，具体的に書けば

$$L_i = m\{(x_k x_k)\omega_i - (x_j \omega_j)x_i\} = m\{(x_1 x_1 + x_2 x_2 + x_3 x_3)\omega_i - (x_1 \omega_1 + x_2 \omega_2 + x_3 \omega_3)x_i\}$$

ということだ．(3.1.74) をもう少し変形してやると

$$L_i = m\{(x_k x_k)\delta_{ij} - x_i x_j\}\omega_j \quad (3.1.75)$$

と表すことができる．クロネッカーの δ_{ij} をうまく使っている．そこで

$$J_{ij} = m\{(x_k x_k)\delta_{ij} - x_i x_j\} \quad (3.1.76)$$

と置くと， δ_{ij} は 2 階単位テンソル I の成分， $x_i x_j$ の項はベクトルのテンソル積 $\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}$ で $J_{ij} = J_{ji}$ だから， J_{ij} は 2 階対称テンソルの成分ということになるね．(3.1.74) は

$$L_i = J_{ij}\omega_j \quad (3.1.77)$$

と書ける．2 階対称テンソルを J とすれば (3.1.76) は

$$J = m(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})I - \mathbf{r} \otimes \mathbf{r} \quad (3.1.78)$$

と表すことができるので，

$$\mathbf{L} = J\boldsymbol{\omega} \quad (3.1.79)$$

という線形変換の形に書くことができる． J を慣性テンソルと呼んでいる．

- エミリー：角速度ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ は慣性テンソル J によっては角運動量ベクトル \mathbf{L} に変換されるといわけね．慣性テンソルの成分を具体的に書き出すと

$$J_{11} = m(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1 x_1) = m(x_2^2 + x_3^2), \quad J_{22} = m(x_3^2 + x_1^2), \quad J_{33} = m(x_1^2 + x_2^2) \\ J_{12} = J_{21} = -m x_1 x_2, \quad J_{23} = J_{32} = -m x_2 x_3, \quad J_{13} = J_{31} = -m x_1 x_3$$

となって，力学のテキストでお目にかかる成分がでてくるわね．

- K 氏：そうだね．慣性テンソルの対角要素 J_{11}, J_{22}, J_{33} を慣性モーメント，非対角要素 J_{12}, J_{23}, J_{31} を慣性乗積と呼んでいる．慣性テンソルの物理的内容については適当な力学のテキストを参照して頂戴．角運動量ベクトル \mathbf{L} は軸性ベクトルなので，これに対応する 2 階反対称テンソルが存在するね．このテンソルを角運動量テンソルと呼んでいる．角運動量テンソルを $H = (H_{jk})$ とすると (3.1.66) より

$$H_{jk} = \varepsilon_{jki} L_i = \varepsilon_{ijk} L_i \quad (3.1.80)$$

と表せる．また，(2.3.15) を使えば角運動量ベクトルの i 成分は

$$L_i = m \varepsilon_{ilm} x_\ell v_m$$

と書けるので，これを (3.1.80) に入れ，公式 (3.1.46) を使えばテンソル H の成分は

$$H_{jk} = m \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ilm} x_\ell v_m = m(\delta_{j\ell} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{k\ell}) x_\ell v_m = m(x_j v_k - x_k v_j) \quad (3.1.81)$$

と求まる．したがって求める角運動量テンソルはテンソル積を使って表せば

$$H = m(\mathbf{r} \otimes \mathbf{v} - \mathbf{v} \otimes \mathbf{r}) \quad (3.1.82)$$

となる．また，(3.1.81) に (3.1.72) の $v_i = -\Omega_{ij}x_j$ を入れると $H_{jk} = m(\Omega_{j\ell}x_\ell x_k - \Omega_{k\ell}x_\ell x_j)$ となるので，

$$H = m(\Omega \mathbf{r} \otimes \mathbf{r} - \mathbf{r} \otimes \Omega) \quad (3.1.83)$$

と表すこともできる．

- エミリー：ナルホドねえ～．角速度には角速度テンソルが，角運動量には角運動量テンソルが ... 軸性ベクトルには 2 階反対称テンソルが付随しているということね．

3.1.4 商法則

- K 氏：§5.1 テンソルの座標変換のところで勉強したけど， u_i, v_i がそれぞれベクトルの成分であったとき， $u_i v_j$ ($i, j = 1, 2, 3$) は 2 階テンソル ($T_{ij} = u_i v_j$) となったね．さて，ある未知の量があり，それと任意のテンソルの積がテンソルであるとき，その未知の量はテンソルである，というのが商法則と呼ばれるものだ．もっとも積が 0 の場合には商法則は必ずしも適用されないけど．
- エミリー：え～っと，先ほどの $T_{ij} = u_i v_j$ でいえば， T_{ij} が 2 階テンソルとして既知で， u_i を未知の量， v_i を 1 階のテンソル (ベクトル) とすると u_i は 1 階のテンソルになるということなの．
- K 氏：そうだね．割り算の“商”のようなイメージだろう．商法則という名の由来はその辺からきていると思うんだけど，それは兎も角として次の等式を考えよう．

$$B_{jk} = X_{ijk} A_i \quad (3.1.84)$$

ここで X は未知の量とし，これとテンソル A_i の積をとった B_{jk} が 2 階テンソルとなったしよう．いまの場合， A_i はベクトル，つまり 1 階のテンソルだけど， A は任意のテンソルでいい．ハテ，未知の量は何か？それを判定するには Σ, Σ' 座標変換性を調べればよい．(3.1.84) を考えよう． X_{ijk} は未知の量で A_i はベクトル， B_{jk} は 2 階テンソルだ．プライムの付いた座標系において

$$B'_{jk} = X'_{ijk} A'_i \quad (3.1.85)$$

が成立する． B_{jk} は 2 階テンソルなので，変換公式を使えば

$$\begin{aligned} B'_{jk} &= X'_{ijk} A'_i = a_{jp} a_{kq} B_{pq} = a_{jp} a_{kq} X_{rpq} A_r \\ \therefore X'_{ijk} A'_i &= a_{jp} a_{kq} X_{rpq} A_r \end{aligned} \quad (3.1.86)$$

またベクトル A_i は

$$A_r = a_{ir} A'_i$$

と変換されるので，これを上の式に入れて整理すると

$$(X'_{ijk} - a_{ir} a_{jp} a_{kq} X_{rpq}) A'_i = 0$$

A'_i は任意なので

$$X'_{ijk} = a_{ir} a_{jp} a_{kq} X_{rpq} \quad (3.1.87)$$

これは 3 階テンソルの変換則に他ならない．つまり未知の量は 3 階テンソルであることが分かる．

- エミリー：ナルホド．そういえば，§5.1の最後のところで，右辺の添え字で同じものを消すして残った添え字は左辺の添え字になり，左辺はその数の階数テンソルになるといった話があったけど，それは商の法則で保障されるというわけね．ところで先ほど，積が0の場合は商法則が適用されないといわれたけど，もし B_{jk} が0ならその変換性は不定なので，結局うまく判定できなくなるというわけね．
- K氏：そうだね．さて，最後に等方テンソルの話をして第3話を終わることにしよう．

3.2 等方テンソル

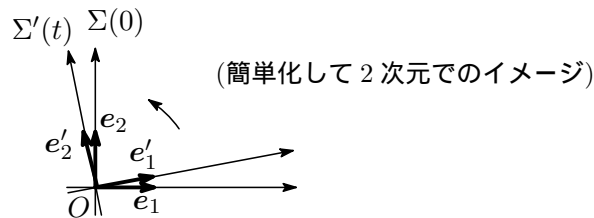
3.2.1 2階等方テンソル

- K氏：テンソル成分は直交座標変換で変わるだろう．例えば2階テンソル T_{ij} を考えてみよう． Σ 系から Σ' 系へ変換すると， Σ' 系でのテンソルの成分 T'_{ij} は次式で与えられるように Σ 系でのテンソル成分 T_{ij} とは異なる値となるだろう．

$$T'_{ij} = a_{ik} a_{jl} T_{kl} \quad (3.2.1)$$

等方テンソルというのは座標変換に対して成分の値が変わらないテンソルのことをいうんだね．例えばある物理量がテンソル量として表される場合を考えてみよう．物体が等方的な性質を持ったものであれば，物理量は方向によって変わらないので，そのテンソルの成分は座標軸の選び方によらず一定の値を持つはずだね，

- エミリー：確かにね．スカラー量は座標変換しても変わらない量なのでこれは0階の等方テンソル．ベクトルの場合，平面座標に矢印を書いてみればすぐ分かるけど回転座標系から見ればベクトル成分は変化する．だから大きさを持ったベクトルは等方的でない．ただ，ゼロベクトルは等方的ね．ということで1階の等方テンソルはゼロベクトルだけになる，ということね．
- K氏：そうだね．それでは等方テンソルの満たすべき方程式を求めていくことにしよう．



テンソル成分が座標変換で不変ということは，言い換えると座標回転で成分の値が変わらないということ．一般に有限の回転は無限小回転の積み重ねで表されるので，無限小回転での性質を調べれば十分というまい理屈があるので，それを活用しよう．いま，1つのパラメータ t に従って変化する直交基底を $\Sigma'(t)$ としよう． $t=0$ のとき $\Sigma = \Sigma'(0)$ とする． t の増加とともに Σ' 系は原点を中心に回転していく．直交行列を $A(t) = (a_{ij}(t))$ とすると直交行列の性質から

$$a_{ij}(t) a_{ik}(t) = \delta_{jk} \quad (3.2.2)$$

また， $t=0$ では $\Sigma = \Sigma'(0)$ なので

$$a_{ij}(0) = \delta_{ij} \quad (3.2.3)$$

(3.2.2) を t で微分して $t = 0$ とおくと

$$\dot{a}_{ij}(0)a_{ik}(0) + a_{ij}(0)\dot{a}_{ik}(0) = \dot{a}_{ij}(0)\delta_{ik} + \delta_{ij}\dot{a}_{ik}(0) = \dot{a}_{kj}(0) + \dot{a}_{jk}(0) = \mathbf{0} \quad (3.2.4)$$

となるね . $\mathbf{0}$ はゼロ行列だ . ここで

$$\left(\frac{da_{ij}}{dt}\right)_{t=0} = \dot{a}_{ij}(0) = \omega_{ij} \quad (3.2.5)$$

とおくと , (3.2.4) より

$$\omega_{kj} + \omega_{jk} = \mathbf{0}, \quad \therefore \omega_{kj} = -\omega_{jk} \quad (3.2.6)$$

が得られる . (3.2.5) を無限小回転という . これは $t = 0$ からほんの僅か (無限小) の t 経過したときの回転ということだね . (3.2.6) より無限小回転 ω_{ij} は交代行列であることが分かる . 交代行列の対角成分は 0 だね .

さて , T_{ij} を 2 階等方テンソルとすると , その成分は t に独立で $T'_{ij} = T_{ij} = \text{定数}$ なので , (3.2.1) を t で微分して $t = 0$ とおくと

$$\dot{a}_{ik}(0)a_{j\ell}(0)T_{k\ell} + a_{ik}(0)\dot{a}_{j\ell}(0)T_{k\ell} = \omega_{ik}\delta_{j\ell}T_{k\ell} + \delta_{ik}\omega_{j\ell}T_{k\ell} = 0$$

これから

$$\omega_{ik}T_{kj} + \omega_{j\ell}T_{i\ell} = 0 \quad (3.2.7)$$

が得られる . これが 2 階等方テンソルの満たす代数方程式だ . 具体的にテンソル成分を求めていこう . (3.2.7) で $i = 1, j = 2$ とおき , 交代行列の対角成分は 0 であるので

$$(\omega_{12}T_{22} + \omega_{13}T_{32}) + (\omega_{21}T_{11} + \omega_{23}T_{13}) = 0$$

が得られる . また , $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$ なので , 上式を整理すると

$$\omega_{12}(T_{22} - T_{11}) - \omega_{31}T_{32} + \omega_{23}T_{13} = 0$$

交代行列の 3 個の独立成分 $\omega_{12}, \omega_{31}, \omega_{23}$ は任意に選べるので , 上式が恒等式として成り立つためには

$$T_{11} = T_{22}, \quad T_{32} = 0, \quad T_{13} = 0$$

でなければならない . 次に $i = 2, j = 3$ とおいて同様の計算をすると

$$T_{11} = T_{22} = T_{33}, \quad T_{ij} = 0 \quad (i \neq j)$$

が得られる . テンソルのスタイルを見ると対角成分は同じ値で非対角成分はすべて 0 という形だね . 従って $T_{11} = \alpha$ (α : スカラー) とおくと , 求める 2 階等方テンソルは

$$T_{ij} = \alpha\delta_{ij} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \quad \left(\alpha = \frac{1}{3}T_{ii}\right) \quad (3.2.8)$$

という式であらわされる .

- エミリー : なるほど , 2 階等方テンソルは $T_{ij} = \alpha\delta_{ij}$ という形のものに限られるというわけね .

3.2.2 高階等方テンソル

- K氏：詳しい議論は省略するけど3階等方テンソルは次の代数方程式を満たすんだ。

$$\omega_{ik}T_{kjl} + \omega_{jm}T_{iml} + \omega_{ln}T_{ijn} = 0 \quad (3.2.9)$$

この方程式を満足させる3階等方テンソルは

$$T_{ijk} = \alpha \varepsilon_{ijk} \quad (3.2.10)$$

で表される。この計算は2階の場合と同じようにできるのでチェックしておいて頂戴。なお ε_{ijk} は擬テンソルだったので α はただのスカラーでなく、空間反転で符号を変える擬スカラーになる。

次に、4階等方テンソルの満たすべき代数方程式は

$$\omega_{im}T_{mjkl} + \omega_{jm}T_{imkl} + \omega_{km}T_{ijml} + \omega_{lm}T_{ikjm} = 0 \quad (3.2.11)$$

で、4階等方テンソルは

$$T_{ijkl} = \alpha \delta_{ij} \delta_{kl} + \beta \delta_{ik} \delta_{jl} + \gamma \delta_{il} \delta_{jk} \quad (\alpha, \beta, \gamma : \text{スカラー}) \quad (3.2.12)$$

で表される。これが対称性

$$T_{ijkl} = T_{jikl}, \quad T_{ijkl} = T_{klij}$$

を持ってれば

$$T_{ijkl} = \alpha(\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) + \beta \delta_{ij} \delta_{kl} \quad (\alpha, \beta : \text{スカラー}) \quad (3.2.13)$$

という形で表される。等方性弾性体の弾性テンソル(3.1.41)も同じ式で表されたね。また、反対称性

$$T_{ijkl} = -T_{jikl}, \quad T_{ijkl} = -T_{ijlk} \quad (3.2.14)$$

を持てば

$$T_{ijkl} = \gamma(\delta_{il} \delta_{jk} - \delta_{ik} \delta_{jl}) \quad (3.2.15)$$

という形で表される。

等方テンソルの形は限定されている

- エミリー：等方テンソルを整理しておくと、等方テンソルは次の形に限られるということね。

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 \text{階等方テンソル} : T_{ij} = \alpha \delta_{ij} \quad (\alpha : \text{スカラー}) \\ 3 \text{階等方テンソル} : T_{ijk} = \alpha \varepsilon_{ijk} \quad (\alpha : \text{擬スカラー}) \\ 4 \text{階等方テンソル} : T_{ijkl} = \alpha \delta_{ij} \delta_{kl} + \beta \delta_{ik} \delta_{jl} + \gamma \delta_{il} \delta_{jk} \quad (\alpha, \beta, \gamma : \text{スカラー}) \end{array} \right. \quad (3.2.16)$$

- K氏：そうだね。なお、一般的に次のことが成り立つことが知られているんだ。

『偶数階の等方テンソルは $\alpha \delta_{ij} \delta_{kl} \cdots \delta_{st}$ の項の和として表され、奇数階の等方テンソルは $\alpha \varepsilon_{ijk} \delta_{lm} \delta_{no} \cdots \delta_{st}$ の形の項の和として表される。ただし、添え字としては (i, j, \cdots, s, t) を任意に並び替えたものをとればよい』

さて、以上で第3話を終了しよう。第4話は2階テンソルの対角化ということを中心に話を進めていく予定だ。それではまた～。

第4話 テンソル2次曲面とテンソル場

4.1 テンソル2次曲面

4.1.1 主軸問題の復習

- K氏：2次曲面というのは直交座標 x, y, z に関する2次方程式で表される曲面のことで、楕円面とか双曲面といったものがあることはご承知のとおりだ。いまは曲面論に関心がないので、素通りするとして、2次式の主軸問題に焦点を当てた話をしていこう。詳しいことは適当な線形代数のテキストを参照していただくとして、ザット復習をしておこう。 x, y, z の同次2次式

$$F(x, y, z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{13}zx = 0 \quad (4.1.1)$$

で表される2次式を考えると、

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad A_{ij} = A_{ji} \quad (\text{対称行列}) \quad (4.1.2)$$

として、次のように表すことができる。

$$F(x, y, z) = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = {}^t \mathbf{x} A \mathbf{x} \quad (4.1.3)$$

さて、(4.1.1) が適当な直交変換 P で

$$a_1 x'^2 + a_2 y'^2 + a_3 z'^2 = 0 \longrightarrow \begin{pmatrix} x' & y' & z' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = {}^t \mathbf{x}' A \mathbf{x}' \quad (4.1.4)$$

と表すことができるか、つまり標準形の形¹にあらわすことができるか？これは2次形式の主軸問題といわれるね。結論から先に言うと可能だ。 P を直交行列として $\mathbf{x} = P \mathbf{x}'$ という直交変換を(4.1.3)にほどこすと

$${}^t \mathbf{x}' A \mathbf{x}' = {}^t (P \mathbf{x}') A (P \mathbf{x}') = ({}^t \mathbf{x}' {}^t P) A (P \mathbf{x}') = {}^t \mathbf{x} (P^{-1} A P) \mathbf{x}', \quad \text{ただし } {}^t P = P^{-1} \quad (4.1.5)$$

となる。そこで問題は

$$P^{-1} A P = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix} \quad (4.1.6)$$

¹変数の2乗の項だけで表される形。

を満足する適当な直交行列 P が存在するかということになる。これは結論から言うと、 A が対称行列であれば常にそのような直交行列は存在し、行列 A の固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ とすると

$$P^1 A P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \quad (4.1.7)$$

となるというものだった。固有値 λ_i は I を単位行列として、次の行列式を解くことで求められる。

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda & a_{33} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (4.1.8)$$

この方程式を固有方程式という。1つの固有値 λ_i が求めれば λ_i を固有値にもつ固有ベクトル x の成分 (x_1, x_2, x_3) は次の連立方程式を解いて求まる。

$$(A - \lambda I)x = 0 \longrightarrow \begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 \\ a_{11}x_1 + (a_{12} - \lambda)x_2 + a_{13}x_3 = 0 \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + (a_{13} - \lambda)x_3 = 0 \end{cases} \quad (4.1.9)$$

ということで、 $F(x, y, z)$ は適当な直交変換 P により

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 = 0 \quad (4.1.10)$$

と標準形の形になる。新しい座標系の x', y', z' を主軸と呼んでおり、もとの (x, y, z) 座標系からこの (x', y', z') 座標系へ変換することを主軸変換といっている。新しい座標系の直交基底ベクトルを e'_i とすると、これらは固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ に対応する単位固有ベクトルとなる。

$$Ae'_1 = \lambda_1 e'_1, \quad Ae'_2 = \lambda_2 e'_2, \quad Ae'_3 = \lambda_3 e'_3 \quad (4.1.11)$$

以上で主軸問題の復習を終わる。

- エミリー：終わるのはいいのだけど、少し忘れていることもあるので具体的な問題を解いてしっかり思い出すことにしたいわ。2次式 ${}^t x A x$ は適当な直交変換により $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 = 0$ の形に変換することができ、この新しい x, y, z 軸を主軸という。 λ_i は対称行列 A の固有値。主軸の基底ベクトルは固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ に対応する単位固有ベクトルということで、簡単のため2次元平面をとって $\Phi(x, y) = 2x^2 - 2xy + 2y^2 = 3$ という2次曲線の主軸問題を考えるわね。まず

$$F(x, y) = 2x^2 - 2xy + 2y^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (4.1.12)$$

とにおいて、右辺真ん中の行列の対角化をしていく。固有方程式より固有値は

$$\begin{vmatrix} 2 - \lambda & -1 \\ -1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)^2 - 1 = 0 \quad \therefore \lambda = 1, 3 \quad (4.1.13)$$

と得られる。次に $\lambda = 1$ の固有ベクトル x は

$$\begin{cases} (2 - 1)x_1 - x_2 = 0 \\ 2x_1 + (-1 - 1)x_2 = 0 \end{cases} \longrightarrow x_1 = x_2 = u_1 \quad (u_1 \text{ は定数}) \quad (4.1.14)$$

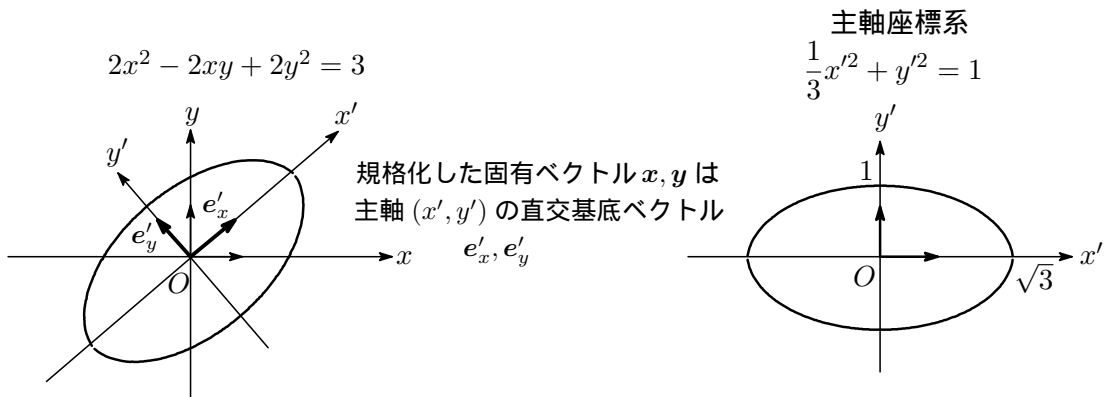
固有ベクトル x の大きさを 1 に規格化すると $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \sqrt{2u_1^2} = 1 \rightarrow u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ となる．
 同じようにして $\lambda = 3$ の場合の固有ベクトル y を求めると

$$-y_1 = y_2 = u_2 \quad (4.1.15)$$

固有ベクトル y の大きさを 1 に規格化すると $u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$. 以上の結果を整理すると

$$\left\{ \begin{array}{ll} 2x^2 - 2xy + 2y^2 = 3 & \text{標準形} \quad \rightarrow \quad x'^2 + 3y'^2 = 3 \\ \text{固有値 : 1} & \text{固有ベクトル} \quad \rightarrow \quad x = e'_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \text{固有値 : 3} & \text{固有ベクトル} \quad \rightarrow \quad y = e'_y = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad (4.1.16)$$

となるという次第で、大きさを 1 に規格化した固有ベクトルは新しい座標系（主軸）の単位直交基底ベクトルになっているのね．



- K氏： そうだね．ここでついでのおまけとしていろいろ役に立つケイリー・ハミルトンの恒等式をあげておこう．一般の 3 次正方行列 $A = (a_{ij})$ については次の恒等式が成立する．

$$\begin{aligned} A^3 - (a_{11} + a_{22} + a_{33})A^2 + (a_{11}a_{22} + a_{22}a_{33} + a_{33}a_{11} - a_{12}a_{21} - a_{13}a_{31} - a_{23}a_{32})A - \det(A)I \\ = A^3 - \text{tr}(A)A^2 + \Phi(A)A - \det(A)I = 0 \end{aligned} \quad (4.1.17)$$

4.1.2 テンソル不変量

- K氏： 2 階テンソルに限って話を進めよう．§ 5.2 「縮約」のところで 2 階テンソル T のトレース (T_{ii}) はスカラー量で座標変換で不変ということを知った．不変量はこれ以外に 2 階テンソルの行列式 $\det(T)$ とか 2 階テンソル成分の 2 乗の和 $\sum_{i,j} (T_{ij})^2$ も不変量になる．一般に任意の 2 階テンソル成分を T_{ij} とすると、 T_{ij} の整式 $F(T_{ij})$ が座標変換で不変であるとき、 $F(T_{ij})$ をテンソル不変量といっている．
- エミリー： 整式 $F(T_{ij})$ というのは T_{ij} についての単項式や多項式というものね．ところで $\det(T)$ とか $\sum_{i,j} (T_{ij})^2$ が不変量になるというのはスカラーになるか、あるいは座標変換で変わらないということだと思うんだけど、詳しく説明いただけるかしら．

- K氏：了解，それがこのセクションのテーマだ．まず $\det(T)$ が不変量となることを証明しよう．テンソルの座標変換前・後 (Σ 系 \leftrightarrow Σ' 系) のテンソル成分の行列式が $\det(T') = \det(T)$ となることを示せばよいわけだね．そこで $T'_{ij} = a_{ik}a_{j\ell}T_{k\ell}$ という変換式を行列形式で表すことを考える．

$$\Sigma \text{系} : \mathbf{y} = T\mathbf{x} \rightarrow \text{変換行列 } A \rightarrow \Sigma' \text{系} : \mathbf{y}' = T'\mathbf{x}' \quad (4.1.18)$$

上の座標変換で

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y}, \quad \mathbf{x}' = A\mathbf{x} \quad (4.1.19)$$

なので (4.1.18) の第 2 式は

$$A\mathbf{y}' = T'A\mathbf{x}, \quad \therefore \mathbf{y}' = A^{-1}T'A\mathbf{x} \quad (\because A^{-1}A = \mathbf{I})$$

となる．(4.1.18) の第 1 式との比較から

$$T = A^{-1}T'A, \quad \therefore T' = ATA^{-1} \quad (4.1.20)$$

が得られる．この行列式をとると

$$\det(T') = \det(A) \det(T) \det(A^{-1}) = \det(T) \quad (4.1.21)$$

となって， $\det(T)$ は不変量になることが分かる．

次に 2 階テンソル成分の 2 乗の和が不変量になるということだけど，テンソル成分の 2 乗の和を具体的に書けば次のようなものだね．

$$\sum_{i,j=1}^3 (T_{ij})^2 = (T_{11})^2 + (T_{22})^2 + (T_{33})^2 + (T_{12})^2 + (T_{13})^2 + (T_{21})^2 + (T_{23})^2 + (T_{31})^2 + (T_{32})^2 \quad (4.1.22)$$

これは整式 $F(T_{ij})$ だね．ところで，第 2 話の §3 の最後で少し触れたけど，テンソル成分の 2 乗の和は実はテンソルの内積だった．いまそのことは兎も角として，座標変換後のテンソルは

$$\begin{aligned} T'_{ij} &= a_{ik}a_{j\ell}T_{k\ell} \\ &= a_{i1}a_{j1}T_{11} + a_{i1}a_{j2}T_{12} + a_{i1}a_{j3}T_{13} \\ &\quad + a_{i2}a_{j1}T_{11} + a_{i2}a_{j2}T_{12} + a_{i2}a_{j3}T_{13} \\ &\quad + a_{i3}a_{j1}T_{11} + a_{i3}a_{j2}T_{12} + a_{i3}a_{j3}T_{13} \end{aligned}$$

両辺の 2 乗の和をとると

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} (T'_{ij})^2 &= \sum_{i,j} \left(\sum_{k,\ell} a_{ik}a_{j\ell}T_{k\ell} \right) \left(\sum_{m,n} a_{im}a_{jn}T_{mn} \right) \\ &= \sum_{k,\ell} \sum_{m,n} \left(\sum_i a_{ik}a_{im} \right) \left(\sum_j a_{j\ell}a_{jn} \right) T_{k\ell}T_{mn} \\ &= \sum_{k,\ell} \sum_{m,n} \delta_{km}\delta_{\ell n} T_{k\ell}T_{mn} \\ &= \sum_{k\ell} T_{k\ell}T_{k\ell} = \sum_{k,\ell} (T_{k\ell})^2 \end{aligned} \quad (4.1.23)$$

となって不変性を証明できた．

- エミリー：テンソルの内積は成分が多いので難儀ね。長ったらしい式を掛け算したうえにさらにサムメーション \sum をとるとというのは貧血を起こしそうになるわ。

- K氏：たしかに ... まあ老婆心ながら一言いっておくと、この手の似た計算は他の分野のところでも遭遇することがあると思うので、短い多項式を作ってコツコツ計算しそのルールのようなものを掴んでおくと後が楽になると思うよ。

さて、2階テンソルの成分の2乗和の平方根をテンソル T の大きさといっている。テンソルの大きさを $\|T\|$ と表すと

$$\|T\|^2 = \sum_{i,j} (T_{ij})^2, \quad \therefore \|T\| = \sqrt{\sum_{i,j} (T_{ij})^2} \quad (4.1.24)$$

と表される。第2話の(2.2.21)も思いだして欲しい。テンソルの大きさという概念に最初はビックリするかも知れないけど、ベクトルの大きさが $\sqrt{a \cdot a} = \sqrt{\sum a_i^2}$ で表されたことを思い浮かべると納得できると思う。当然 $\|T\| \geq 0$ で $\|T\| = 0$ ならそのテンソルはゼロテンソルだね。

4.1.3 テンソル2次曲面

- K氏：ここでの議論は§7.1「主軸問題の復習」の内容がそっくりそのまま役立つ。任意の2階対称テンソルを T とすると、ベクトル x との積 Tx はベクトルになるので、さらにこれと ${}^t x$ とのスカラ積をとったものを Φ とすると

$$\begin{aligned} \Phi = {}^t x \cdot Tx &= \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{12} & T_{22} & T_{23} \\ T_{13} & T_{23} & T_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= T_{11}x^2 + T_{22}y^2 + T_{33}z^2 + 2T_{12}xy + 2T_{23}yz + 2T_{13}zx \end{aligned} \quad (4.1.25)$$

Φ はスカラなのでこれを c (定数) とおくとこれは座標原点を中心とする2次曲面を表す。これをテンソル2次曲面という。

- エミリー：テンソル2次曲面というのは2次形式の係数がテンソル量となっているのね。

主軸方向はテンソルの主方向

- K氏：うん、それで(4.1.25)は主軸変換によりつぎの標準形にすることができる。

$$\Phi \equiv \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 = c \quad (4.1.26)$$

λ_i は固有値だね。主軸座標はプライムをとって x, y, z とした。この2次曲面の主軸方向をテンソル T の主方向という。この座標系ではテンソル T は

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \quad (4.1.27)$$

という簡単な形になる。 λ_i はテンソル T の固有値でテンソルの主値という。新しい座標系での直交基底ベクトルを e_i は固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ に対応する単位固有ベクトルで与えられる。

$$Te_1 = \lambda_1 e_1, \quad Te_2 = \lambda_2 e_2, \quad Te_3 = \lambda_3 e_3 \quad (4.1.28)$$

慣性テンソルの対角化

- エミリー：§ 5.3.2「軸性テンソル」のところで慣性テンソルがでてきたわね．

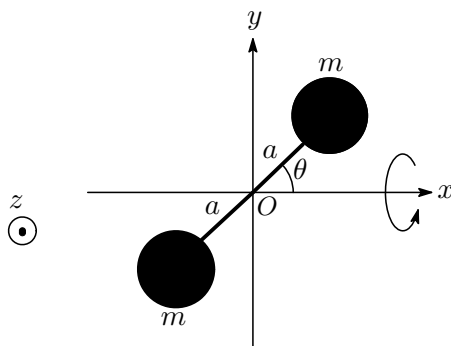
$$J = \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{12} & J_{22} & J_{23} \\ J_{13} & J_{23} & J_{33} \end{pmatrix} \quad (4.1.29)$$

慣性テンソルは2階対称テンソルだから

$$I = \begin{pmatrix} I_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{pmatrix} \quad (4.1.30)$$

と対角化できるのね．

- K氏：そうなんだ． I_{11}, I_{22}, I_{33} を主慣性モーメントと呼んでいるが，慣性主軸の周りの慣性モーメントということになる．具体的な事例をみていこう．下図のような質量 m の質点を重さの無視できる長さ $2a$ の棒でつないだ垂鈴系の物体を考える．絵では大きな黒丸で描いているけど，これはあくまで大きさのない質点ということをお忘れなく．なお，分かりやすいように添え字の数字を x, y, z 表記に変えておく．



$$\begin{aligned} J_{xx} &= \sum m_i (y_i^2 + z_i^2) = 2ma^2 \sin^2 \theta \\ J_{yy} &= \sum m_i (z_i^2 + x_i^2) = 2ma^2 \cos^2 \theta \\ J_{zz} &= \sum m_i (x_i^2 + y_i^2) = 2ma^2 \\ J_{yz} &= -\sum m_i y_i z_i = 0 \\ J_{zx} &= -\sum m_i z_i x_i = 0 \\ J_{xy} &= -\sum m_i x_i y_i = -2ma^2 \cos \theta \sin \theta \end{aligned}$$

この質点系が図のように x 軸回りに回転しているとした場合の慣性テンソルは次のようになる．このテンソルには慣性乗積の非対角項があるね．

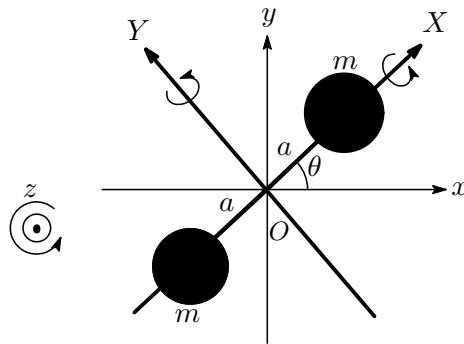
$$J = 2ma^2 \begin{pmatrix} \sin^2 \theta & -\cos \theta \sin \theta & 0 \\ -\cos \theta \sin \theta & \cos^2 \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.1.31)$$

この固有値を求めると

$$I_{XX} = 0, \quad I_{YY} = 2ma^2, \quad I_{ZZ} = 2ma^2, \quad I = 2ma^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.1.32)$$

となる． X, Y, Z は主軸変換後の新しい座標だ．これを慣性主軸と呼んでいる． I_{XX} は X 軸まわりの慣性モーメントで，質点の自転になるけど大きさはないのでこれは0になるね． I_{YY}, I_{ZZ} はそれぞれ Y 軸， Z 軸周りの慣性モーメントだね．

さて，テンソル2次曲面のお話はこの辺りで切り上げて，次にテンソル場の話へと進もう．

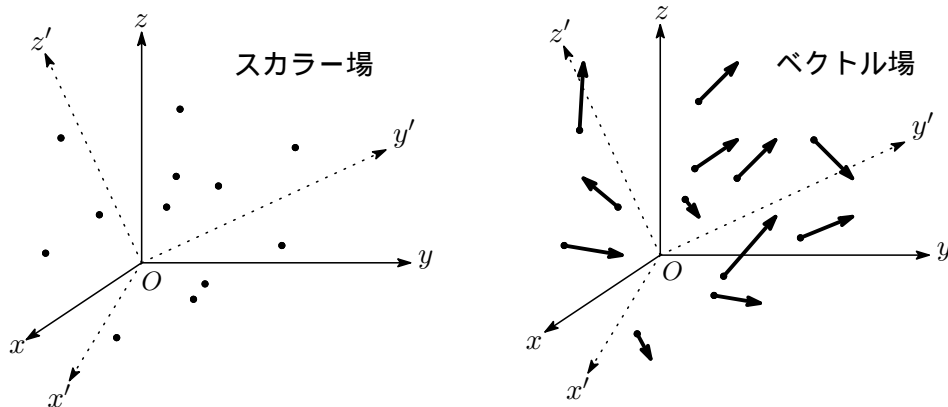


4.2 テンソル場

4.2.1 場という概念について

- K氏：場とはなんだ？ということだけど，高橋康著「古典場から量子場への道」(講談社サイエンスティフィック)に”場”という概念が分かりやすく説明されているのでそこから引用しよう。

『場というものをここではあまりむずかしく考えないで，さしあたり単に空間に分布している物理量であると定義しておこう．たとえば物質が空間に連続的に分布している物理量であると定義しておこう．たとえば物質が空間に連続的に分布しているとき，その密度は一般には空間の点によって異なった値をとるだろう，これを密度の場といてよい．またその物質の各点における速度も，場所によって異なるのが一般であろう，速度を空間の各点の関数と見たとき，それを速度場という』



さらに続けて，著者が昔はじめて場というものを習ったときの有名な実験物理学者の説明が紹介されている．その実験物理学者によれば，

『まず，座標系を設定する．たとえば3次元の直交直線座標を考えよう．その空間の各点に，1個ずつ勝手な数字を書きこむ．それらの数字全体の分布を考えたとき，それがスカラー場である．また，空間の各点に，1個ずつ矢を書き込む，これらの矢の分布を考えたとき，それがベクトル場である．矢の長さが，その点における場の大きさであり，矢の方向が，その点における場の方向である．これらの矢が，あっちもでこっちでも，によきによき長くなったり短くなったり，方向を変えたりしていれば，それが時間に依存するベクトル場である．そのによきによきのしかたを決めるのが，場の運動方程式である』

私は嘗てこの文章を読んだとき，気分がスッとしたような感じがしたが，いかがでしょうか．

さて、これで場というもののアウトラインをつかめたと思うので、次に場を定量的に扱うための数学的手段を紹介していこう。

4.2.2 スカラー場とベクトル場

スカラー場

- K氏：まずスカラー場だが、空間の全域あるいは領域で定義された関数 φ を考え、3次元直交座標系 (Σ 系) 空間の各点 $P_i(x_i, y_i, z_i)$ における φ の値を $\varphi(P_i) = \varphi(x_i, y_i, z_i)$ としよう。いま、点 P を別の直交座標系 Σ' から見たとき、その系での座標を $P'(x'_i, y'_i, z'_i)$ としよう。そうすると

$$\varphi(x_i, y_i, z_i) = \varphi'(x'_i, y'_i, z'_i) \quad (4.2.1)$$

が成り立つとき、関数 φ の値は座標系に依存しない値となる。スカラー量は見る視点 (座標系) を変えても変わらない量なので、関数 φ をスカラー場と呼んでいる。空間の各点における量は関数 $\varphi(x_i, y_i, z_i)$ で与えられるということだね。ただ、空間反転のように不連続に視点を変えた場合、符号が反転する擬スカラーというのがあった。

$$\text{空間反転} : \varphi(-x_i, -y_i, -z_i) = -\varphi(x_i, y_i, z_i) \quad (4.2.2)$$

このような場はスカラー場とは考えにくいね。いまはそのことに深入りはしないでおく。

次にベクトル場だが、これも同様に空間の全域あるいは領域の各点 $P(x_i, y_i, z_i)$ における量がベクトル v_P で表されるというものだ。添え字の P は各点でベクトルが異なることを意味している。 v_P は3成分 $(v_{x_i}, v_{y_i}, v_{z_i})$ をもち、それぞれの成分は空間座標 (x_i, y_i, z_i) の関数となる。

- エミリー：スカラー場とかベクトル場とかのイメージは大体つかめたわ。

スカラー場の勾配はベクトル場

- エミリー：ところで場の性質を調べていくためにはすぐ近傍との関係とかある領域での場の量とかを調べていく必要があるわね。そのような場の量が見る視点というか座標変換でどのように変わるか...
- K氏：そうだね。そこでまず勾配について調べていこう。その前に、見通しを良くするために座標系を x, y, z から x_1, x_2, x_3 と変えておく。さて、スカラー場 φ の偏導関数 $\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}$ が座標変換でどのように変換されるかをまず見てみよう。座標は $x'_i = a_{ij}x_j$ と変換されるので、この微分は

$$\frac{\partial x'_i}{\partial x_j} = a_{ij} \quad (4.2.3)$$

スカラー関数の偏微分は合成関数の微分法 $f(g(x)) \rightarrow \frac{df}{dg} \frac{dg}{dx}$ を思いだして

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = a_{ji} \frac{\partial \varphi}{\partial x'_j} \quad (4.2.4)$$

となるね。この両辺に a_{ki} をかけて i について足し算をすると $a_{ki}a_{ji} = \delta_{kj}$ なので

$$a_{ki} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = a_{ki} a_{ji} \frac{\partial \varphi}{\partial x'_j} = \delta_{kj} \frac{\partial \varphi}{\partial x'_j} = \frac{\partial \varphi}{\partial x'_k}$$

ここで添え字を書き換えて整理すると

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x'_i} = a_{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \quad (4.2.5)$$

となる．これはベクトルの変換公式だ．スカラー関数の偏導関数 $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$ は座標変換に対してベクトル成分として振舞う．ベクトル場

$$\nabla \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \mathbf{e}_3 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \mathbf{e}_i = (\nabla_i \varphi) \mathbf{e}_i \quad (4.2.6)$$

をスカラー場 φ の勾配と呼んでいる．スカラー場の勾配はベクトル場だ．(4.2.6) から微分演算子だけを抜きだすと

$$\nabla = \mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \mathbf{e}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \mathbf{e}_3 \frac{\partial}{\partial x_3} = \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (4.2.7)$$

で，この微分演算子をナブラとよんでいる． $\nabla_i \equiv \frac{\partial}{\partial x_i}$ とおくと

$$\nabla = \mathbf{e}_1 \nabla_1 + \mathbf{e}_2 \nabla_2 + \mathbf{e}_3 \nabla_3 = \mathbf{e}_i \nabla_i \quad (4.2.8)$$

微分演算子 ∇ は ∇_i を 3 成分とするベクトルだ．(4.2.5) よりベクトルとしての ∇ の座標変換の公式

$$\nabla'_i = a_{ij} \nabla_j \quad \left(\frac{\partial}{\partial x'_i} = a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \quad (4.2.9)$$

が得られる．スカラー場 φ の勾配はベクトル ∇ とスカラー関数 φ の積と考えられるね．スカラー場の勾配は

$$\nabla \varphi \equiv \text{grad } \varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \right) \quad (4.2.10)$$

とも書かれる．

- エミリー：スカラー場の勾配はベクトル場になるのね．確かに勾配というのは右肩上がりか左肩上がりか云々という調子で傾斜の向きがあるからベクトル場になるといわれればそうだなと思うわ．微分演算子がベクトルというのもエツと思うけど，ベクトルとしての座標変換をうけるのね．
- K氏：最初はエツ!? と思うけど，そのうちに驚かなくなる(笑い)．

スカラー場の方向微分係数

- K氏：スカラー場 φ の $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ 方向への変化率はそれぞれ

$$\mathbf{e}_1 \cdot \nabla \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \quad \mathbf{e}_2 \cdot \nabla \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \quad \mathbf{e}_3 \cdot \nabla \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \quad (4.2.11)$$

で与えられるけど，任意の方向への φ の変化を調べたいときにはどうすればいいだろうか．

- エミリー：う～ん，そうねえ... 任意の方向だから空間に適当な曲線を描き，この曲線に沿った方向への φ の変化を調べればいいのかしら．

- K氏： そうなんだ．空間曲線の位置ベクトルを r とし，弧長を s とすると

$$\mathbf{r}(s) = (x_1(s), x_2(s), x_3(s)) \quad (4.2.12)$$

で表すことができる．そうするとこの曲線に沿った方向への φ の変化率は

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi(x_1(s), x_2(s), x_3(s))}{ds} &= \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} \frac{dx_1}{ds} + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} \frac{dx_2}{ds} + \frac{\partial\varphi}{\partial x_3} \frac{dx_3}{ds} \\ &= (\nabla\varphi) \cdot (\mathbf{r}'(s)) \quad \text{ただし, } \mathbf{r}'(s) = \left(\frac{dx_1}{ds}, \frac{dx_2}{ds}, \frac{dx_3}{ds} \right) \end{aligned} \quad (4.2.13)$$

と表すことができる．ここで $\mathbf{r}'(s)$ の大きさ $\|\mathbf{r}'(s)\|$ は 1 になることに注意しよう²．つまり， $\mathbf{r}'(s)$ は単位ベクトルとなる．これを e_s とすると φ の単位ベクトル e_s 方向への変化率は

$$\frac{d\varphi}{ds} = e_s \cdot \nabla\varphi = \nabla_{e_s}\varphi \quad (4.2.14)$$

で与えられる．ここで $e_s \cdot \nabla$ を ∇_{e_s} で表した．これを φ の e_s 方向への方向微分係数と呼んでいる．とくに

$$\nabla_{e_i}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \quad (4.2.15)$$

である．

ベクトル場

- K氏： ベクトル場 v の e_s 方向の方向微分係数は

$$\frac{dv}{ds} = \frac{\partial v}{\partial x_1} \frac{dx_1}{ds} + \frac{\partial v}{\partial x_2} \frac{dx_2}{ds} + \frac{\partial v}{\partial x_3} \frac{dx_3}{ds} = (e_s \cdot \nabla)v = \nabla_{e_s}v \quad (4.2.16)$$

で与えられる．とくに，

$$\nabla_{e_i}v = \frac{\partial v}{\partial x_i} \quad \left(\nabla_{e_1}v_j = \frac{\partial v_j}{\partial x_1}, \nabla_{e_2}v_j = \frac{\partial v_j}{\partial x_2}, \nabla_{e_3}v_j = \frac{\partial v_j}{\partial x_3} \right) \quad (4.2.17)$$

である．

さて，ベクトル場の流れがどれだけ膨張するかを測る量としての発散 (div) と，流れがどれだけ回転するかを測る量としての回転 (rot) がある．具体的に見ていこう．

ベクトル場の発散はスカラー場

- K氏： ベクトル場 v に対して発散は

$$\operatorname{div} v = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_i} v_i = \nabla \cdot v \quad (4.2.18)$$

というものだ．この式から見て分かるようにベクトル場の発散はスカラー量だね．2つのベクトル場 v, w と1つのスカラー場 φ に対して

$$\begin{cases} \operatorname{div}(v + w) = \operatorname{div}v + \operatorname{div}w \\ \operatorname{div}(\varphi v) = (\operatorname{grad}\varphi) \cdot v + \varphi(\operatorname{div}v) \end{cases} \quad (4.2.19)$$

が成り立つ．

² $\mathbf{r}'(s)^2 = \sum dx_i^2/ds^2 = 1$

ベクトル場の回転はベクトル場（擬ベクトル場）

- K氏：次にベクトル場の回転だが、これは

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \boldsymbol{v} &= \nabla \times \boldsymbol{v} = \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}, \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}, \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) \\ &= (\nabla_2 v_3 - \nabla_3 v_2) \boldsymbol{e}_1 + (\nabla_3 v_1 - \nabla_1 v_3) \boldsymbol{e}_2 + (\nabla_1 v_2 - \nabla_2 v_1) \boldsymbol{e}_3 \end{aligned} \quad (4.2.20)$$

で定義される． $\boldsymbol{w} = \operatorname{rot} \boldsymbol{v}$ とすれば³ベクトル場の回転成分は

$$w_i = \varepsilon_{ijk} \nabla_j v_k \quad (4.2.21)$$

で与えられる．2つのベクトル場 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ の和の回転は個々のベクトル場の回転の和に等しい．

$$\operatorname{rot}(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = \operatorname{rot} \boldsymbol{u} + \operatorname{rot} \boldsymbol{v} \quad (4.2.22)$$

- エミリー：ベクトル場の回転は右回転あるいは左回転？
- K氏：うん，回転方向はその場の状況によるんだ．右手座標系で，仮に $x - y$ 平面上で反時計回りの回転をすればベクトルの方向は z の正の方向を向くし，逆回転となれば z 軸の負の方向を向く，つまり右ネジの法則だね．ベクトル場 \boldsymbol{w} は軸性ベクトル（擬ベクトル）場になるわけだね．
- エミリー：擬ベクトル場には第3話の §5.3.2「軸性テンソル」のところで学習したように2階反対称テンソル場が付随しているはずね．
- K氏：そうなんだ，擬ベクトル場 \boldsymbol{v} に付随する2階対称テンソル場 (A_{ij}) は次のようなものだね．

$$(A_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & \nabla_1 v_2 - \nabla_2 v_1 & \nabla_1 v_3 - \nabla_3 v_1 \\ \nabla_2 v_1 - \nabla_1 v_2 & 0 & \nabla_2 v_3 - \nabla_3 v_2 \\ \nabla_3 v_1 - \nabla_1 v_3 & \nabla_3 v_2 - \nabla_2 v_3 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.2.23)$$

さて，ここでスカラー場 φ とベクトル場 \boldsymbol{v} に対して成り立つ公式をあげておこう．

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi = \nabla \times (\nabla \varphi) = 0 \\ \operatorname{div} \operatorname{rot} \boldsymbol{v} = \nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{v}) = 0 \\ \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \nabla \cdot (\nabla \varphi) = \nabla^2 \varphi = \Delta \varphi \end{cases} \quad (4.2.24)$$

1番目の式は次のようなイメージで捉えれば分かりやすいと思う．矢印 (grad) の始点を中心にくるっと一回転 (rot) させ，始点を中心放射状に並んだベクトルの和をとると0になるという感じ．同じように2番目は回転の発散なので，擬ベクトル（軸性ベクトル）の向きは対向面で逆向きになり，これらベクトルを足すと0になるね．下の絵を眺めながら自分のイメージで憶えれば良いと思う．3番目の Δ はラプラスの演算子とかラプラシアンと呼ばれる微分演算子で， ∇ の内積で与えられ，座標変換で不変なスカラー場となる．

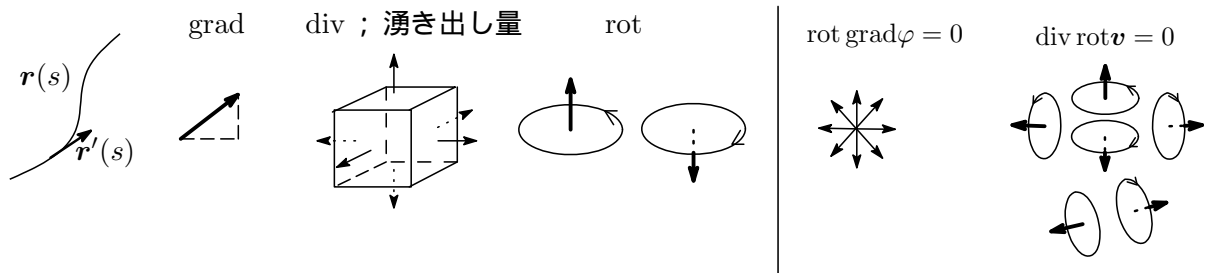
$$\Delta \equiv \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \quad (4.2.25)$$

Δ と grad, div, rot は交換可能で

$$\operatorname{grad} \Delta = \Delta \operatorname{grad}, \quad \operatorname{div} \Delta = \Delta \operatorname{div}, \quad \operatorname{rot} \Delta = \Delta \operatorname{rot} \quad (4.2.26)$$

が成立する．これはベクトルとスカラー (Δ) の積とみなせば憶えやすいと思う．もっとも grad はスカラー関数に作用してベクトルになるんだけど，まあそのことは分かった上でということで ...

³ \boldsymbol{v} を \boldsymbol{w} のベクトルポテンシャルという．



テンソル場

- K氏：テンソル場は空間の各点にテンソル量が分布している場ということだね．ここでは2階テンソル場に限定して話を進めていく．スカラー場で勾配を考えた．この考えをベクトル場 (v) とテンソル場 (T_{ij}) に拡張する．

ベクトル場の勾配は2階テンソル場

- K氏：まずベクトル場 v の勾配を次のように定義する．

$$\nabla v = (\nabla_i v_j) = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla_1 v_1 & \nabla_1 v_2 & \nabla_1 v_3 \\ \nabla_2 v_1 & \nabla_2 v_2 & \nabla_2 v_3 \\ \nabla_3 v_1 & \nabla_3 v_2 & \nabla_3 v_3 \end{pmatrix} \quad (4.2.27)$$

これはダイアドだね．ベクトル場の勾配は2階テンソル場になる．ベクトル場の勾配成分を座標変換すれば

$$\nabla'_i v'_j = (a_{ip} \nabla_p) a_{jq} v_q = a_{ip} a_{jp} \nabla_p v_q \quad (4.2.28)$$

となり， $T_{ij} \equiv \nabla_i v_j$ とおけば上の式は2階テンソルの座標変換公式

$$T'_{ij} = a_{ip} a_{jq} T_{pq} \quad (4.2.29)$$

となる．ベクトル場 v の勾配をとることをベクトル場 v の微分という．

$\nabla \varphi$ はベクトル場で $\nabla \varphi$ の微分 $\nabla \nabla \varphi$ は2階テンソル場となり，その成分は $\nabla_i \nabla_j \varphi$ だね．この場は2階対称テンソル場になる．

$$T_{ij} = \nabla_i \nabla_j \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_i} = \nabla_j \nabla_i \varphi = T_{ji} \quad (4.2.30)$$

また，これから分かるように

$$Tr(T) = T_{ii} = \nabla^2 \varphi = \Delta \varphi \quad (4.2.31)$$

2階テンソル場の勾配は3階テンソル場

- K氏：テンソル場の勾配も同様に

$$\nabla T = (\nabla_i T_{jk}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial T_{jk}}{\partial x_i} \end{pmatrix} \quad (4.2.32)$$

と定義する．テンソル場 T の勾配をとることをテンソル場 T の微分という．2階テンソル場の勾配はベクトル ∇ と2階テンソルの積なので3階のテンソル場になる．

$$\nabla'_i T'_{jk} = (a_{i\ell} \nabla_\ell) a_{jp} a_{kq} T_{pq} = a_{i\ell} a_{jp} a_{kq} \nabla_\ell T_{pq}$$

$\nabla_i T_{jk} \equiv T_{ijk}$ とおけば

$$T'_{ijk} = a_{i\ell} a_{jp} a_{kq} T_{lpq} \quad (4.2.33)$$

これは 3 階テンソルの座標変換公式だね .

- エミリー : スカラー場の勾配はベクトル場 , ベクトル場の勾配は 2 階テンソル場 , 2 階テンソル場の勾配は 3 階テンソル場 ... ということは一般に p 階テンソル場の勾配は $p+1$ 階のテンソル場になるということかしら .
- K 氏 : その通り . 高階テンソル場の微分も同じように定義できるんだね .
さて , ここで勾配についての公式をあげておこう . S は 2 階テンソル .

$$\begin{cases} \nabla(\varphi \mathbf{v}) = (\nabla\varphi) \otimes \mathbf{v} + \varphi \nabla \mathbf{v} & \longrightarrow \nabla_i(\varphi v_j) = (\nabla_i\varphi)v_j + \varphi \nabla_i v_j \\ \nabla(\varphi T) = (\nabla\varphi) \otimes T + \varphi \nabla T & \longrightarrow \nabla_i(\varphi T_{jk}) = (\nabla_i\varphi)T_{jk} + \varphi \nabla_i T_{jk} \\ \nabla(T \otimes S) = (\nabla T) \otimes S + T \otimes \nabla S & \longrightarrow (\nabla_i T_{jk})S_{\ell m} + T_{jk}(\nabla_i S_{\ell m}) \end{cases} \quad (4.2.34)$$

2 階テンソル場の発散はベクトル場

- K 氏 : 2 階テンソル場の発散を

$$\operatorname{div} T = \nabla \cdot T = (\nabla_i T_{ij}) = (\nabla_1 T_{1j} + \nabla_2 T_{2j} + \nabla_3 T_{3j}) \quad (4.2.35)$$

で定義する . テンソル場の発散はベクトル場になる .

$$u_j = \nabla_i T_{ij} = \nabla_1 T_{1j} + \nabla_2 T_{2j} + \nabla_3 T_{3j} \quad (4.2.36)$$

座標変換から

$$\nabla'_i T'_{ij} = a_{ik} a_{ip} a_{jq} \nabla_k T_{pq} = \delta_{kp} a_{jp} \nabla_k T_{pq} = a_{jp} \nabla_p T_{pq}$$

$u_j = \nabla_i T_{ij}$ とすると

$$u'_j = a_{jp} v_p \quad (4.2.37)$$

でこれはベクトルの変換公式だね . ところで 2 階テンソル場には添え字が 2 つあるので , 次の発散も定義できる .

$$v_i = \nabla_j T_{ij} = \nabla_1 T_{i1} + \nabla_2 T_{i2} + \nabla_3 T_{i3} \quad (4.2.38)$$

(4.2.36) をテンソル第 1 添え字の発散とか左発散 , (4.2.38) をテンソル第 2 添え字の発散とか右発散と呼んで区別している . ただし , 対称テンソルの場合は両者は一致するけど .

- エミリー : 2 つの添え字は対等だから左発散と右発散があって当然ね .
- K 氏 : ところで , ベクトル解析でガウスの発散定理というのを習っただろう . 復習するとベクトル場 \mathbf{v} において , 閉曲面 S で囲まれた領域を V とすると

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{v} dV = \int_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS \quad (4.2.39)$$

\mathbf{n} は閉曲面の内部から外部に向いた曲面に垂直な単位ベクトル , というものだったね . テンソル場でも同様の発散定理が成立する .

$$\int_V \operatorname{div} T dV = \int_S T \cdot \mathbf{n} dS \quad (4.2.40)$$

成分で書けば

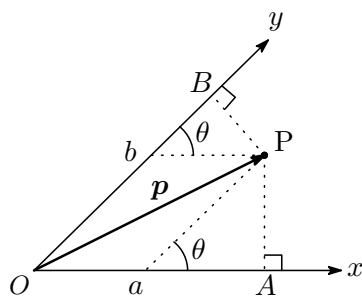
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{左発散に関して} \quad \int_v \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_i} dV = \int_S T_{ij} n_i dS \\ \text{右発散} \quad " \quad \int_v \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} dV = \int_S T_{ij} n_j dS \end{array} \right. \quad (4.2.41)$$

さて、ここらで第4話を終わることにしよう。第5話は斜交座標系の話をする予定だ。それではまた～。

第5話 斜交座標とテンソル

5.1 斜交座標

- K氏：いままでの議論は座標系としてはすべていわゆる直線直交座標系を考えていた．しかし空間の一点指定するに際して設定する座標系は別にそれだけに限らない．球面座標系とか直交曲線座標系その他いろいろあるわけだが，これから議論する座標系として直線斜交座標を考えることにする．以下，直線という接頭語をいちいち付けるのは面倒だから省略する．



$$\begin{aligned} () \quad \overline{OA} &= \overline{Oa} + \overline{Ob} \cos \theta \\ \overline{OB} &= \overline{Ob} + \overline{Oa} \cos \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} () \quad \overline{Oa} &= (\overline{OA} - \overline{OB} \cos \theta) / \sin^2 \theta \\ \overline{Ob} &= (\overline{OB} - \overline{OA} \cos \theta) / \sin^2 \theta \end{aligned}$$

さて，簡単のため2次元平面で考えよう．図のP点を指定するのに()座標(A, B)を指定するのと()座標(a, b)を指定する2つの方法がある．ベクトルpの大きさを求める場合，()では

$$\|p\| = \sqrt{\overline{OA}^2 + (\overline{Ob} \sin \theta)^2} = \sqrt{(\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 - 2\overline{OA} \cdot \overline{OB} \cos \theta) / \sin^2 \theta} \quad (5.1.1)$$

一方()では余弦定理を使うと

$$\|p\| = \sqrt{\overline{Oa}^2 + \overline{Ob}^2 + 2\overline{Oa} \cdot \overline{Ob} \cos \theta} \quad (5.1.2)$$

となり，いずれの場合もピタゴラスの定理のような簡単な式にはならない．しかし，()にそれぞれ \overline{Oa} , \overline{Ob} を掛けて足すと

$$\overline{Oa} \cdot \overline{OA} + \overline{Ob} \cdot \overline{OB} = \overline{Oa}^2 + \overline{Ob}^2 + 2\overline{Oa} \cdot \overline{Ob} \cos \theta$$

となるので，(5.1.2)は

$$\|p\| = \sqrt{\overline{Oa} \cdot \overline{OA} + \overline{Ob} \cdot \overline{OB}} \quad (5.1.3)$$

と簡単な式で表される．ということで，斜交座標を採用した場合，()と()の量を併用すると見通しが良くなるのが分かる．

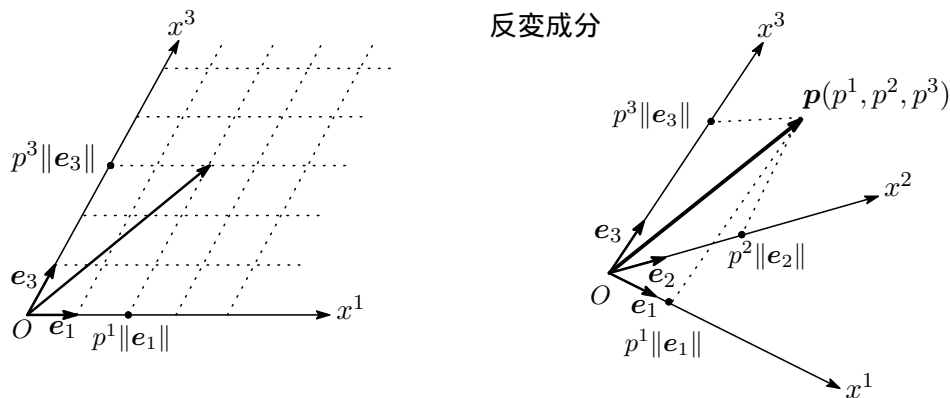
- エミリー：斜交座標の場合，両睨みでことを進めればいいということね．

5.1.1 ベクトルの反変成分と共変成分

- K氏： そうだね．斜交座標をもう少し詳しく調べていこう．斜交座標軸を直交軸と区別するために x_1, x_2, x_3 軸の番号を右肩につけた x^1, x^2, x^3 軸とし，基底ベクトルを e_1, e_2, e_3 とする．座標軸の上付き添え字に対して基底ベクトルの添え字を下付きにしたが，その理由は追々分かってくる．添え字を下付きにした基底を共変基底というが，いまそのことは置いておいて，基底ベクトルの長さも1とは限らず，まら，各軸の基底ベクトルの長さも相等しいとは限らない座標系だ．この座標系を Σ 系としよう． e_i は互いに直交していないが，1次独立のベクトルだ．そして e_1 を p^1 倍， e_2 を p^2 倍， e_3 を p^3 倍したものの和としてベクトル p を作るができる．

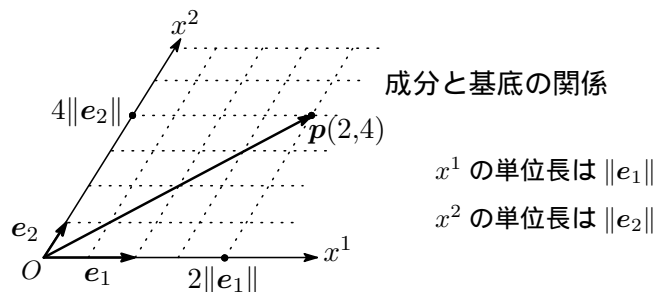
$$p = p^1 e_1 + p^2 e_2 + p^3 e_3 \quad (5.1.4)$$

(5.1.4) で表されるベクトル p の成分 (p^1, p^2, p^3) を基底 e_i に対する反変成分といい，添え字を



上付きで表す．

- エミリー： え～っと，上の右の図を見れば x^1, x^2, x^3 軸上にベクトル p のそれぞれの成分と思われる $p^1||e_1||, p^2||e_2||, p^3||e_3||$ が書かれているけど，それが p の成分になるのじゃないの？
- K氏： そのように誤解しやすいよね．基底の長さが1，つまり $||e_i|| = 1$ の場合はエミリーの指摘通りだ．しかし，いまは基底の長さを1に限定していないだろう．



一般にベクトルの成分は

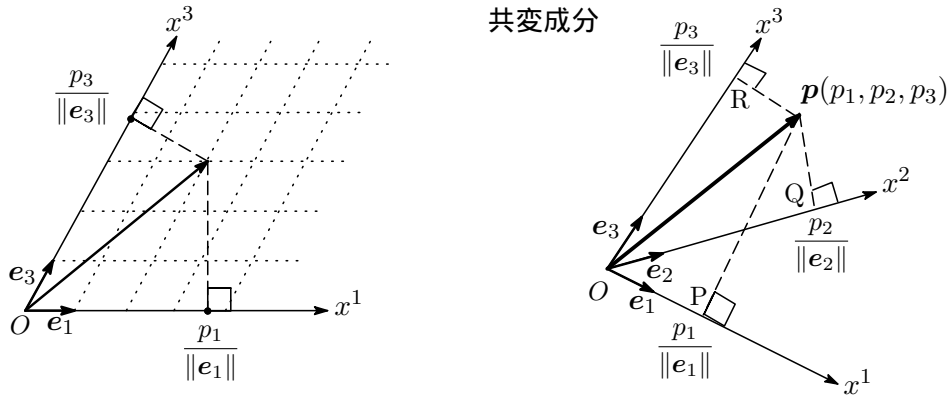
$$p = p^1 e_1 + p^2 e_2 + p^3 e_3 \quad (5.1.5)$$

で各基底にかかる係数のことを言った．基底の長さが1であれば，たとえば x^1 軸上への p の射影長は p^1 に等しい．しかし，いまは基底の長さを $||e_i||$ としているので， p の x^1 軸上での長さは $\sqrt{p^1 e_1 \cdot p^1 e_1} = p^1 ||e_1||$ となる．ベクトル成分の長さではないんだね．

- エミリー：ナルホド，了解したわ．
- K氏：一方，

$$p_1 = \mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_1, \quad p_2 = \mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_2, \quad p_3 = \mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_3 \quad (5.1.6)$$

を \mathbf{p} の成分とすることもできる．



下付き添え字を持つ成分 (p_1, p_2, p_3) をベクトル \mathbf{p} の共変成分という．ついでながら“下付き”を“共変”というので基底ベクトル \mathbf{e}_i は共変ベクトルだね．(5.1.6) に (5.1.4) を入れると

$$p_i = \mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_i = (p^1 \mathbf{e}_1 + p^2 \mathbf{e}_2 + p^3 \mathbf{e}_3) \cdot \mathbf{e}_i = p^j \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_i \quad (5.1.7)$$

となって，共変成分と反変成分の関係式がでてくる．斜交座標なので基底の内積は $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j \neq 0$ だ． $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j$ を g_{ij} とおけば，その成分数は全部で $3 \times 3 = 9$ 個の 2 階テンソルだ．

$$g_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j, \quad (g_{ij}) = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} \quad (5.1.8)$$

g_{ij} は斜交座標を特長づける重要な量で，これを計量行列とか共変計量行列と呼ばれる．明らかに $g_{ij} = g_{ji}$ で対称行列（対称テンソル）だね．

- エミリー：計量というネーミングの由来は？
- K氏：うん，ベクトルの成分というのは基底の取り方でかわるので，いわゆる幾何学的な量ではないよね．しかし，ベクトルの長さ

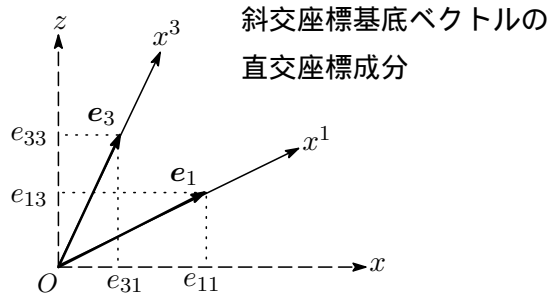
$$\|\mathbf{A}\| = \sqrt{A^i A^j \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j} = \sqrt{g_{ij} A^i A^j} \quad (5.1.9)$$

とか内積

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A^i B^j \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = g_{ij} A^i B^j \quad (5.1.10)$$

これからベクトルの交差角が分かるが，これらは座標系によらない幾何学的な量で， g_{ij} はそれらの量を“計る”もとになるものになっている．この意味で g_{ij} を計量と呼んでいるんだね．

計量行列には逆行列 $(g_{ij})^{-1}$ が存在する，これは重要なポイントだ．逆行列が存在する必要十分条件は $\det(g_{ij}) \neq 0$ で，それを以下に証明しよう．興味がなければ飛ばしでかまわない．斜交基底ベクトル \mathbf{e}_i の直線直交座標に関する成分をそれぞれ (e_{i1}, e_{i2}, e_{i3}) とする．



そうすると

$$\begin{cases} e_1 \cdot e_1 = e_{11}e_{11} + e_{12}e_{12} + e_{13}e_{13} \\ e_1 \cdot e_2 = e_{11}e_{21} + e_{12}e_{22} + e_{13}e_{23} \\ e_1 \cdot e_3 = e_{11}e_{31} + e_{12}e_{32} + e_{13}e_{33} \\ \vdots \end{cases}$$

となる．これを (5.1.8) の右辺の行列を行列式にしたものに入れ，転置行列式はもとの行列式に等しいことを使って整理すると

$$\det(g_{ij}) = \begin{vmatrix} e_1 \cdot e_1 & e_1 \cdot e_2 & e_1 \cdot e_3 \\ e_2 \cdot e_1 & e_2 \cdot e_2 & e_2 \cdot e_3 \\ e_3 \cdot e_1 & e_3 \cdot e_2 & e_3 \cdot e_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} e_{11} & e_{21} & e_{31} \\ e_{12} & e_{22} & e_{32} \\ e_{13} & e_{23} & e_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{vmatrix}^2 > 0$$

となる．これで， g_{ij} の逆行列の存在が保証できた．

計量行列 g_{ij} の逆行列を添え字を右上に付けた g^{ij} で表すと

$$(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1} = \frac{1}{\det(g_{ij})} \left\{ g_{11} \begin{vmatrix} g_{22} & g_{23} \\ g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} - g_{21} \begin{vmatrix} g_{12} & g_{13} \\ g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} - g_{31} \begin{vmatrix} g_{12} & g_{13} \\ g_{22} & g_{23} \end{vmatrix} \right\} \quad (5.1.11)$$

この (g^{ij}) を反変計量行列という．これは明らかに $g^{ij} = g^{ji}$ で対称行列だ． g_{ij} と g^{ij} の積は単位行列になる，

$$(g_{ij})(g^{ij}) = I, \quad (g^{ij})(g_{ij}) = I$$

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} & g^{13} \\ g^{12} & g^{22} & g^{23} \\ g^{31} & g^{32} & g^{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.1.12)$$

これから

$$g_{i\mu}g^{\mu j} = \delta_i^j, \quad g^{i\mu}g_{\mu j} = \delta_j^i = \begin{cases} 0 & (i \neq j) \\ 1 & (i = j) \end{cases} \quad (5.1.13)$$

が成り立つ． g_{ij} を使えば (5.1.7) は

$$p_i = p^\mu g_{\mu i} = g_{i\mu} p^\mu \quad (i = 1, 2, 3) \quad (5.1.14)$$

と表される．この両辺に g^{ki} をかけ， i で縮約すると

$$g^{ki} p_i = g^{ki} g_{i\mu} p^\mu = \delta_\mu^k p^\mu = p^k, \quad \therefore p^k = g^{k\mu} p_\mu \quad (k = 1, 2, 3) \quad (5.1.15)$$

ただし，最後の式では見やすいように添え字を書き換えた．以上，計量行列の便利な機能を整理しておく

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{共変計量行列を使うとベクトルの反変成分から共変成分を得る事ができる。} \\ p_i = g_{ij} p^j \\ \text{反変計量行列を使うとベクトルの共変成分から反変成分を得る事ができる。} \\ p^i = g^{ij} p_j \end{array} \right. \quad (5.1.16)$$

添え字の付き方

共変ベクトル成分	反変ベクトル成分	
$p_i = g_{i\mu} p^\mu,$	$p^k = g^{k\mu} p_\mu$	$\left(\begin{array}{l} g_{i\mu} g^{\mu k} = \delta_i^k \\ g^{i\mu} g_{\mu k} = \delta_k^i \end{array} \right)$

- エミリー：ベクトル p の長さは計量行列を使えば

$$\begin{aligned} \|p\| &= \sqrt{p \cdot p} = \sqrt{(p^1 e_1 + p^2 e_2 + p^3 e_3)^2} \\ &= \sqrt{g_{11} p^1 p^1 + g_{22} p^2 p^2 + g_{33} p^3 p^3 + 2g_{12} p^1 p^2 + 2g_{23} p^2 p^3 + 2g_{31} p^3 p^1} \\ &= \sqrt{g_{\mu\nu} p^\mu p^\nu} \end{aligned} \quad (5.1.17)$$

となり， $g_{\mu\nu} p^\mu p^\nu = p_\nu p^\nu = p^\mu p_\mu$ なので，

$$\|p\| = \sqrt{p_\nu p^\nu} = \sqrt{p^\mu p_\mu} \quad (5.1.18)$$

となるわね．§5.1「斜交座標」の図で出てきたベクトル p は \overline{Oa} ， \overline{Ob} はそれぞれ $p^1 \|e_1\|$ ， $p^2 \|e_2\|$ ， \overline{OA} ， \overline{OB} がそれぞれ $p_1 / \|e_1\|$ ， $p_2 / \|e_2\|$ となるので

$$\|p\| = \sqrt{\overline{Oa} \cdot \overline{OA} + \overline{Ob} \cdot \overline{OB}} = \sqrt{p_1 p^1 + p_2 p^2} = \sqrt{p_\nu p^\nu} \quad (5.1.19)$$

という次第ね．

- K氏：そうだね．整理しておくともベクトル p と q の反変成分をそれぞれ p^k ， q^k とし，共変成分を p_k ， q_k とすると内積は

$$\begin{aligned} p \cdot p &= g_{\mu\nu} p^\mu p^\nu = p_\nu p^\nu = p^\mu p_\mu \\ p \cdot q &= g_{\mu\nu} p^\mu q^\nu = p_\nu q^\nu = p^\mu q_\mu \end{aligned} \quad (5.1.20)$$

で表されるということだね．

5.1.2 座標変換

- K氏：さて，2つの斜交座標系 Σ ， Σ' の斜交基底ベクトルをそれぞれ (e_1, e_2, e_3) ， (e'_1, e'_2, e'_3) とし，この間の座標変換の式を求めていこう．両座標系の原点は同じとする．これは線形変換なので

$$e'_i = a^\mu_i e_\mu \quad \longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} e'_1 \\ e'_2 \\ e'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^1_1 & a^2_1 & a^3_1 \\ a^1_2 & a^2_2 & a^3_2 \\ a^1_3 & a^2_3 & a^3_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} \quad (5.1.21)$$

とおく、係数行列を $A = a_i^\mu$ とすると e'_i と e_i は 1 次独立なので A は逆行列 A^{-1} をもつ、

$$A^{-1} = (a_i^\mu)^{-1} = (b_i^\mu) \quad (5.1.22)$$

とおくと、 $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ なので

$$a_k^\mu b_i^k = \delta_i^\mu, \quad b_k^\mu a_i^k = \delta_i^\mu \quad (5.1.23)$$

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1^1 & b_1^2 & b_1^3 \\ b_2^1 & b_2^2 & b_2^3 \\ b_3^1 & b_3^2 & b_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \cdot \quad \cdot$$

が成り立つ。 Σ' 系でのベクトル p の反変成分を p'^ν とすると

$$p^\mu e_\mu = p'^\nu e'_\nu = p'^\nu (a_\nu^\mu e_\mu) = (a_\nu^\mu p'^\nu) e_\mu \longrightarrow p^\mu = a_\nu^\mu p'^\nu \quad (5.1.24)$$

$$\therefore p'^\nu = (a_\nu^\mu)^{-1} p^\mu = b_\nu^\mu p^\mu$$

これが反変ベクトル成分の座標変換公式だ。次に Σ, Σ' 系でのベクトル p の共変成分を p_μ, p'_μ とすると $p_\mu = p \cdot e_\mu$ なので

$$p'_\mu = p \cdot e'_\mu = p \cdot (a_\mu^\nu e_\nu) = a_\mu^\nu p \cdot e_\nu = a_\mu^\nu p_\nu \quad (5.1.25)$$

これが共変ベクトル成分の座標変換式となる。また、計量行列 g_{ij} は、 Σ' 系で $g'_{ij} = e'_i \cdot e'_j$ となるので

$$g'_{ij} = e'_i \cdot e'_j = (a_i^\mu e_\mu) \cdot (a_j^\nu e_\nu) = a_i^\mu a_j^\nu e_\mu \cdot e_\nu = a_i^\mu a_j^\nu g_{\mu\nu} \quad (5.1.26)$$

$$\therefore g'_{ij} = a_i^\mu a_j^\nu g_{\mu\nu}$$

g_{ij} は 2 階テンソルとしての変換を受ける。そこで計量行列という代わりに計量テンソルとも言われ、 g_{ij} を計量テンソルの共変成分という。

チョットごたごたしてきたので、基底成分、反変成分、共変成分、計量行列の座標変換公式を整理しておこう。

$$\left\{ \begin{array}{l} \cdot \text{基底成分の変換} : e'_\mu = a_\mu^\nu e_\nu \\ \cdot \text{反変成分の変換} : p'^\nu = (a_\nu^\mu)^{-1} p^\mu = b_\nu^\mu p^\mu \\ \cdot \text{共変成分の変換} : p'_\mu = a_\mu^\nu p_\nu \\ \cdot \text{計量行列の変換} : g'_{ij} = a_i^\mu a_j^\nu g_{\mu\nu} \quad (2 \text{ 階対称テンソル}) \end{array} \right. \quad (5.1.27)$$

- エミリー：反変とか共変というネーミングの由来はどこからくるのかしら？
- K氏：そうだね、上の座標変換公式を眺めると、共変ベクトル成分の係数行列 (a_i^j) は斜交基底の係数行列と同じだが、反変ベクトル成分の係数行列はその逆行列 $(a_i^j)^{-1}$ になっているね。このことから“共”と“反”の接頭語がそれぞれに付いたんだね。
- エミリー：ところで本によっては p_i を共変ベクトル、 p^i を反変ベクトルと書いてあるので、共変ベクトルと反変ベクトルの 2 つのベクトルがあるように錯覚しやすいけど、ベクトルは一つ。ただ基底の取り方で共変あるいは反変となるということね。反変ベクトルの場合は平行四辺形の原則でベクトル p は $p = p^1 e_1 + p^2 e_2 + p^3 e_3$ と図形的にもすぐ確かめられる。しかし、共変ベクトルの場合、そもそも基底がハッキリしないので何かスッキリしないのよね。 $p = (p \cdot e_1) e_1 + (p \cdot e_2) e_2 + (p \cdot e_3) e_3$ とするわけにもいかないでしょう。
- K氏：うん、そうなんだね。そこで次に反変基底 e^i というものを説明していこう。

5.1.3 反変基底 (双対基底)

- K氏：斜交座標系 Σ の基底 e_i に対して，原点を同じくする別の斜交座標系 Σ^* の基底を上付き添え字の e^i とし，

$$\begin{cases} e^1 \cdot e_1 = 1 & e^2 \cdot e_1 = 0 & e^3 \cdot e_1 = 0 \\ e^1 \cdot e_2 = 0 & e^2 \cdot e_2 = 1 & e^3 \cdot e_2 = 0 \\ e^1 \cdot e_3 = 0 & e^2 \cdot e_3 = 0 & e^3 \cdot e_3 = 1 \end{cases} \rightarrow e^i \cdot e_j = \delta_j^i \quad (5.1.28)$$

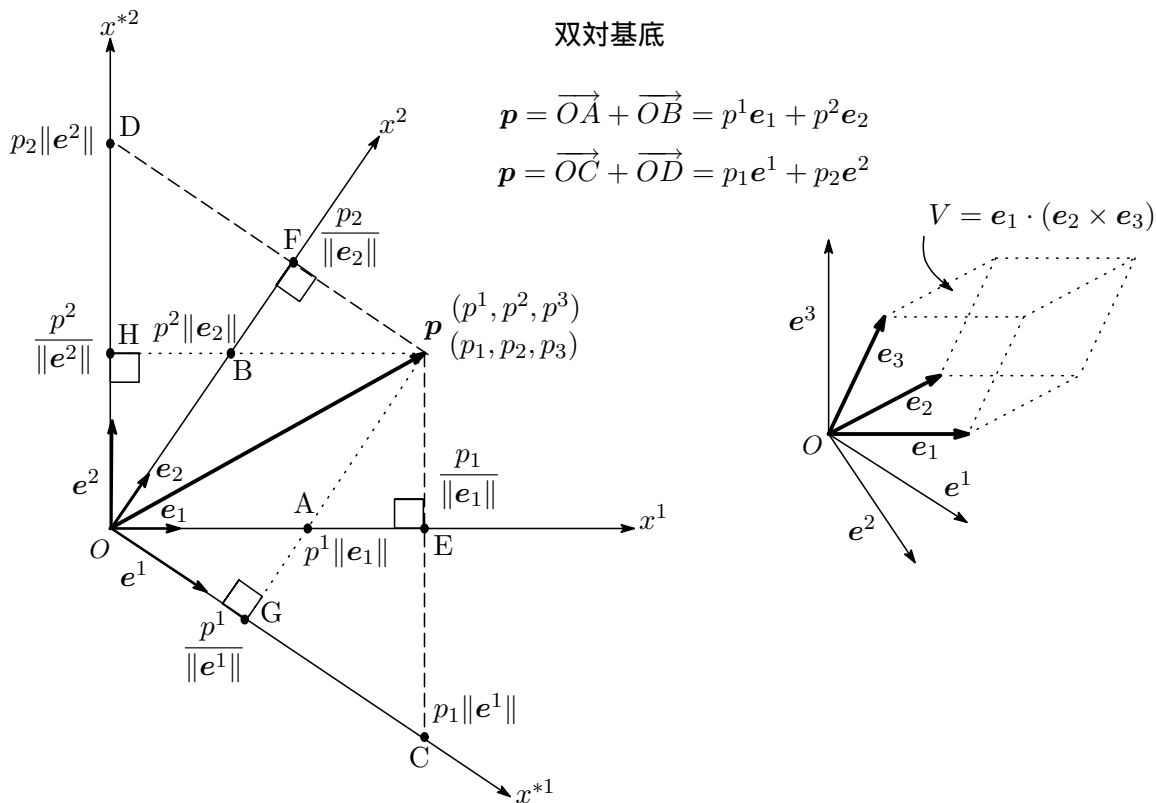
を満たすものと定義する． e^i を反変基底と呼ぶ．定義より $i \neq j$ の場合， e^i と e_j は規格直交している．反変基底は共変基底で表すことができる．

$$e^1 = \frac{e_2 \times e_3}{e_1 \cdot (e_2 \times e_3)}, \quad e^2 = \frac{e_3 \times e_1}{e_1 \cdot (e_2 \times e_3)}, \quad e^3 = \frac{e_1 \times e_2}{e_1 \cdot (e_2 \times e_3)} \quad (5.1.29)$$

また，共変基底は反変基底で表すことができる．

$$e_1 = \frac{e^2 \times e^3}{e^1 \cdot (e^2 \times e^3)}, \quad e_2 = \frac{e^3 \times e^1}{e^1 \cdot (e^2 \times e^3)}, \quad e_3 = \frac{e^1 \times e^2}{e^1 \cdot (e^2 \times e^3)} \quad (5.1.30)$$

反変基底と共変基底はいわば“対”の関係で，これらを互いに双対基底と呼んでいるね． $e^i \cdot e_i = 1$ より，反変基底 e^i の長さは共変基底 e_i の射影長の逆数の長さをもつ．つまり，相手が長くなればこちらは短くなり，こちらが長くなれば相手は短くなるという相反関係だね．反変基底ベクトルというのは固体物理の結晶格子の話などにでてくる逆格子ベクトルをイメージしてもいいだろう．



- エミリー：このセクションの冒頭でベクトル p の大きさは

$$\|p\| = \sqrt{\overline{OA} \cdot \overline{OE} + \overline{OB} \cdot \overline{OF}} \quad (5.1.31)$$

で表されたわ。 $\overline{OE}, \overline{OF}$ を共変ベクトル成分の長さとして取り扱ったけど、本当は $\overline{OC}, \overline{OD}$ がそれに当たるのね。

- K氏： そうなんだ。そこで $\overline{OE}, \overline{OF}$ の代わりに $\overline{OC}, \overline{OD}$ を (5.1.32) に入れると共変・反変基底の $e_i \cdot e^i = 1$ が効いて

$$\begin{aligned} \|p\| &= \sqrt{\overline{OA} \cdot \overline{OC} + \overline{OB} \cdot \overline{OD}} = \sqrt{p^1 \|e_1\| \cdot p_1 \|e^1\| + p^2 \|e_2\| \cdot p_2 \|e^2\|} \\ &= \sqrt{p^1 p_1 + p^2 p_2} \end{aligned} \quad (5.1.32)$$

と (5.1.19) と同じ結果を得るだろう。

- エミリー： そうね。
- K氏： 共変基底 e_i と双対な反変基底 e^j は計量行列を介して (5.1.1) と同じく

$$e_i = g_{ij} e^j, \quad e^i = g^{ij} e_j \quad (5.1.33)$$

の関係で結ばれる。この証明をやってみるか。

- エミリー： そうね、 e_i と e^j は線形変換で結ばれるので、変換係数を h_{ij} とすると

$$e_i = h_{ij} e^j$$

e_k との内積をとると

$$e_i \cdot e_k = h_{ij} e^j \cdot e_k = h_{ij} \delta_k^j = h_{ik} = g_{ik}, \quad \therefore h_{ij} = g_{ij}$$

次に、この逆を取ると

$$e^i = g^{ij} e_j \quad (5.1.34)$$

が得られる。

- K氏： そうだね。反変基底と反変計量行列の関係は

$$e^i \cdot e^j = g^{ik} g^{j\ell} e_k \cdot e_\ell = g^{ik} (g^{j\ell} g_{k\ell}) = g^{ik} \delta_k^j = g^{ij}$$

なので、 Σ^* 系での計量行列 g^{ij} (反変計量行列) として

$$g^{ij} = e^i \cdot e^j \quad (5.1.35)$$

と定義できるね。これは計量テンソルの反変成分ともいわれる。

- エミリー： Σ^* と Σ'^* の双対基底間同士の変換はどうなるのかしら？
- K氏： 共変基底の座標変換公式は (5.1.21) だったね。反変基底の場合も同様にして

$$e'^i = b^i_j e^j \quad (5.1.36)$$

となる。まとめておくと

$$\begin{cases} e_i = g_{ij} e^j, & e^i = g^{ij} e_j, & e'^i = b^i_j e^j \\ g_{ik} g^{jk} = \delta_k^j, & g^{ij} = e^i \cdot e^j, & g'^{ij} = b^i_k b^j_\ell g^{k\ell} \end{cases} \quad (5.1.37)$$

5.2 2階テンソルの座標変換

5.2.1 混合テンソル成分

- K氏：2階テンソルを考える． Te_i は反変成分を持つベクトルだね¹．基底 e_j で展開すると

$$Te_i = T^j_i e_j = T^1_i e_1 + T^2_i e_2 + T^3_i e_3 \quad (5.2.1)$$

となる．係数 T^j_i を2階テンソル T の共変基底 e_i に関する混合成分と呼んでいる．係数を T_{11} というように書かずに添え字を上下に分けて書く理由は，反変基底が存在する斜交座標が舞台となっているからなんだね．直交直線座標系でのテンソル成分は (1.1.12) で表され

$$T_{ij} = e_i \cdot Te_j = T(e_i, e_j) \quad (5.2.2)$$

だった．いま，(5.2.1) の両辺に反変基底 e^μ をかけると

$$e^\mu \cdot Te_i = e^\mu \cdot T^j_i e_j = (e^\mu \cdot e_j) T^j_i = g^\mu_j T^j_i = \delta^\mu_i T^j_i = T^\mu_i \quad (5.2.3)$$

$$\therefore T^j_i = e^i \cdot Te_j = T(e^i, e_j)$$

となるだろう．(5.2.2) とよく見比べて欲しい． T^j_i は添え字が上下についているので反変・共変混ざり合った混合テンソル成分というわけだね．同様にして，

$$T^j_i = e_i \cdot Te^j = T(e_i, e^j) \quad (5.2.4)$$

も混合テンソル成分だ．また，

$$g_n^m = e^m \cdot e_n = e_n \cdot e^m = \delta_n^m \quad (5.2.5)$$

を計量テンソルの混合成分という．

5.2.2 共変成分の座標変換

さて，2階テンソルを

$$T_{ij} = e_i \cdot Te_j = T(e_i, e_j) \quad (5.2.6)$$

とすれば²，任意のベクトル $u = u^i e_i$ ， $v = v^j e_j$ に対して³

$$T(u, v) = T_{ij} u^i v^j \quad (5.2.7)$$

が成り立つ⁴． T_{ij} をテンソル T の基底 e_i に対する成分といった．異なる基底 e'_m, e'_n に対するテンソル成分は

$$T'_{mn} = T(e'_m, e'_n) \quad (5.2.8)$$

で与えられる．基底の座標変換公式は

$$e'_m = a^i_m e_i, \quad e'_n = a^j_n e_j \quad (5.2.9)$$

なので，これを (5.2.8) に入れると

$$T'_{mn} = T(a^i_m e_i, a^j_n e_j) = a^i_m a^j_n T(e_i, e_j) = a^i_m a^j_n T_{ij} \quad (5.2.10)$$

が得られる．この変換式は，(5.1.25) 共変ベクトル成分の変換式の2重写しのような形をしているだろう．(5.2.10) がテンソルの共変成分の座標変換公式だ．

¹ $p = p^i e_i$ で p^i は反変成分だったことを思い出しましょう．

²(2.1.2) を参照．

³反変成分を持ったベクトルなので反変ベクトルと呼ばれることもある．

⁴(2.1.10) 参照．

5.2.3 反変成分の座標変換

- K氏：次に2階テンソルを反変基底をつかって

$$T^{ij} = e^i \cdot T e^j = T(e^i, e^j) \quad (5.2.11)$$

とおこう．添え字を上付きにした T^{ij} は反変テンソル成分という．任意のベクトル $p = p_i e^i$, $q = q_i e^i$ に対して

$$T(p, q) = T^{ij} p_i q_j \quad (5.2.12)$$

となる．テンソルの反変成分の変換座標公式は (5.1.36) を使って次式を得る．

$$T'^{mn} = T(e'^m, e'^n) = b_j^m b_k^n T(e^j, e^k) = b_j^m b_k^n T^{jk} \quad (5.2.13)$$

5.2.4 混合成分の座標変換

- K氏：最後にテンソルの混合成分の座標変換公式を求めておこう． $T e'_i$ を基底 e'_μ で展開して

$$\begin{aligned} T e'_i &= T^{\mu'}_i e'_\mu = T^{1'}_i e_1 + T^{2'}_i e_2 + T^{3'}_i e_3 \\ &= T^{\mu'}_i (a^\nu_\mu e_\nu) = a^\nu_\mu T^{\mu'}_i e_\nu \end{aligned} \quad (5.2.14)$$

となる．一方，

$$T e'_i = T(a^\mu_i e_\mu) = a^\mu_i T e_\mu = a^\mu_i T^\nu_\mu e_\nu \quad (5.2.15)$$

なので，(5.2.14) と (5.2.15) を等しいと置くと

$$a^\nu_\mu T^{\mu'}_i e_\nu = a^\mu_i T^\nu_\mu e_\nu \quad \therefore a^\nu_\mu T^{\mu'}_i = a^\mu_i T^\nu_\mu \quad (5.2.16)$$

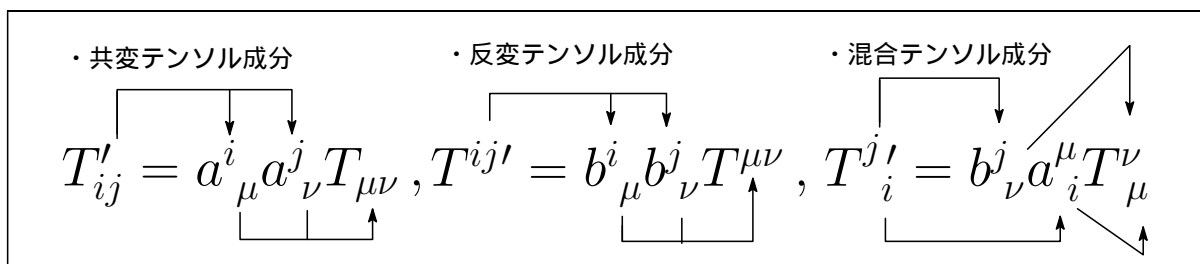
これに逆行列 $b^j_\nu = (a^j_\nu)^{-1}$ を両辺にかけると

$$\begin{aligned} b^j_\nu a^\nu_\mu T^{\mu'}_i &= \delta^\xi_\mu T^{\mu'}_i = T^{j'}_i = b^j_\nu a^\mu_i T^\nu_\mu \\ \therefore T^{j'}_i &= b^j_\nu a^\mu_i T^\nu_\mu \end{aligned} \quad (5.2.17)$$

が得られる．同様に，混合テンソル T^j_i の座標変換公式として

$$T^{j'}_i = b^j_\nu a^\mu_i T^\nu_\mu \quad (5.2.18)$$

が得られる．共変テンソル，反変テンソル，混合テンソルの座標変換公式を以下にまとめておく．



5.2.5 混合成分と共変・反変成分の関係

- K氏: $T_{ij} = e_i \cdot T e_j$ に (5.2.1) を入れると混合成分と共変成分を結びつける関係式

$$T_{ij} = e_i \cdot (T_j^k e_k) = T_j^k e_i \cdot e_k = g_{ik} T_j^k \quad (5.2.19)$$

が得られる。また, (5.2.19) の両辺に g^{ik} を掛けて整理すると

$$\begin{aligned} g^{ik} T_{ij} &= g^{ik} g_{i\ell} T_j^\ell = \delta_\ell^k T_j^\ell = T_j^k \\ \therefore T_j^k &= g^{ik} T_{ij} = g^{ki} T_{ij} \end{aligned} \quad (5.2.20)$$

となり, 反変計量行列を使うと共変テンソル成分から混合テンソル成分が得られることが分かる。
次に, 反変テンソル成分を

$$T^{ij} = T_1^j e^1 + T_2^j e^2 + T_3^j e^3 \quad (5.2.21)$$

とにおいて, (5.2.11) に入れると混合成分と反変成分を結びつける関係式

$$\begin{aligned} T^{ij} &= e^i \cdot T e^j = e^i \cdot (T_k^j e^k) = T_k^j e^i \cdot e^k = T_k^j g^{ik} = g^{kj} T_k^i \\ \therefore T^{ij} &= g^{kj} T_k^i = g^{i\mu} g^{jk} T_{\mu k} \end{aligned} \quad (5.2.22)$$

を得る。また, これから

$$T_k^i = g_{kj} T^{ij} \quad (5.2.23)$$

を得る。共変計量行列を使うと反変テンソル成分から混合テンソル成分が得られる。
また, (5.1.33) を使えば

$$\begin{aligned} T_i^j &= e_i \cdot T e^j = g_{i\mu} e^\mu \cdot T(g^{j\nu} e_\nu) = g_{i\mu} g^{j\nu} e^\mu \cdot T e_\nu = g_{i\mu} g^{j\nu} T_\nu^\mu \\ \therefore T_i^j &= g_{i\mu} g^{j\nu} T_\nu^\mu \end{aligned} \quad (5.2.24)$$

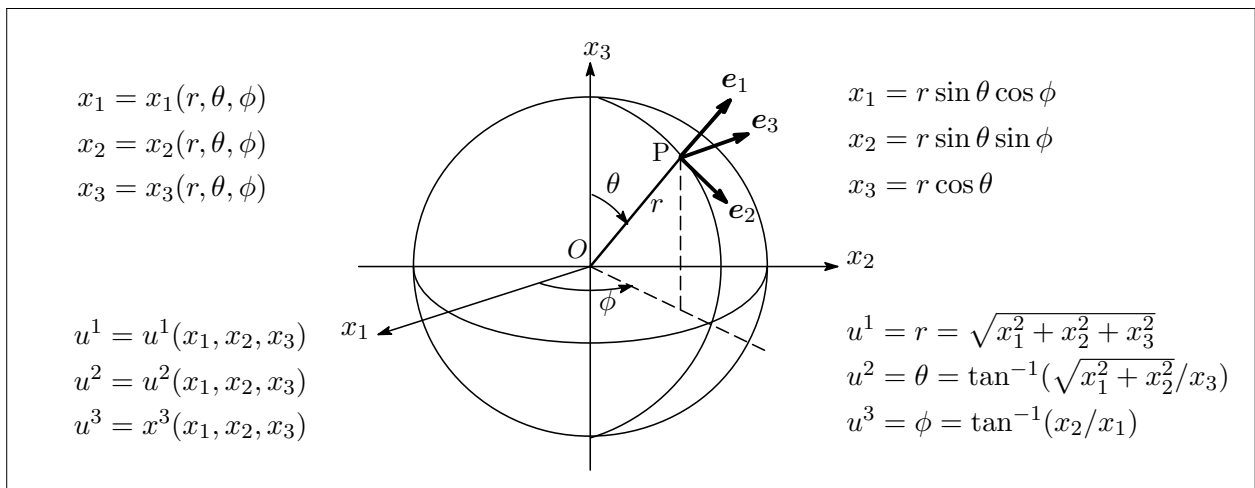
以上の結果をまとめておくと次のようになるね。

$$\left\{ \begin{array}{ll} T_{ij} = g_{ik} T_j^k = g_{ik} g_{j\mu} T^{k\mu} & T^{ij} = g^{i\mu} g^{jk} T_{\mu k} \\ T_k^i = g_{kj} T^{ij} & T_j^k = g^{ki} T_{ij} \\ T_i^j = g_{i\mu} g^{j\nu} T_\nu^\mu & \end{array} \right. \quad (5.2.25)$$

第6話 曲線座標とテンソル

6.1 曲線座標

- K氏：直交曲線座標系というのは具体的には円柱座標や極座標，楕円柱座標などのことだ．3次元空間の1点は直交直線座標系で (x_1, x_2, x_3) と表すことができ，また，曲線座標系では同じ点を (u^1, u^2, u^3) で表すことができる．早い話，お馴染みの極座標を例に挙げれば分かりやすい．



そして， $P(x_1, x_2, x_3) \rightarrow (u^1, u^2, u^3)$ の対応が1対1であるための必要十分条件は関数行列式（ヤコビアン）がゼロでないことだった．

$$\det \left(\frac{\partial u^i}{\partial x_\alpha} \right) \equiv \frac{\partial(u^1, u^2, u^3)}{\partial(x_1, x_2, x_3)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial x_1} & \frac{\partial u^1}{\partial x_2} & \frac{\partial u^1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u^2}{\partial x_1} & \frac{\partial u^2}{\partial x_2} & \frac{\partial u^2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u^3}{\partial x_1} & \frac{\partial u^3}{\partial x_2} & \frac{\partial u^3}{\partial x_3} \end{vmatrix} \neq 0 \quad (6.1.1)$$

このとき，直交座標 $P(x_1, x_2, x_3)$ は (u^1, u^2, u^3) の関数として

$$x_1 = x_1(u^1, u^2, u^3), \quad x_2 = x_2(u^1, u^2, u^3), \quad x_3 = x_3(u^1, u^2, u^3) \quad (6.1.2)$$

と表すことができる．逆に， $P(u^1, u^2, u^3) \rightarrow (x_1, x_2, x_3)$ の対応が1対1であるための必要十分条件は

$$J = \det \left(\frac{\partial x_\alpha}{\partial u^i} \right) \equiv \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(u^1, u^2, u^3)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u^1} & \frac{\partial x_2}{\partial u^1} & \frac{\partial x_3}{\partial u^1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial u^2} & \frac{\partial x_2}{\partial u^2} & \frac{\partial x_3}{\partial u^2} \\ \frac{\partial x_1}{\partial u^3} & \frac{\partial x_2}{\partial u^3} & \frac{\partial x_3}{\partial u^3} \end{vmatrix} \neq 0 \quad (6.1.3)$$

で、このとき $P(u^1, u^2, u^3)$ は直交座標 (x_1, x_2, x_3) の関数として

$$u^1 = u^1(x_1, x_2, x_3) \quad u^2 = u^2(x_1, x_2, x_3), \quad u^3 = u^3(x_1, x_2, x_3) \quad (6.1.4)$$

と表すことができる。

- エミリー：関数行列式は多重積分の場合にでてくるわね．例えば

$$\iiint f(x, y, z) dx dy dz = \iiint f(x(r, \theta, \phi), y(r, \theta, \phi), z(r, \theta, \phi)) |J| dr d\theta d\phi \quad (6.1.5)$$

$|J|$ は関数行列式で

$$|J| = \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(r, \theta, \phi)} = r^2 \sin \theta \quad (6.1.6)$$

だった。

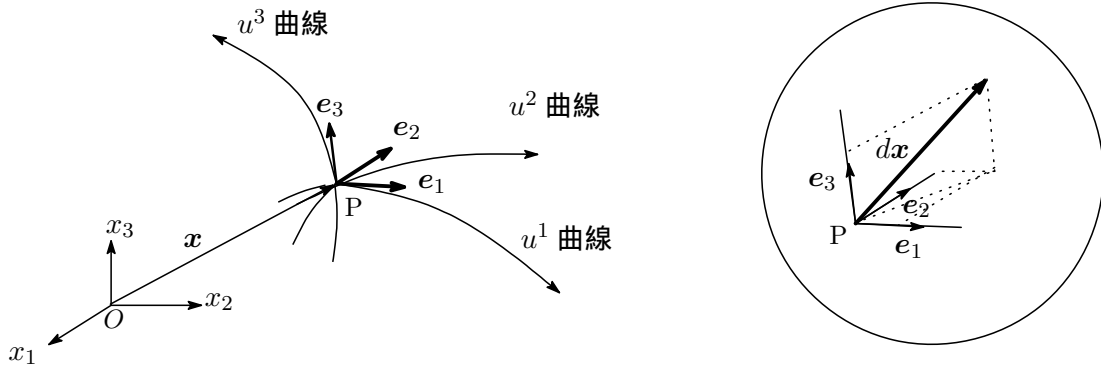
- K氏：そうだね．極座標の場合， $r > 0, \theta \neq 0, \pi$ でないと $|J| = 0$ となるので，極座標は空間から x_3 軸を除いた領域で定義されることになる．というのは原点 $r = 0$ では θ と ϕ が定まらないし， x_3 軸上の点では ϕ が一意的に定まらないという訳だね．

6.1.1 自然基底

- K氏：曲線座標のイメージが大体つかめたと思うので，この座標系における基底を決めていこう．曲線座標なので基底は固定したものではなく位置によって変化する．空間のある1点Pの位置ベクトルを $\mathbf{x}(x_1, x_2, x_3)$ とすると

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^1} = \left(\frac{\partial x_1}{\partial u^1}, \frac{\partial x_2}{\partial u^1}, \frac{\partial x_3}{\partial u^1} \right), \quad \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^2} = \left(\frac{\partial x_1}{\partial u^2}, \frac{\partial x_2}{\partial u^2}, \frac{\partial x_3}{\partial u^2} \right), \quad \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^3} = \left(\frac{\partial x_1}{\partial u^3}, \frac{\partial x_2}{\partial u^3}, \frac{\partial x_3}{\partial u^3} \right) \quad (6.1.7)$$

これらの量はP点の u^1, u^2, u^3 座標をそれぞれ別個に動かした場合の，それぞれの方向への単位移動距離に対する1次独立なベクトルだ．図中の u^1, u^2, u^3 曲線というのは各曲線座標軸に平行な無数の曲線の1つと考えればいい。



(6.1.7) を点Pにおける自然基底 e_i と定義しよう．自然基底は自然標構とも呼ばれる． e_i を列ベクトルで表すと

$$e_1 \equiv \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^1} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u^1} \\ \frac{\partial x_2}{\partial u^1} \\ \frac{\partial x_3}{\partial u^1} \end{pmatrix}, \quad e_2 \equiv \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^2} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u^2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial u^2} \\ \frac{\partial x_3}{\partial u^2} \end{pmatrix}, \quad e_3 \equiv \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^3} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u^3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial u^3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial u^3} \end{pmatrix} \quad (6.1.8)$$

いま，自然基底は互いに直交しているとは限らないとしておく．自然基底を使うと

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial u^1} du^1 + \frac{\partial x}{\partial u^2} du^2 + \frac{\partial x}{\partial u^3} du^3 \\ &= du^1 e_1 + du^2 e_2 + du^3 e_3 \\ &= du^i e_i \end{aligned} \tag{6.1.9}$$

と表すことができる．ちなみに極座標（直交曲線座標）での自然基底は

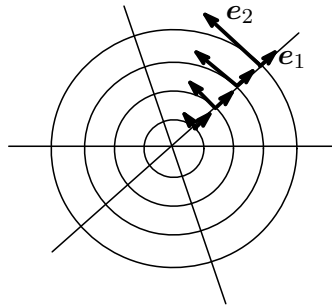
$$e_1 = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} r \cos \theta \cos \phi \\ r \cos \theta \sin \phi \\ -r \sin \theta \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} -r \sin \theta \sin \phi \\ r \sin \theta \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} \tag{6.1.10}$$

となる．

- エミリー：極座標での自然基底は $u^1 = r, u^2 = \theta, u^3 = \phi$ として

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial u^1} &= \sin \theta \cos \phi, & \frac{\partial x_2}{\partial u^1} &= \sin \theta \sin \phi, & \frac{\partial x_3}{\partial u^1} &= \cos \theta \\ \frac{\partial x_1}{\partial u^2} &= r \cos \theta \cos \phi, & \frac{\partial x_2}{\partial u^2} &= r \cos \theta \sin \phi, & \frac{\partial x_3}{\partial u^2} &= -r \sin \theta \\ \frac{\partial x_1}{\partial u^3} &= -r \sin \theta \sin \phi, & \frac{\partial x_2}{\partial u^3} &= r \sin \theta \cos \phi, & \frac{\partial x_3}{\partial u^3} &= 0 \end{aligned}$$

で確かにそうなるわね．各基底ベクトルの長さは $|e_1| = 1, |e_2| = r, |e_3| = r |\sin \theta|$ で，空間の場所によって変化している．2次元極座標の場合は次の図のようになるわね．



- K氏：そうだね，基底ベクトルの長さはその座標軸のスケール単位だった．

6.2 ベクトル場・テンソル場・スカラー場

6.2.1 ベクトル場

- K氏：自然基底が決まったので空間に分布するベクトルを捉えることができる．ベクトル場を v とすると

$$v = v^1 e_1 + v^2 e_2 + v^3 e_3 \tag{6.2.1}$$

としたとき，ベクトル成分 (v^1, v^2, v^3) を曲線座標系 (u^1, u^2, u^3) に関する反変成分という．また，

$$v_1 = v \cdot e_1, \quad v_2 = v \cdot e_2, \quad v_3 = v \cdot e_3 \tag{6.2.2}$$

をベクトル場 v の共変成分という．この定義は (5.1.6) でもやったね．

- エミリー：そうね．この反変成分，共変成分はそれぞれの座標変換則に従うということをハッキリさせておく必要があるわね．
- K氏：うん，そうだね．曲線座標 (u^1, u^2, u^3) と (u'^1, u'^2, u'^3) の間の関係を

$$u'^1 = u'^1(u^1, u^2, u^3), \quad u'^2 = u'^2(u^1, u^2, u^3) \quad u'^3 = u'^3(u^1, u^2, u^3) \quad (6.2.3)$$

としよう．そうすると合成関数の微分法により

$$\frac{\partial x_i}{\partial u'^j} = \frac{\partial u^k}{\partial u'^j} \frac{\partial x_i}{\partial u^k} \quad (6.2.4)$$

となる．曲線座標 (u^i) と (u'^i) の自然基底をそれぞれ e_i, e'_i とすると

$$e_i = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u^i} \\ \frac{\partial x_2}{\partial u^i} \\ \frac{\partial x_3}{\partial u^i} \end{pmatrix}, \quad e'_i = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u'^i} \\ \frac{\partial x_2}{\partial u'^i} \\ \frac{\partial x_3}{\partial u'^i} \end{pmatrix} \quad (6.2.5)$$

なので，(6.2.4) を使えば，自然基底の座標変換式として

$$e'_i = \frac{\partial u^k}{\partial u'^i} e_k = a^k_i e_k \quad \left(a^k_i = \frac{\partial u^k}{\partial u'^i} \right) \quad (6.2.6)$$

を得る．あるいは逆に

$$e_k = \frac{\partial u'^i}{\partial u^k} e'_i = b^i_k e'_i \quad \left(b^i_k = \frac{\partial u'^i}{\partial u^k} \right) \quad (6.2.7)$$

を得る． b^i_k は a^k_i の逆行列で次式を満たす．

$$a^k_i b^i_j = \delta^k_j, \quad b^i_k a^k_j = \delta^i_j \quad (6.2.8)$$

さて，ベクトル v の曲線座標 u'^i のに関する成分を v'^i とすると

$$v = v'^1 e'_1 + v'^2 e'_2 + v'^3 e'_3 = v'^i e'_i \quad (6.2.9)$$

と表せるね．(6.2.1) に (6.2.7) を入れると

$$v = b^i_k v'^k e'_i \quad (6.2.10)$$

を得るが，これと (6.2.9) を比較すれば

$$v'^i = b^i_k v'^k \quad (6.2.11)$$

で， v^i は座標変換に際して反変ベクトル成分として変換を受ける．また，ベクトル成分 v_i

$$v'_i = v \cdot e'_i = a^k_i v \cdot e_k = a^k_i v_k \quad (6.2.12)$$

と座標変換する．これは共変成分の変換則だ．

- エミリー：ナルホド，これで $(v^1, v^2, v^3), (v_1, v_2, v_3)$ が曲線座標 (u^1, u^2, u^3) に関する反変成分，共変成分であるということがハッキリしたわ．

6.2.2 テンソル場

- K氏：2階テンソル場 T についてもいままでと同様に混合成分，共変成分，反変成分などが定義さて，それぞれ座標変換で次のように変換される．

$$\begin{cases} \cdot \text{混合成分} & : T'^j_i = b^j_\nu a^\mu_i T^\nu_\mu \\ \cdot \text{共変成分} & : T'_{ij} = a^\mu_i a^\nu_j T_{\mu\nu} \\ \cdot \text{反変成分} & : T'^{ij} = b^i_\mu b^j_\nu T^{\mu\nu} \end{cases} \quad (6.2.13)$$

ただし，変換係数は (6.2.6)，(6.2.7) だね．

- エミリー：曲線座標も P 点近傍では既に学習した直線斜交座標と見做せるので，斜交座標の議論がそのまま適用できるというわけね．
- K氏：うん，ただベクトル場やテンソル場の成分が一般に曲線座標の関数になるということが曲線座標の特長だね．

6.2.3 スカラー場

- K氏：スカラー場を $\varphi(u^i)$ とすると，これは座標変換しても変わらない量だから

$$\varphi'(u'^i) = \varphi(u^i) \quad (6.2.14)$$

この両辺を u'^i で偏微分すると

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial u'^i} = \frac{\partial u^j}{\partial u'^i} \frac{\partial \varphi}{\partial u^j} = a^j_i \frac{\partial \varphi}{\partial u^j} \quad (v_i = a^j_i v_j) \quad (6.2.15)$$

これはベクトルの共変成分の変換則だね．つまり， $\frac{\partial \varphi}{\partial u^j} (\equiv v_j)$ は共変ベクトル場を形成することだね．

- エミリー：スカラー場の勾配はベクトル場になったわね． $v_j = \frac{\partial \varphi}{\partial u^j}$ はベクトルの共変成分ね．そうすると反変成分は

$$v^i = g^{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial u^j} \quad (6.2.16)$$

となるのね．

6.3 計量テンソル

- K氏：計量テンソルは既に何度も登場したが，ここでもまた再登場させよう．近接した2点間の距離を ds とすると，その2乗は (6.1.9) より

$$ds^2 = d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} = du^i \mathbf{e}_i \cdot du^j \mathbf{e}_j = g_{ij} du^i du^j \quad (6.3.1)$$

となる． ds^2 を曲線座標系 (u^1, u^2, u^3) の線素という． g_{ij} は今まで何度も登場したが，曲線座標系では次のようになる．

$$g_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \frac{\partial x_k}{\partial u^i} \frac{\partial x_k}{\partial u^j}, \quad g_{ij} = g_{ji} \quad (k = 1, 2, 3) \quad (6.3.2)$$

g_{ij} は

$$g'_{ij} = \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}'_j = a^k_i \mathbf{e}_k \cdot a^\ell_j \mathbf{e}_\ell = a^k_i a^\ell_j \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_\ell = a^k_i a^\ell_j g_{k\ell} \quad (6.3.3)$$

と変換される計量テンソルの共変成分だね．反変成分は

$$g^{ij'} = b^i_k b^{j'}_\ell g^{k\ell} \quad (6.3.4)$$

で

$$g_{ik} g^{jk} = \delta_i^j \quad (6.3.5)$$

が成り立つ．

最後に g_{ij} の行列式を考えよう．2つの行列の積の行列式は各行列式の積に等しいので

$$|g_{ij}| = \left| \frac{\partial x_k}{\partial u^i} \frac{\partial x_k}{\partial u^j} \right| = \left| \frac{\partial x_k}{\partial u^i} \right| \left| \frac{\partial x_k}{\partial u^j} \right| = J^2 \quad (6.3.6)$$

が成り立つ． J はヤコビアンだ． $g = |d_{ij}|$ とおけば

$$J = \sqrt{g} \quad (6.3.7)$$

が得られる．

6.4 共変微分

6.4.1 クリストッフエルの記号

- K氏：自然基底 e_i を e_j の方向へわずかに動かす，つまり方向微分だね．(4.2.17) より

$$\nabla_{e_j} e_i = \frac{\partial e_i}{\partial u^j} \quad (6.4.1)$$

これは新しいベクトルになるので自然基底の1次結合で表して

$$\frac{\partial e_i}{\partial u^j} = \Gamma^1_{ji} e_1 + \Gamma^2_{ji} e_2 + \Gamma^3_{ji} e_3 = \Gamma^k_{ji} e_k \quad (6.4.2)$$

とおこう．これは e_i が u^j の方向に微小変化したとき， e_1 の方向に Γ^1_{ij} ， e_2 の方向に Γ^2_{ij} ， e_3 の方向に Γ^3_{ij} という成分を持つベクトルになるということだね． Γ^k_{ji} をクリストッフエルの記号と呼び，

$$\Gamma^k_{ji} = \left\{ \begin{matrix} k \\ ji \end{matrix} \right\} \quad (6.4.3)$$

とも表す．クリストッフエルの記号は一見テンソルのように見えるが，あとで明らかになるようにテンソルではない．以下，この記号の中身を求めていこう． e_i の直交座標系 (x_1, x_2, x_3) に関する成分は (6.1.8) で与えられているので， $\frac{\partial e_i}{\partial u^j}$ の直交座標系に関する成分は

$$\nabla_{e_j} e_i = \frac{\partial e_i}{\partial u^j} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 x_1}{\partial u^j \partial u^i} \\ \frac{\partial^2 x_2}{\partial u^j \partial u^i} \\ \frac{\partial^2 x_3}{\partial u^j \partial u^i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 x_1}{\partial u^i \partial u^j} \\ \frac{\partial^2 x_2}{\partial u^i \partial u^j} \\ \frac{\partial^2 x_3}{\partial u^i \partial u^j} \end{pmatrix} = \frac{\partial e_j}{\partial u^i} = \nabla_{e_i} e_j \quad (6.4.4)$$

となるので,

$$\Gamma_{ji}^k = \Gamma_{ij}^k \quad (6.4.5)$$

であることが分かる．次に, $g_{ij} = e_i \cdot e_j$ を微分すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^\ell} &= \frac{\partial e_i}{\partial u^\ell} \cdot e_j + e_i \cdot \frac{\partial e_j}{\partial u^\ell} \\ &= (\Gamma_{\ell i}^k e_k) \cdot e_j + e_i \cdot (\Gamma_{\ell j}^k e_k) \\ &= \Gamma_{\ell i}^k g_{kj} + \Gamma_{\ell j}^k g_{ki} = A+B \end{aligned} \quad (6.4.6)$$

ここで添え字を $i \rightarrow j \rightarrow \ell \rightarrow i$ と順に変えたものを作ると

$$\frac{\partial g_{j\ell}}{\partial u^i} = \Gamma_{ij}^k g_{k\ell} + \Gamma_{i\ell}^k g_{kj} = C+A \quad (6.4.7)$$

$$\frac{\partial g_{\ell i}}{\partial u^j} = \Gamma_{j\ell}^k g_{ki} + \Gamma_{ji}^k g_{k\ell} = B+C \quad (6.4.8)$$

となる．そこで (6.4.6)+(6.4.7)-(6.4.8) を計算すると

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^\ell} + \frac{\partial g_{j\ell}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{\ell i}}{\partial u^j} = 2\Gamma_{\ell i}^k g_{kj} \quad (6.4.9)$$

両辺を 2 で割って, 両辺に g^{jh} を掛けて $j = 1, 2, 3$ について和 (縮約) をとり, $g^{jh} g_{kj} = \delta_k^h$ を利用すれば

$$\Gamma_{\ell i}^h = \frac{1}{2} g^{jh} \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^\ell} + \frac{\partial g_{j\ell}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{\ell i}}{\partial u^j} \right) \quad (6.4.10)$$

が得られる．

詳細は省くが, 双対基底 (反変基底) の位置変化もクリストッフェル記号を使って

$$\nabla_{e_j} e^i = \frac{\partial e^i}{\partial u^j} = -\Gamma_{ji}^k e^k \quad (6.4.11)$$

と求めることができる．

- エミリー：直交座標系や斜交座標系では基底は位置によって変化しなかった, つまり g_{ij} は定数だったので $\Gamma_{\ell i}^h = 0$ ．クリストッフェルの記号は空間の曲がり具合を反映しているのね．
- K氏：うん, クリストッフェルの記号が恒等的に 0 であれば, その曲線座標系は直線直交座標系が斜交座標系のいずれかだということだね．

クリストッフェル記号の座標変換

- K氏：(6.2.6) より

$$e'_i = \frac{\partial u^k}{\partial u'^i} e_k \quad (6.4.12)$$

両辺に $\frac{\partial}{\partial u'^j} = \frac{\partial u^m}{\partial u'^j} \frac{\partial}{\partial u^m}$ を作用させると

$$\frac{\partial e'_i}{\partial u'^j} = \frac{\partial u^m}{\partial u'^j} \frac{\partial}{\partial u^m} \left(\frac{\partial u^k}{\partial u'^i} e_k \right) = \frac{\partial u^m}{\partial u'^j} \frac{\partial u^k}{\partial u'^i} \frac{\partial e_k}{\partial u^m} + \frac{\partial^2 u^k}{\partial u'^j \partial u'^i} e_k \quad (6.4.13)$$

となる。(6.4.2)より

$$\frac{\partial e'_i}{\partial u'^j} = \left\{ \begin{matrix} k \\ ji \end{matrix} \right\}' e'_k = \left\{ \begin{matrix} k \\ ji \end{matrix} \right\}' \frac{\partial u^\ell}{\partial u'^k} e_\ell, \quad \frac{\partial e_i}{\partial u^j} = \left\{ \begin{matrix} r \\ ji \end{matrix} \right\} e_r \quad (6.4.14)$$

これを(6.4.13)に入れると

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{matrix} k \\ ji \end{matrix} \right\}' \frac{\partial u^\ell}{\partial u'^k} e_\ell &= \left(\frac{\partial u^m}{\partial u'^j} \frac{\partial u^k}{\partial u'^i} \left\{ \begin{matrix} \ell \\ mk \end{matrix} \right\} + \frac{\partial^2 u^\ell}{\partial u'^j \partial u'^i} \right) e_\ell \\ \therefore \left\{ \begin{matrix} k \\ ji \end{matrix} \right\}' \frac{\partial u^\ell}{\partial u'^k} &= \frac{\partial u^m}{\partial u'^j} \frac{\partial u^k}{\partial u'^i} \left\{ \begin{matrix} \ell \\ mk \end{matrix} \right\} + \frac{\partial^2 u^\ell}{\partial u'^j \partial u'^i} \end{aligned} \quad (6.4.15)$$

この両辺に $\frac{\partial u'^r}{\partial u^\ell}$ を作用させ, $r = 1, 2, 3$ について和をとり, $\frac{\partial u^\ell}{\partial u'^k} \frac{\partial u'^r}{\partial u^\ell} = \delta_k^r$ を利用すると

$$\left\{ \begin{matrix} r \\ ji \end{matrix} \right\}' = \frac{\partial u'^r}{\partial u^\ell} \left(\frac{\partial u^m}{\partial u'^j} \frac{\partial u^k}{\partial u'^i} \left\{ \begin{matrix} \ell \\ mk \end{matrix} \right\} + \frac{\partial^2 u^\ell}{\partial u'^j \partial u'^i} \right) \quad (6.4.16)$$

クリストッフェル記号の座標変換は右辺第2式に2次の偏導関数を含んでいる. この項は常に0になるとは限らないのでテンソルとして変換しない. つまり, クリストッフェル記号はテンソルではないことになる.

6.4.2 スカラー場の共変微分

- K氏: スカラー場を $\varphi(u^i)$ とすると, これは座標変換しても変わらないので $f'(u'^i) = f(u^i)$ である. この両辺を u'^i について偏微分すれば

$$\frac{\partial f'}{\partial u'^i} = \frac{\partial u^j}{\partial u'^i} \frac{\partial f}{\partial u^j} \quad (6.4.17)$$

$\frac{\partial f}{\partial u^j}$ はベクトルの共変成分なので

$$\nabla_j \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial u^j} \quad (6.4.18)$$

とおこう. 共変成分 $\nabla_j \varphi$ をスカラー場 φ の共変微分係数という. またスカラー場の全微分をとると

$$d\varphi' = d\varphi \quad (6.4.19)$$

で $d\varphi$ はスカラーだ. これを

$$\delta\varphi = d\varphi \quad (6.4.20)$$

において, $\delta\varphi$ をスカラー場 φ の共変微分という. $\delta\varphi$ と $\nabla_j \varphi$ の間には

$$\delta\varphi = du^i \nabla_i \varphi \quad (6.4.21)$$

が成立する.

- エミリー: 共変微分といっても結局, 全微分と同じじゃないの? 全微分と区別する理由が分からないわ.
- K氏: スカラー場では確かに共変微分と全微分との違いは明確じゃないというか, 全微分と同じ結果を与えるね. この違いはベクトル場に行けばハッキリしてくるので, 次にベクトル場の共変微分の話しよう.

6.4.3 ベクトル場の共変微分

反変ベクトル成分の共変微分

- K氏：ベクトルの反変成分 v^i は座標変換で

$$v^i = \frac{\partial u'^i}{\partial u^\ell} v^\ell \quad (6.4.22)$$

と変換される．これから

$$\frac{\partial u^\ell}{\partial u'^i} v^i = v^\ell \quad (6.4.23)$$

両辺を u'^j で微分すると

$$\frac{\partial u^\ell}{\partial u'^i} \frac{\partial v^i}{\partial u'^j} + \frac{\partial^2 u^\ell}{\partial u'^j \partial u'^i} v^i = \frac{\partial u^m}{\partial u'^j} \frac{\partial v^\ell}{\partial u^m} \quad (6.4.24)$$

(6.4.16) より

$$\frac{\partial^2 u^\ell}{\partial u'^j \partial u'^i} = \frac{\partial u^\ell}{\partial u'^r} \left\{ \begin{matrix} r \\ ji \end{matrix} \right\}' - \frac{\partial u^m}{\partial u'^j} \frac{\partial u^k}{\partial u'^i} \left\{ \begin{matrix} \ell \\ mk \end{matrix} \right\} \quad (6.4.25)$$

を上式に入れると

$$\frac{\partial u^\ell}{\partial u'^r} \frac{\partial v^r}{\partial u'^j} + \frac{\partial u^\ell}{\partial u'^r} \left\{ \begin{matrix} r \\ ji \end{matrix} \right\}' v^i - \frac{\partial u^m}{\partial u'^j} \frac{\partial u^k}{\partial u'^i} \left\{ \begin{matrix} \ell \\ mk \end{matrix} \right\} v^i = \frac{\partial u^m}{\partial u'^j} \frac{\partial v^\ell}{\partial u^m} \quad (6.4.26)$$

となる．ここで後の計算の見通しを良くするために左辺第1式の添え字，これは単なる添え字なので， i を r に書き換えていることに注意．この式を整理して

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^\ell}{\partial u'^r} \left(\frac{\partial v^r}{\partial u'^j} + \left\{ \begin{matrix} r \\ ji \end{matrix} \right\}' v^i \right) &= \frac{\partial u^m}{\partial u'^j} \left(\frac{\partial v^\ell}{\partial u^m} + \frac{\partial u^k}{\partial u'^i} \left\{ \begin{matrix} \ell \\ mk \end{matrix} \right\} v^i \right) \\ &= \frac{\partial u^m}{\partial u'^j} \left(\frac{\partial v^\ell}{\partial u^m} + \left\{ \begin{matrix} \ell \\ mk \end{matrix} \right\} v^k \right) \\ \therefore \frac{\partial v^r}{\partial u'^j} + \left\{ \begin{matrix} r \\ ji \end{matrix} \right\}' v^i &= \frac{\partial u^r}{\partial u^\ell} \frac{\partial u^m}{\partial u'^j} \left(\frac{\partial v^\ell}{\partial u^m} + \left\{ \begin{matrix} \ell \\ mk \end{matrix} \right\} v^k \right) \\ &= b^r_\ell a^m_j \left(\frac{\partial v^\ell}{\partial u^m} + \left\{ \begin{matrix} \ell \\ mk \end{matrix} \right\} v^k \right) \end{aligned} \quad (6.4.27)$$

ただし，

$$b^r_\ell = \frac{\partial u'^r}{\partial u^\ell}, \quad a^m_j = \frac{\partial u^m}{\partial u'^j}$$

ここで

$$\nabla_j v^r = \frac{\partial v^r}{\partial u^j} + \left\{ \begin{matrix} r \\ ji \end{matrix} \right\} v^i = T^r_j \quad (6.4.28)$$

とおくと¹，(6.4.27) は

$$T^{r'}_j = b^r_\ell a^m_j T^\ell_m \quad (6.4.29)$$

となる．この変換式に従うのは2階混合テンソルの成分だった．つまり， $\nabla_j v^r$ は2階混合テンソルの成分であることが分かる．このテンソルをベクトルの反変成分 v^r の共変微分係数という．

¹; の後の記号の微分を含むことを意味して， $T^i_{;j}$ という添え字の付け方も共変微分によく使われる．

そして共変微分係数を求めることを“共変微分する”という。

$\nabla_j v^r$ に du^j を掛け j について縮約したものを

$$\delta v^r = du^j \nabla_j v^r \quad (6.4.30)$$

とおき、これをベクトルの反変成分 v^r の共変微分という。

- エミリー：ベクトル v の全微分は

$$dv = \frac{\partial v}{\partial u^1} du^1 + \frac{\partial v}{\partial u^2} du^2 + \frac{\partial v}{\partial u^3} du^3 = \frac{\partial v}{\partial u^j} du^j$$

なので反変成分 v^r の全微分は

$$dv^r = \frac{\partial v^r}{\partial u^1} du^1 + \frac{\partial v^r}{\partial u^2} du^2 + \frac{\partial v^r}{\partial u^3} du^3 = \frac{\partial v^r}{\partial u^j} du^j = du^j \nabla_j v^r \quad (6.4.31)$$

となるわけだけど、これと (6.4.28) を較べると $\Gamma_{ji}^r v^i$ の分、 $\nabla_j v^r$ の中身が違っているわね。

- K氏：そうなんだ。空間が曲がっていない場合は $\Gamma_{ji}^r = 0$ だったので両者の差はなかったけど、座標軸が曲がっている曲線座標の場合には微小移動に対して座標系自身も変化（自然基底が変化）するので、その変化分も併せて考慮しなければならない。この辺りの事情がテンソル量として表れているんだね。
- エミリー：共変微分というネーミングはどこから来ているのかしら。いまベクトルの反変成分の「共変」微分を学習したわけだけど。
- K氏：これは共変形式の「共変」というところかきてるんだ。物理の方程式が座標変換でその形を変えない（言い方を変えると「共に変わる」）のがもっとも汎用性のある方程式というか、そのような方程式を見つけるべく努力しているわけだね。このような形式を共変形式といっている。ここでやった微分も座標変換前後で $\delta v^r = \delta v^\ell$ となり、形式は変わらない微分となっているだろう。この意味で「共変」微分と呼んでいるんだね。

共変ベクトル成分の共変微分

- K氏：さて、次にベクトルの共変成分の共変微分を調べていこう。ベクトルの共変成分 v_i は座標変換で

$$v'_i = \frac{\partial u^\ell}{\partial u'^i} v_\ell, \quad v_\ell = \frac{\partial u'^i}{\partial u^\ell} v'_i \quad (6.4.32)$$

と変換される。両辺を u'^j で微分すると

$$\frac{\partial v'_i}{\partial u'^j} = \frac{\partial u^\ell}{\partial u'^i} \frac{\partial u^m}{\partial u'^j} \frac{\partial v_\ell}{\partial u^m} + \frac{\partial^2 u^\ell}{\partial u'^i \partial u'^j} v_\ell \quad (6.4.33)$$

これに (6.4.25) を入れると

$$\begin{aligned} \frac{\partial v'_i}{\partial u'^j} &= \frac{\partial u^\ell}{\partial u'^i} \frac{\partial u^m}{\partial u'^j} \frac{\partial v_\ell}{\partial u^m} + \frac{\partial u^\ell}{\partial u'^r} \left\{ \begin{matrix} r \\ ji \end{matrix} \right\}' v_\ell - \frac{\partial u^m}{\partial u'^j} \frac{\partial u^k}{\partial u'^i} \left\{ \begin{matrix} \ell \\ mk \end{matrix} \right\} v_\ell \\ \therefore \frac{\partial v'_i}{\partial u'^j} - \frac{\partial u^\ell}{\partial u'^r} \left\{ \begin{matrix} r \\ ji \end{matrix} \right\}' v_\ell &= \frac{\partial u^\ell}{\partial u'^i} \frac{\partial u^m}{\partial u'^j} \left(\frac{\partial v_\ell}{\partial u^m} - \left\{ \begin{matrix} n \\ ml \end{matrix} \right\} v_n \right) \end{aligned} \quad (6.4.34)$$

ここで

$$\frac{\partial u^\ell}{\partial u'^r} \left\{ \begin{matrix} r \\ ji \end{matrix} \right\}' v_\ell = \frac{\partial u^\ell}{\partial u'^r} \left\{ \begin{matrix} r \\ ji \end{matrix} \right\} \frac{\partial u'^r}{\partial u^\ell} v'_r = \left\{ \begin{matrix} r \\ ji \end{matrix} \right\} v'_r$$

となるので，最終的に

$$\begin{aligned} \frac{\partial v'_i}{\partial u'^j} - \left\{ \begin{matrix} r \\ ji \end{matrix} \right\}' v'_r &= \frac{\partial u^\ell}{\partial u'^i} \frac{\partial u^m}{\partial u'^j} \left(\frac{\partial v_\ell}{\partial u^m} - \left\{ \begin{matrix} n \\ m\ell \end{matrix} \right\} v_n \right) \\ &= a^\ell_i a^m_j \left(\frac{\partial v_\ell}{\partial u^m} - \left\{ \begin{matrix} n \\ m\ell \end{matrix} \right\} v_n \right) \end{aligned} \quad (6.4.35)$$

となる．ここで

$$\nabla_j v_i = \frac{\partial v_i}{\partial u^j} - \left\{ \begin{matrix} r \\ ji \end{matrix} \right\} v_r = T_{ij} \quad (6.4.36)$$

とおけば，

$$T'_{ij} = a^\ell_i a^m_j T_{\ell m} \quad (6.4.37)$$

となり，これは2階テンソルの共変成分の変換式だ．このテンソルをベクトルの共変成分の共変微分係数という．

$$\delta v_i = du^j \nabla_j v_i \quad (6.4.38)$$

をベクトルの共変成分 v_i の共変微分という．

6.4.4 テンソル場の共変微分

2階反変テンソル成分の共変微分

- K氏：2階反変テンソルは座標変換で

$$T'^{\mu\lambda} = \frac{\partial u'^\alpha}{\partial u^\beta} \frac{\partial u'^\lambda}{\partial u^\alpha} T^{\beta\alpha} \quad (6.4.39)$$

と変換された．これを書き換えて

$$\frac{\partial u'^\beta}{\partial u'^\mu} \frac{\partial u^\alpha}{\partial u'^\lambda} T'^{\mu\lambda} = T^{\beta\alpha} \quad (6.4.40)$$

両辺を u^ν で微分すると

$$\frac{\partial u^\beta}{\partial u'^\mu} \frac{\partial u^\alpha}{\partial u'^\lambda} \frac{\partial T'^{\mu\lambda}}{\partial u^\nu} + \frac{\partial^2 u^\beta}{\partial u'^\nu \partial u'^\mu} \frac{\partial u^\alpha}{\partial u'^\lambda} T'^{\mu\lambda} + \frac{\partial u^\beta}{\partial u'^\mu} \frac{\partial^2 u^\alpha}{\partial u'^\nu \partial u'^\lambda} T'^{\mu\lambda} = \frac{\partial u^\gamma}{\partial u'^\nu} \frac{\partial T'^{\beta\alpha}}{\partial u^\gamma} \quad (6.4.41)$$

(6.4.25) の添え字を書き換えて

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u^\beta}{\partial u'^\nu \partial u'^\rho} &= \frac{\partial u^\beta}{\partial u'^\mu} \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \nu\rho \end{matrix} \right\}' - \frac{\partial u^\gamma}{\partial u'^\nu} \frac{\partial u^\omega}{\partial u'^\rho} \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \gamma\omega \end{matrix} \right\} \\ \frac{\partial^2 u^\alpha}{\partial u'^\nu \partial u'^\rho} &= \frac{\partial u^\alpha}{\partial u'^\lambda} \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \nu\rho \end{matrix} \right\}' - \frac{\partial u^\gamma}{\partial u'^\nu} \frac{\partial u^\omega}{\partial u'^\rho} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \gamma\omega \end{matrix} \right\} \end{aligned} \quad (6.4.42)$$

(6.4.41) の左辺第 2 項と第 3 項は

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u^\beta}{\partial u'^{\nu} \partial u'^{\rho}} \frac{\partial u^\alpha}{\partial u'^{\lambda}} T'^{\rho\lambda} &= \frac{\partial u^\beta}{\partial u'^{\mu}} \frac{\partial u^\alpha}{\partial u'^{\lambda}} \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \nu\rho \end{matrix} \right\}' T'^{\rho\lambda} - \frac{\partial u^\gamma}{\partial u'^{\nu}} \frac{\partial u^\omega}{\partial u'^{\rho}} \frac{\partial u^\alpha}{\partial u'^{\lambda}} \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \gamma\omega \end{matrix} \right\} T'^{\rho\lambda} \\ \frac{\partial u^\beta}{\partial u'^{\mu}} \frac{\partial^2 u^\alpha}{\partial u'^{\nu} \partial u'^{\rho}} T'^{\mu\rho} &= \frac{\partial u^\beta}{\partial u'^{\mu}} \frac{\partial u^\alpha}{\partial u'^{\lambda}} \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \nu\rho \end{matrix} \right\}' T'^{\mu\rho} - \frac{\partial u^\gamma}{\partial u'^{\nu}} \frac{\partial u^\omega}{\partial u'^{\rho}} \frac{\partial u^\beta}{\partial u'^{\mu}} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \gamma\omega \end{matrix} \right\} T'^{\mu\rho}\end{aligned}\quad (6.4.43)$$

となる。いま

$$A = \frac{\partial u^\beta}{\partial u'^{\mu}}, \quad B = \frac{\partial u^\alpha}{\partial u'^{\lambda}}, \quad C = \frac{\partial u^r}{\partial u'^{\nu}}, \quad D = \frac{\partial u^\omega}{\partial u'^{\rho}}$$

とおくと (6.4.41) は

$$AB \frac{\partial T'^{\mu\lambda}}{\partial u^\nu} + AB \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \nu\rho \end{matrix} \right\}' T'^{\rho\lambda} - CDB \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \gamma\omega \end{matrix} \right\} T'^{\rho\lambda} + AB \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \nu\rho \end{matrix} \right\}' T'^{\mu\rho} - CD \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \gamma\omega \end{matrix} \right\} T'^{\mu\rho} = C \frac{\partial T'^{\beta\alpha}}{\partial u^r}$$

両辺を AB で割ると

$$\frac{\partial T'^{\mu\lambda}}{\partial u^\nu} + \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \nu\rho \end{matrix} \right\}' T'^{\rho\lambda} - (CD/A) \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \gamma\omega \end{matrix} \right\} T'^{\rho\lambda} + \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \nu\rho \end{matrix} \right\}' T'^{\mu\rho} - (CD/B) \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \gamma\omega \end{matrix} \right\} T'^{\mu\rho} = (C/AB) \frac{\partial T'^{\beta\alpha}}{\partial u^r}$$

整理して

$$\begin{aligned}\frac{\partial T'^{\mu\lambda}}{\partial u^\nu} + \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \nu\rho \end{matrix} \right\}' T'^{\mu\rho} + \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \nu\rho \end{matrix} \right\}' T'^{\rho\lambda} \\ = (CD/A) \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \gamma\omega \end{matrix} \right\} T'^{\rho\lambda} + (CD/B) \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \gamma\omega \end{matrix} \right\} T'^{\mu\rho} + (C/AB) \frac{\partial T'^{\beta\alpha}}{\partial u^r} \\ = \frac{\partial u^\gamma}{\partial u'^{\nu}} \frac{\partial u'^{\mu}}{\partial u^\beta} \frac{\partial u'^{\lambda}}{\partial u^\alpha} \left(\left\{ \begin{matrix} \beta \\ \gamma\omega \end{matrix} \right\} \frac{\partial u^\omega}{\partial u'^{\rho}} \frac{\partial u^\alpha}{\partial u'^{\lambda}} T'^{\rho\lambda} + \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \gamma\omega \end{matrix} \right\} \frac{\partial u^\beta}{\partial u'^{\mu}} \frac{\partial u^\omega}{\partial u'^{\rho}} T'^{\mu\rho} + \frac{\partial T'^{\beta\alpha}}{\partial u^\gamma} \right) \\ = \frac{\partial u^\gamma}{\partial u'^{\nu}} \frac{\partial u'^{\mu}}{\partial u^\beta} \frac{\partial u'^{\lambda}}{\partial u^\alpha} \left(\frac{\partial T'^{\beta\alpha}}{\partial u^\gamma} + \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \gamma\omega \end{matrix} \right\} T'^{\beta\omega} + \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \gamma\omega \end{matrix} \right\} T'^{\omega\alpha} \right)\end{aligned}\quad (6.4.44)$$

したがって

$$\begin{aligned}\frac{\partial T'^{\mu\lambda}}{\partial u^\nu} + \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \nu\rho \end{matrix} \right\}' T'^{\mu\rho} + \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \nu\rho \end{matrix} \right\}' T'^{\rho\lambda} \\ = \frac{\partial u^\gamma}{\partial u'^{\nu}} \frac{\partial u'^{\mu}}{\partial u^\beta} \frac{\partial u'^{\lambda}}{\partial u^\alpha} \left(\frac{\partial T'^{\beta\alpha}}{\partial u^\gamma} + \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \gamma\omega \end{matrix} \right\} T'^{\beta\omega} + \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \gamma\omega \end{matrix} \right\} T'^{\omega\alpha} \right)\end{aligned}\quad (6.4.45)$$

ここで

$$\nabla_\nu T^{\mu\lambda} = \frac{\partial T^{\mu\lambda}}{\partial u^\nu} + \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \nu\rho \end{matrix} \right\} T^{\mu\rho} + \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \nu\rho \end{matrix} \right\} T^{\rho\lambda}\quad (6.4.46)$$

とおくと, (6.4.45) は 2 階反変, 1 階共変混合テンソルの座標変換式になっていることが分かる。このテンソルを $T^{\mu\lambda}$ の共変微分係数という。また,

$$\delta T^{\mu\lambda} = du^\nu \nabla_\nu T^{\mu\lambda}\quad (6.4.47)$$

とおけば, $\delta T^{\mu\lambda}$ は 2 階反変テンソルで

$$\delta T^{\mu\lambda} = dT^{\mu\lambda} + \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \nu\rho \end{matrix} \right\} du^\nu T^{\mu\rho} + \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \nu\rho \end{matrix} \right\} du^\nu T^{\rho\lambda}\quad (6.4.48)$$

これをテンソル $T^{\mu\lambda}$ の共変微分という。

2 階共変テンソル，混合テンソル成分の共変微分

- K 氏：同様にして 2 階共変テンソル $T_{\mu\lambda}$ ，混合テンソル T_{ν}^{λ} の共変微分係数と共変微分は次のようになる。

$$\left\{ \begin{array}{l} \cdot 2 \text{ 階共変テンソル} \quad \nabla_{\nu} T_{\mu\lambda} = \frac{\partial T_{\mu\lambda}}{\partial u^{\nu}} - \left\{ \begin{array}{c} \rho \\ \nu\lambda \end{array} \right\} T_{\mu\rho} - \left\{ \begin{array}{c} \rho \\ \nu\mu \end{array} \right\} T_{\rho\lambda} \\ \delta T_{\mu\lambda} = du^{\nu} \nabla_{\nu} T_{\mu\lambda} = dT_{\mu\lambda} - \left\{ \begin{array}{c} \rho \\ \nu\lambda \end{array} \right\} du^{\nu} T_{\mu\rho} - \left\{ \begin{array}{c} \rho \\ \nu\mu \end{array} \right\} du^{\nu} T_{\rho\lambda} \\ \cdot 2 \text{ 階混合テンソル} \quad \nabla_{\nu} T_{\mu}^{\lambda} = \frac{\partial T_{\mu}^{\lambda}}{\partial u^{\nu}} + \left\{ \begin{array}{c} \lambda \\ \nu\rho \end{array} \right\} T_{\mu}^{\rho} - \left\{ \begin{array}{c} \rho \\ \nu\mu \end{array} \right\} T_{\rho}^{\lambda} \\ \delta T_{\mu}^{\lambda} = du^{\nu} \nabla_{\nu} T_{\mu}^{\lambda} = dT_{\mu}^{\lambda} + \left\{ \begin{array}{c} \lambda \\ \nu\rho \end{array} \right\} du^{\nu} T_{\mu}^{\rho} - \left\{ \begin{array}{c} \rho \\ \nu\mu \end{array} \right\} du^{\nu} T_{\rho}^{\lambda} \end{array} \right. \quad (6.4.49)$$

ここで， $\nabla_{\nu} T_{\mu\lambda}$ は 3 階共変テンソルの成分， $\delta T_{\mu\lambda}$ は 2 階共変テンソルの成分で， $\nabla_{\nu} T_{\mu}^{\lambda}$ は 1 階反変，2 階共変テンソルの成分， δT_{μ}^{λ} は 2 階の混合テンソルの成分である。

高階テンソルの共変微分係数，共変微分も同様に求めていくことができるが，ここでは省略する。詳細が知りたければ適当な微分幾何学のテキストを参照されたし。

- エミリー：ゴタゴタした計算が続いて少し食傷気味になったけど，要するに共変微分するというのは，例えば u^j 方向にわずかに動かしたときの“場”の変化を求めているのね。座標軸自身が曲がっているんで，その曲がりの影響が微分量の中に現われてくるということね。
- K 氏：そうだね。今までの得られた結果を整理しておく次のようになる。 $\partial_j = \partial/\partial u^j$ として

ベクトル場 v を共変微分すると

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{反変成分} \quad \nabla_j v^r = \partial_j v^r + \Gamma_{ji}^r v^i \quad (2 \text{ 階混合テンソルの成分}) \\ \text{共変成分} \quad \nabla_j v_i = \partial_j v_i - \Gamma_{ji}^r v_r \quad (2 \text{ 階共変テンソルの成分}) \end{array} \right. \quad (6.4.50)$$

2 階テンソル場を共変微分すると

$$\left\{ \begin{array}{l} \cdot \text{反変成分} \quad \nabla_{\nu} T^{\mu\lambda} = \partial_{\nu} T^{\mu\lambda} + \Gamma_{\nu\rho}^{\mu} T^{\rho\lambda} + \Gamma_{\nu\rho}^{\lambda} T^{\mu\rho} \quad (2 \text{ 階反変 1 階共変混合テンソル成分}) \\ \cdot \text{共変成分} \quad \nabla_{\nu} T_{\mu\lambda} = \partial_{\nu} T_{\mu\lambda} - \Gamma_{\nu\mu}^{\rho} T_{\rho\lambda} - \Gamma_{\nu\lambda}^{\rho} T_{\mu\rho} \quad (3 \text{ 階共変テンソル成分}) \\ \cdot \text{混合成分} \quad \nabla_{\nu} T_{\mu}^{\lambda} = \partial_{\nu} T_{\mu}^{\lambda} + \Gamma_{\nu\rho}^{\lambda} T_{\mu}^{\rho} - \Gamma_{\nu\mu}^{\rho} T_{\rho}^{\lambda} \quad (1 \text{ 階反変 2 階共変混合テンソル成分}) \end{array} \right. \quad (6.4.51)$$

これらの式を睨んでいるとなにか法則性のようなものが見えてくるだろう。具体的に混合成分 $\nabla_{\nu} T_{\mu}^{\lambda}$ を見ると反変の添え字が 1 個だから (6.4.51) の反変成分の式を参考にすると

$$\nabla_{\nu} T_{\mu}^{\lambda} = \partial_{\nu} T_{\mu}^{\lambda} + \Gamma_{\nu\rho}^{\lambda} T_{\mu}^{\rho}$$

とおける。次に共変成分の添え字が 1 個だから (6.4.51) の共変成分の式を参考にすると，これに続いて $-\Gamma_{\nu\mu}^{\rho} T_{\rho}^{\lambda}$ がくる。その結果，トータル

$$\nabla_{\nu} T_{\mu}^{\lambda} = \partial_{\nu} T_{\mu}^{\lambda} + \Gamma_{\nu\rho}^{\lambda} T_{\mu}^{\rho} - \Gamma_{\nu\mu}^{\rho} T_{\rho}^{\lambda}$$

となるというわけだ。それでは $\nabla_{\nu} T_{\mu\kappa}^{\lambda}$ はどうなるだろうか。

- エミリー：そうね，反変添え字が1個，共変添え字が2個だから，まず反変部分は

$$\nabla_\nu T^\lambda_{\mu\kappa} = \partial_\nu T^\lambda_{\mu\kappa} + \Gamma^\lambda_{\nu\rho} T^\rho_{\mu\kappa}$$

となり，次に2個の共変添え字の部分はこれに続いて $-\Gamma^\rho_{\nu\mu} T^\lambda_{\rho\kappa} - \Gamma^\rho_{\nu\kappa} T^\lambda_{\mu\rho}$ がきて，トータル

$$\nabla_\nu T^\lambda_{\mu\kappa} = \partial_\nu T^\lambda_{\mu\kappa} + \Gamma^\lambda_{\nu\rho} T^\rho_{\mu\kappa} - \Gamma^\rho_{\nu\mu} T^\lambda_{\rho\kappa} - \Gamma^\rho_{\nu\kappa} T^\lambda_{\mu\rho} \quad (6.4.52)$$

となるわ．

- K氏：そうだね．ところで共変微分といっても微分なので普通の関数微分の場合と同じルールが成立することを記しておこう．

$$\left\{ \begin{array}{l} \cdot \text{和} \cdot \text{差} \quad \nabla_\nu (A^\lambda_{\mu\kappa} \pm B^\lambda_{\mu\kappa}) = \nabla_\nu A^\lambda_{\mu\kappa} \pm \nabla_\nu B^\lambda_{\mu\kappa} \\ \quad \delta(A^\lambda_{\mu\kappa} \pm B^\lambda_{\mu\kappa}) = \delta A^\lambda_{\mu\kappa} + \delta B^\lambda_{\mu\kappa} \\ \cdot \text{積} \quad \nabla_\nu (A^\lambda_{\mu\kappa} B^\rho_\sigma) = (\nabla_\nu A^\lambda_{\mu\kappa}) B^\rho_\sigma + A^\lambda_{\mu\kappa} (\nabla_\nu B^\rho_\sigma) \\ \quad \delta(A^\lambda_{\mu\kappa} B^\rho_\sigma) = (\delta A^\lambda_{\mu\kappa}) B^\rho_\sigma + A^\lambda_{\mu\kappa} \delta B^\rho_\sigma \\ \cdot \text{縮約} \quad \nabla_\nu (A^\lambda_{\mu\kappa} B^\rho_\lambda) = (\nabla_\nu A^\lambda_{\mu\kappa}) B^\rho_\lambda + A^\lambda_{\mu\kappa} (\nabla_\nu B^\rho_\lambda) \\ \quad \delta(A^\lambda_{\mu\kappa} B^\rho_\lambda) = (\delta A^\lambda_{\mu\kappa}) B^\rho_\lambda + A^\lambda_{\mu\kappa} (\delta B^\rho_\lambda) \end{array} \right. \quad (6.4.53)$$

6.4.5 計量テンソルの共変微分

- K氏：計量テンソルの共変微分を求めよう．共変成分 g_{ij} を共変微分すると (6.4.51) より

$$\nabla_k g_{ij} = \partial_k g_{ij} - \Gamma^{\rho}_{ki} g_{\rho j} - \Gamma^{\rho}_{kj} g_{i\rho} \quad (6.4.54)$$

これは (6.4.6) より 0 となる．すなわち

$$\nabla_k g_{ij} = 0 \quad (6.4.55)$$

反変成分 g^{ij} の共変微分は

$$g_{ip} g^{jp} = \delta_i^j \quad (6.4.56)$$

を利用する．共変微分すると

$$\nabla_k (g_{ip} g^{jp}) = (\nabla_k g_{ip}) g^{jp} + g_{ip} (\nabla_k g^{jp}) = \nabla_k \delta_i^j \quad (6.4.57)$$

(6.4.51) より

$$\nabla_k \delta_i^j = \partial_k \delta_i^j + \Gamma^j_{k\rho} \delta_i^\rho - \Gamma^\rho_{ki} \delta_\rho^j = \Gamma^j_{k\rho} \delta_i^\rho - \Gamma^\rho_{ki} \delta_\rho^j = \Gamma^j_{ki} - \Gamma^j_{ki} = 0 \quad (6.4.58)$$

したがって

$$g_{ip} (\nabla_k g^{jp}) = 0 \quad (6.4.59)$$

両辺に $g^{\mu p}$ を掛けて p について縮約すると

$$g^{\mu p} g_{ip} (\nabla_k g^{jp}) = \delta_i^\mu \nabla_k g^{jp} = 0, \quad \therefore \nabla_k g^{jp} = 0 \quad (6.4.60)$$

すなわち

$$\nabla_k g^{ij} = 0 \quad (6.4.61)$$

となる．

- エミリー：計量テンソルを共変微分すると0になるということは，計量テンソルは定数ということなの．
- K氏：そうなんだ．このことは2つのベクトルの内積というか，なす角は平行移動によって変化しないし，ベクトルの長さも変わらないということの意味しているんだね．

6.5 発散と回転

6.5.1 発散

- K氏： v^i をベクトルの反変成分とすると，その共変微分係数 $\nabla_j v^i$ はテンソルで，その縮約 $\nabla_i v^i$ は

$$\nabla_i v^i = \nabla \cdot \mathbf{v} = \partial_i v^i + \Gamma^i_{ik} v^k \quad (6.5.1)$$

となる．またクリストッフェルの記号 Γ^i_{ik} は i と j について縮約 ($i, j = 1, 2, 3$ について足し合わす) すると

$$\Gamma^i_{ik} = \frac{1}{2} g^{ji} (\partial_i g_{kj} + \partial_k g_{ji} - \partial_j g_{ik}) = \frac{1}{2} g^{ji} \partial_k g_{ji} \quad (6.5.2)$$

となる．計量テンソル g_{ij} の行列式を

$$g = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix}$$

とにおいて，行列式の成分 g_{ij} の余因子を Δ^{ij} とすると， $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$ なので

$$g^{ij} = \frac{1}{g} \Delta^{ij} \quad \therefore \Delta^{ij} = g g^{ij} \quad (6.5.3)$$

を得る． g を微分して余因子展開すると

$$\begin{aligned} \partial_k g &= \begin{vmatrix} \partial_k g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ \partial_k g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ \partial_k g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} g_{11} & \partial_k g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & \partial_k g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & \partial_k g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & \partial_k g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & \partial_k g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & \partial_k g_{33} \end{vmatrix} \\ &= (\partial_k g_{11} \Delta^{11} + \partial_k g_{21} \Delta^{21} + \partial_k g_{31} \Delta^{31}) + (\partial_k g_{12} \Delta^{12} + \partial_k g_{22} \Delta^{22} + \partial_k g_{32} \Delta^{32}) \\ &\quad + (\partial_k g_{13} \Delta^{13} + \partial_k g_{23} \Delta^{23} + \partial_k g_{33} \Delta^{33}) \\ &= (\partial_k g_{11} \Delta^{11} + \partial_k g_{12} \Delta^{12} + \partial_k g_{13} \Delta^{13}) + (\partial_k g_{21} \Delta^{21} + \partial_k g_{22} \Delta^{22} + \partial_k g_{23} \Delta^{23}) \\ &\quad + (\partial_k g_{31} \Delta^{31} + \partial_k g_{32} \Delta^{32} + \partial_k g_{33} \Delta^{33}) \\ &= \partial_k g_{ij} \Delta^{ij} = g g^{ij} \partial_k g_{ij} \\ \therefore g^{ij} \partial_k g_{ij} &= \frac{1}{g} \partial_k g \end{aligned} \quad (6.5.4)$$

これから

$$\Gamma^i_{ik} = \frac{1}{2} \frac{1}{g} \partial_k g = \partial_k \ln \sqrt{g} = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_k \sqrt{g} \quad (6.5.5)$$

を得る．(6.5.1) は

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{v} &= \partial_i v^i + \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_k \sqrt{g} = \frac{1}{\sqrt{g}} (\sqrt{g} \partial_i v^i + \partial_i \sqrt{g} v^i) = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_i (\sqrt{g} v^i) \\ \therefore \nabla \cdot \mathbf{v} &= \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_i (\sqrt{g} v^i) \end{aligned} \quad (6.5.6)$$

これが曲線座標系でのベクトル場の発散を表す。

勾配 $\nabla\varphi$ の反変成分は (6.2.16) より $v^i = g^{ij}\partial_j\varphi$ で与えられた。この発散を $\Delta\varphi$ あるいは $\nabla^2\varphi$ とおき、 φ のラプラシアンという。ラプラシアンは (6.5.6) より

$$\Delta\varphi = \nabla_i(g^{ij}\partial_j\varphi) = \frac{1}{\sqrt{g}}\partial_i(\sqrt{g}g^{ij}\partial_j\varphi) \quad (6.5.7)$$

となる。

6.5.2 回転

- K氏：ベクトル場 v の共変微分 ∇v の共変成分 $\nabla_j v_i$ は2階共変テンソルだった。このテンソルを使って2階反対称テンソル場 W_{ji} を

$$W_{ji} = \nabla_j v_i - \nabla_i v_j = (\partial_j v_i - \Gamma_{ji}^r v_r) - (\partial_i v_j - \Gamma_{ij}^r v_r) = \partial_j v_i - \partial_i v_j \quad (6.5.8)$$

と定義する。2階反対称テンソルには軸性ベクトルが付随することを以前話したね。つまり、2階反対称テンソルは3個の独立成分しか持っていないということだった。天下りのだけど曲線座標系においても2階反対称共変テンソル場 W_{ji} には軸性ベクトル場 w が付随し。次の反変成分をもつ。

$$w^r = \frac{1}{2\sqrt{g}} \varepsilon_{ijk} W_{jk} \quad \left\{ \begin{array}{l} w^1 = \frac{1}{\sqrt{g}} (\partial_2 v_3 - \partial_3 v_2) \\ w^2 = -\frac{1}{\sqrt{g}} (\partial_1 v_3 - \partial_3 v_1) \\ w^3 = \frac{1}{\sqrt{g}} (\partial_1 v_2 - \partial_2 v_1) \end{array} \right. \quad (6.5.9)$$

w^i はベクトル場 v の回転 $w = \nabla \times v$ の反変成分だ。

- エミリー：回転成分にはレビチビタの記号が消しあって入っていないけど、これはベクトルが1回転して元に戻ってきたとき、座標的に何の変化もないということを意味しているのかしら。
- K氏：そのようなイメージでいいと思うよ。

6.6 曲率テンソル

- K氏：反変ベクトルの共変微分係数は

$$\nabla_j v^r = \frac{\partial v^r}{\partial u^j} + \Gamma_{ji}^r v^i \quad (6.6.1)$$

で2階混合テンソルの成分だった．これをもう一回違う方向に共変微分することで空間の曲がり具合が分かると考えられる．そこで(6.6.1)を u^k について共変微分しよう．これは混合テンソルの共変微分の公式(6.4.51)を使えばよいので

$$\nabla_k \nabla_j v^r = \frac{\partial \nabla_j v^r}{\partial u^k} + \Gamma_{k\rho}^r \nabla_j v^\rho - \Gamma_{kj}^\rho \nabla_\rho v^r \quad (6.6.2)$$

を得る．さらに(6.6.1)を使えば

$$\begin{aligned} \nabla_k \nabla_j v^r &= \frac{\partial}{\partial u^k} \left(\frac{\partial v^r}{\partial u^j} + \Gamma_{ji}^r v^i \right) + \Gamma_{k\rho}^r \left(\frac{\partial v^\rho}{\partial u^j} + \Gamma_{ji}^\rho v^i \right) - \Gamma_{kj}^\rho \nabla_\rho v^r \\ &= \frac{\partial^2 v^r}{\partial u^k \partial u^j} + \frac{\partial \Gamma_{ji}^r}{\partial u^k} v^i + \Gamma_{ji}^r \frac{\partial v^i}{\partial u^k} + \Gamma_{k\rho}^r \frac{\partial v^\rho}{\partial u^j} + \Gamma_{k\rho}^r \Gamma_{ji}^\rho v^i - \Gamma_{kj}^\rho \nabla_\rho v^r \end{aligned} \quad (6.6.3)$$

ここで k と j を入れ替えると

$$\nabla_j \nabla_k v^r = \frac{\partial^2 v^r}{\partial u^j \partial u^k} + \frac{\partial \Gamma_{ki}^r}{\partial u^j} v^i + \Gamma_{ki}^r \frac{\partial v^i}{\partial u^j} + \Gamma_{j\rho}^r \frac{\partial v^\rho}{\partial u^k} + \Gamma_{j\rho}^r \Gamma_{ki}^\rho v^i - \Gamma_{jk}^\rho \nabla_\rho v^r \quad (6.6.4)$$

(6.6.3)–(6.6.4)をとると

$$\nabla_k \nabla_j v^r - \nabla_j \nabla_k v^r = \left(\frac{\partial \Gamma_{ji}^r}{\partial u^k} - \frac{\partial \Gamma_{ki}^r}{\partial u^j} + \Gamma_{k\rho}^r \Gamma_{ji}^\rho - \Gamma_{j\rho}^r \Gamma_{ki}^\rho \right) v^i \quad (6.6.5)$$

となる．

$$R_{kji}{}^r = \frac{\partial \Gamma_{ji}^r}{\partial u^k} - \frac{\partial \Gamma_{ki}^r}{\partial u^j} + \Gamma_{k\rho}^r \Gamma_{ji}^\rho - \Gamma_{j\rho}^r \Gamma_{ki}^\rho \quad (6.6.6)$$

とおくと，

$$\nabla_k \nabla_j v^r - \nabla_j \nabla_k v^r = R_{kji}{}^r v^i \quad (6.6.7)$$

となる． $R_{kji}{}^r$ は反変1階，共変3階のテンソルである．このテンソルを曲率テンソルまたはリーマンの曲率テンソルという．

詳細は略すがベクトルの共変成分に対しても(6.6.8)と同様な関係式が成り立つ．

$$\nabla_k \nabla_j v_r - \nabla_j \nabla_k v_r = -R_{kjr}{}^i v_i \quad (6.6.8)$$

6.7 直交曲線座標

- K氏：曲線座標系 (u^i) の各点で自然基底 e_1, e_2, e_3 が互いに直交しているとき， (u^i) を直交曲線座標系という．極座標とか円柱座標，楕円柱座標等は直交曲線座標の代表的なものだね．計量テンソルは

$$g_{ij} = e_i \cdot e_j = 0 \quad (i \neq j) \quad (6.7.1)$$

となるので，計量テンソルの共変成分の行列は対角行列となり，対角成分は常に正となる．

$$g_{11} = e_1 \cdot e_1 = |e_1|^2 > 0, \quad g_{22} = |e_2|^2, \quad g_{33} = |e_3|^2 \quad (6.7.2)$$

対角成分が 0 でない行列の逆行列は対角行列になるので計量テンソルの反変成分 g^{ij} も対角行列となり, $(g_{ij})(g^{ij}) = I$ より, 対角成分は

$$g^{11} = \frac{1}{g_{11}} > 0, \quad g^{22} = \frac{1}{g_{22}} > 0, \quad g^{33} = \frac{1}{g_{33}} > 0 \quad (6.7.3)$$

となる. 直交曲線座標系では自然基底 e_1, e_2, e_3 の代わりに, 各点に正規直交基底ベクトルを設けて議論を進めるのが一般的だ. g_{11}, g_{22}, g_{33} はそれぞれ自然基底の長さの 2 乗となるので

$$g_{11} = h_1^2, \quad g_{22} = h_2^2, \quad g_{33} = h_3^2 \quad (h_i > 0) \quad (6.7.4)$$

とにおいて, 自然基底をそれぞれの長さで割った

$$\mathbf{a}_1 = \frac{\mathbf{e}_1}{h_1}, \quad \mathbf{a}_2 = \frac{\mathbf{e}_2}{h_2}, \quad \mathbf{a}_3 = \frac{\mathbf{e}_3}{h_3} \quad (6.7.5)$$

を作れば, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ は互いに垂直な単位ベクトルとなり, 空間の各点における正規直交基底とすることができる. ちなみに h_i をスケール因子という. つまり, 自然基底の長さを基準長さとした各座標の目盛り幅のようなものだね.

任意のベクトル \mathbf{v} をこの正規直交基底 \mathbf{a}_i で展開すれば

$$\mathbf{v} = \tilde{v}_1 \mathbf{a}_1 + \tilde{v}_2 \mathbf{a}_2 + \tilde{v}_3 \mathbf{a}_3 \quad (6.7.6)$$

となる. 基底 \mathbf{a}_i は長さが 1 の正規直交基底ベクトルなので, \mathbf{v} 成分 \tilde{v}_i の反変性と共変性の区別はない. 自然基底で展開した場合には

$$\mathbf{v} = v^1 \mathbf{e}_1 + v^2 \mathbf{e}_2 + v^3 \mathbf{e}_3 = v^1 h_1 \mathbf{a}_1 + v^2 h_2 \mathbf{a}_2 + v^3 h_3 \mathbf{a}_3 = \tilde{v}_1 \mathbf{a}_1 + \tilde{v}_2 \mathbf{a}_2 + \tilde{v}_3 \mathbf{a}_3$$

となるので, ベクトル成分 \tilde{v}_i と反変成分の関係は

$$v^1 = \frac{1}{h_1} \tilde{v}_1, \quad v^2 = \frac{1}{h_2} \tilde{v}_2, \quad v^3 = \frac{1}{h_3} \tilde{v}_3 \quad (6.7.7)$$

となる. \mathbf{v} の共変成分 v_i は $v_i = g_{ij} v^j$ で与えられるので

$$v_1 = h_1 \tilde{v}_1, \quad v_2 = h_2 \tilde{v}_2, \quad v_3 = h_3 \tilde{v}_3 \quad (6.7.8)$$

自然基底 e_i の反変基底を e^i とすると

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= v_1 \mathbf{e}^1 + v_2 \mathbf{e}^2 + v_3 \mathbf{e}^3 = \tilde{v}_1 h_1 \mathbf{e}^1 + \tilde{v}_2 h_2 \mathbf{e}^2 + \tilde{v}_3 h_3 \mathbf{e}^3 = \tilde{v}_1 \mathbf{a}_1 + \tilde{v}_2 \mathbf{a}_2 + \tilde{v}_3 \mathbf{a}_3 \\ \therefore \mathbf{e}^1 &= \frac{1}{h_1} \mathbf{a}_1, \quad \mathbf{e}^2 = \frac{1}{h_2} \mathbf{a}_2, \quad \mathbf{e}^3 = \frac{1}{h_3} \mathbf{a}_3 \end{aligned} \quad (6.7.9)$$

となる. 反変基底 e^i は (5.1.28) の定義を満たしていることを確認して欲しい.

- エミリー: 自然基底は互いに直交しているので

$$\mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}_j = \frac{\mathbf{a}_i}{h_i} \cdot (h_j \mathbf{a}_j) = \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j = \frac{1}{h_i h_j} \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_j^i \quad (6.7.10)$$

となって, 反変基底の定義を満たすわ. つまり, 各基底の長さが 1 でない場合, ベクトルの成分としては反変成分と共変成分の 2 種類があるということね. ベクトル \mathbf{v} の反変成分 v^i , 共変成分 v_i と直交基底 \mathbf{a}_i を使う場合の成分 \tilde{v}_i との関係は

$$h_i v^i = \tilde{v}_i = \frac{1}{h_i} v_i \quad (6.7.11)$$

となるわけね．ベクトル \boldsymbol{v} の長さの 2 乗は (6.7.6) より

$$\|\boldsymbol{v}\|^2 = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v} = \tilde{v}_1^2 + \tilde{v}_2^2 + \tilde{v}_3^2 \quad (6.7.12)$$

これはまた反変成分と共変成分の積の和 $v^i v_i$ で与えられたので計算すると．

$$\|\boldsymbol{v}\|^2 = \sqrt{v^1 v_1 + v^2 v_2 + v^3 v_3} = \tilde{v}_1^2 + \tilde{v}_2^2 + \tilde{v}_3^2 \quad (6.7.13)$$

となって同じ結果を与えるわけね．

6.7.1 勾配・発散・回転

- K 氏：直交曲線座標系における勾配を求めてみよう．スカラー場 φ の勾配ベクトル成分は共変ベクトル成分なので

$$\nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial u^i} \boldsymbol{e}^i = \frac{1}{h_1} \frac{\partial\varphi}{\partial u^1} \boldsymbol{a}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial\varphi}{\partial u^2} \boldsymbol{a}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial\varphi}{\partial u^3} \boldsymbol{a}_3 \quad (6.7.14)$$

となる．次に発散は (6.5.6) より

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \boldsymbol{v} &= \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_i (\sqrt{g} v^i) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial(h_1 h_2 h_3 v^1)}{\partial u^1} + \frac{\partial(h_1 h_2 h_3 v^2)}{\partial u^2} + \frac{\partial(h_1 h_2 h_3 v^3)}{\partial u^3} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_i (\sqrt{g} v^i) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial(h_2 h_3 \tilde{v}^1)}{\partial u^1} + \frac{\partial(h_1 h_3 \tilde{v}^2)}{\partial u^2} + \frac{\partial(h_1 h_2 \tilde{v}^3)}{\partial u^3} \right] \end{aligned} \quad (6.7.15)$$

また，ラプラシアンは (6.7.16) より

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_i (\sqrt{g} g^{ij} \partial_j \varphi) = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_i (\sqrt{g} g^{ii} \partial_i \varphi) \\ &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u^1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial\varphi}{\partial u^1} \right) + \left(\frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial\varphi}{\partial u^2} \right) + \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial\varphi}{\partial u^3} \right) \right] \end{aligned} \quad (6.7.16)$$

最後に回転は (6.5.9) より

$$\nabla \times \boldsymbol{v} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \boldsymbol{a}_1 & h_2 \boldsymbol{a}_2 & h_3 \boldsymbol{a}_3 \\ \frac{\partial}{\partial u^1} & \frac{\partial}{\partial u^2} & \frac{\partial}{\partial u^3} \\ h_1 \tilde{v}_1 & h_2 \tilde{v}_2 & h_3 \tilde{v}_3 \end{vmatrix} \quad (6.7.17)$$

となる．具体的な直交曲線座標系におけるこれらの表式は単なる微分計算だけだからやっておいてください．

以上でベクトル談義全 6 話を終了する．お疲れさま～．

- エミリー：大変お疲れ様でした．

関連図書

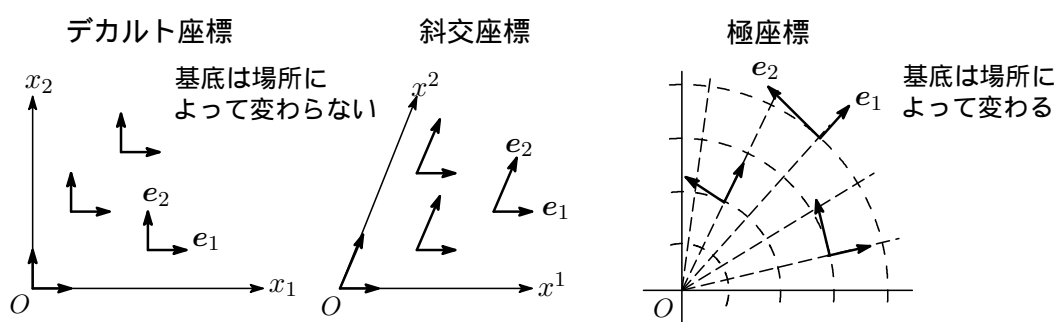
- [1] 石原 繁：テンソル - 科学技術のために - 1991, 裳華房
- [2] 田代嘉宏：テンソル解析 2001, 裳華房
- [3] 安達忠次：ベクトルとテンソル 1976, 培風館
- [4] 安達忠次：微分幾何学概説 1997, 培風館
- [5] 稲葉三男：行列と行列式 1968, 至文堂

Appendix

共変微分の補足に加え，測地線のお話，曲率テンソルの物理的意味などを付録として追加しました．付録を纏めるにあたり須藤靖・著「一般相対論入門」(日本評論社)などを参考にしました．

A.1 共変微分について

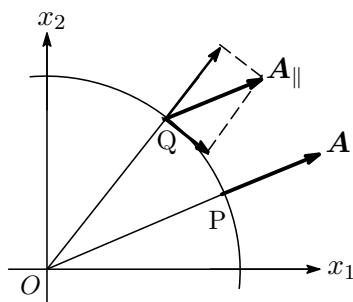
- K氏: §6.4で共変微分の話をしたけど，曲線座標に慣れ親しんでいく上で大切なポイントになるのでもう一度取りあげることにした．さて，下図に見るようにデカルト座標(直交直線座標)や斜交座標における基底は座標位置によって変化しなかったけど，曲線座標における自然基底は位置によって変化した．このことが曲線座標の曲線座標たる所以だが．



- エミリー: つまり，デカルト座標や斜交座標などの直線座標系では計量テンソルは定数になるけど，座標軸が曲がっているような曲線座標系では計量テンソルは位置によって異なる値をとる，つまり曲線座標の関数になるということね．
- K氏: そういうことだね．

A.1.1 ベクトルの平行移動

- K氏: ベクトルの平行移動を考えてみよう．基底はベクトルの骨格をなすもので，直線座標系の場合，基底の変化はないので平行移動前後でベクトルの成分は変わらない．しかし，曲線座標系の場合はどうだろうか．一般的な議論は後でやるとしてまず直感的に把握しやすい2次元極座標を例にとりあげよう．



P点でのベクトルを A とし，点 Q でそれと平行に引いたベクトルを A_{\parallel} としよう．ここで注目

して欲しいのは、ベクトル自身は同じだけど曲線座標の自然基底が場所によって変わるので A と A_{\parallel} の成分は一致しないという点だ。つまり成分にズレが生じるということだね。このズレの大きさは dr や $d\theta$ の大小に比例するし、 A の大きさにも比例する。つまり比例する項をあげると

$$\begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} dr \\ d\theta \end{bmatrix} \longrightarrow A_r dr, A_r d\theta, A_\theta dr, A_\theta d\theta \quad (\text{A.1})$$

の4個。したがって、 A_{\parallel} と A の成分のズレは Γ_{rk}^j を比例係数として

$$\begin{aligned} A_{\parallel r} - A_r &= \Gamma_{rr}^r A_r dr + \Gamma_{r\theta}^r A_r d\theta + \Gamma_{rr}^\theta A_\theta dr + \Gamma_{r\theta}^\theta A_\theta d\theta \\ A_{\parallel \theta} - A_\theta &= \Gamma_{\theta r}^r A_r dr + \Gamma_{\theta\theta}^r A_r d\theta + \Gamma_{\theta r}^\theta A_\theta dr + \Gamma_{\theta\theta}^\theta A_\theta d\theta \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

と表せる。(A.2) をスマートに書くと

$$A_{\parallel i} - A_i = \Gamma_{ik}^j A_j du^k \quad (\text{A.3})$$

となる。 Γ_{rk}^j は今まで何度もでてきたクリストッフェル記号だね。

- エミリー：デカルト座標や斜交座標では $\Gamma_{rk}^j = 0$ になるので、 $A_{\parallel i} = A_i$ でベクトルを平行移動しても成分は変わらない、という当たり前の結果がでてくるわけね。具体的にベクトル成分のズレを求めていくと、

$$e_r = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}, \quad e_\theta = \begin{pmatrix} -r \sin \theta \\ r \cos \theta \end{pmatrix} \quad (\text{A.4})$$

計量テンソルの成分は $g_{ij} = e_i \cdot e_j$ より²

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} g_{rr} & g_{r\theta} \\ g_{\theta r} & g_{\theta\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}, \quad g^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/r^2 \end{pmatrix} \quad (\text{A.5})$$

また、クリストッフェル記号は (6.4.10) より

$$\Gamma_{li}^h = \frac{1}{2} g^{jh} \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^\ell} + \frac{\partial g_{j\ell}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{\ell i}}{\partial u^j} \right) \quad (\text{A.6})$$

$$\begin{cases} \Gamma_{rr}^r = 0 \\ \Gamma_{r\theta}^r = \Gamma_{\theta r}^r = 0 \\ \Gamma_{rr}^\theta = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \Gamma_{\theta\theta}^r = -r \\ \Gamma_{r\theta}^\theta = \Gamma_{\theta r}^\theta = 1/r \\ \Gamma_{\theta\theta}^\theta = 0 \end{cases}$$

となるのでこれを (A.2) に入れ、今の場合 $A_\theta = 0$ なので

$$\begin{aligned} A_{\parallel r} - A_r &= (1/r) A_\theta d\theta = 0 \\ A_{\parallel \theta} - A_\theta &= -r A_r d\theta + (1/r) A_\theta dr = -r A_r d\theta \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

- K氏：さて、上の議論を一般化して整理しておくとなりのようになる。ベクトル v を無限小平行移動すれば、座標軸の曲がりの影響で移動後のベクトル成分は次式のように異なったものになる。

$$\text{共変成分: } v_i(u^k + du^k)_{\parallel} = v_i(u^k) + \Gamma_{ik}^j v_j du^k \quad (\text{A.8})$$

$$\text{反変成分: } v^i(u^k + du^k)_{\parallel} = v^i(u^k) - \Gamma_{jk}^i v^j du^k \quad (\text{A.9})$$

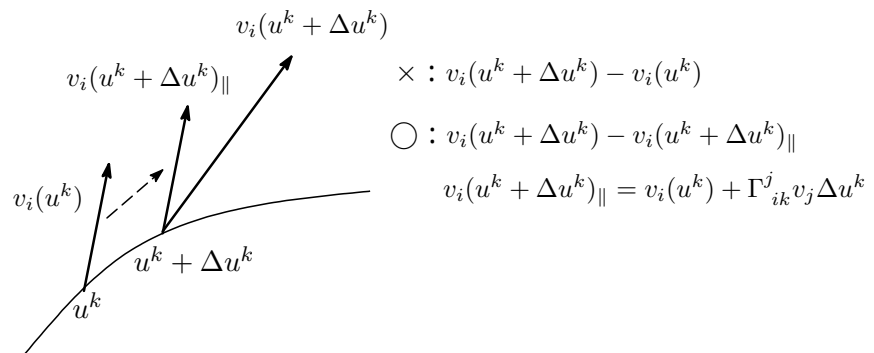
²対角行列の逆行列は対角成分の逆数が成分となる。

A.1.2 共変微分

- K氏：ベクトルの平行移動で言いたかったことは，曲線座標では座標軸が曲がっている影響を受けるためにわずかに平行移動すれば異なるベクトルになってしまうということだった．したがってベクトルの微分を考える場合，この影響を取り除かないとベクトルの純粋な微分量が求まらない．スカラーの場合は座標軸が曲がっていようがどうしていようが関係ないので通常の微分により共変ベクトルが得られた．しかし，ベクトルの場合，通常の微分では座標軸の曲がりの影響も取り込んでしまうので，ベクトル成分の変化を示すテンソルとはならないわけだね．この当たりの話を詳しく見ていこう．曲線座標の場合，ベクトル成分 v_i の座標変数 u^k に関する偏微分係数を

$$\frac{\partial v_i}{\partial u^k} = \lim_{\Delta u^k \rightarrow 0} \frac{v_i(u^k + \Delta u^k) - v_i(u^k)}{\Delta u^k} \quad (\text{A.10})$$

と定義すると， $v_i(u^k + \Delta u^k)$ の中身は純粋にベクトルが変化した量に加えて“座標軸の曲がりによる影響分”も含んでいるため，純粋にベクトルを偏微分した値とはならない．座標軸の曲がりによる影響分を取り除いた偏微分が求めるものとなる．



これは (A.11) の右辺の分子の代わりに，この分子から曲線座標の影響分 $\Gamma^j_{ik} v_j \Delta u^k$ を除いた $v_i(u^k + \Delta u^k) - v_i(u^k) - \Gamma^j_{ik} v_j \Delta u^k$ ものに置き換ええればよい．このように微分することを共変微分と呼んでいるんだね．だから通常の偏微分記号 ∂_μ を使わずに ∇_μ を使って共変微分しますよということを確認しているわけなんだ．それは兎も角，共変微分すると

$$\begin{aligned} \nabla_k v_i &= \lim_{\Delta u^k \rightarrow 0} \frac{v_i(u^k + \Delta u^k) - v_i(u^k + \Delta u^k)_||}{\Delta u^k} \\ &= \lim_{\Delta u^k \rightarrow 0} \frac{v_i(u^k + \Delta u^k) - v_i(u^k) - \Gamma^j_{ik} v_j \Delta u^k}{\Delta u^k} \\ &= \frac{\partial v_i}{\partial u^k} - \Gamma^j_{ik} v_j \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

となつて，(A.11) は (6.4.50) と一致する．共変微分係数は2階テンソルになることは既にいったとおりだ．

上の議論は共変成分に関するものだが，反変成分についてもまったく同様になる．ただこの場合，曲線座標の影響は $-\Gamma^i_{jk} v^j \Delta u^k$ となることに注意すればよい．

$$\nabla_k v^i = \frac{\partial v^i}{\partial u^k} + \Gamma^i_{jk} v^j \quad (\text{A.12})$$

なお， Γ^i_{jk} のことを座標点 u^k における接続係数とか接続と呼んでいる．また， $v = v^i e_i$ なので

$$\nabla_k v = \frac{\partial v^i}{\partial u^k} e_i + v^i \left(\frac{\partial e_i}{\partial u^k} \right) = \frac{\partial v^i}{\partial u^k} e_i + v^i \Gamma^\mu_{ki} e_\mu \quad (\text{A.13})$$

となる．ここで (6.4.2) を使った．右辺第 2 項の添え字を $\mu \rightarrow i, i \rightarrow j$ に書き換えても同じなので

$$\nabla_k v = \frac{\partial v^i}{\partial u^k} e_i + v^j \Gamma_{kj}^i e_i = \left(\frac{\partial v^i}{\partial u^k} + v^j \Gamma_{kj}^i \right) e_i \quad (\text{A.14})$$

と表せる．(A.12) は反変成分の共変微分を表す式だが，この式はベクトルの共変微分を表す式だね．つまり，共変微分はベクトルの成分の偏微分と自然基底（座標の関数）の微分から成っているということがよくわかると思う．

ところで計量テンソルと接続係数の関係だけど，計量テンソルは (A.5) で見たように場所と共に変化したね．言い換えると計量テンソルという量は空間の各点に存在し，それによって空間の曲がり具合が記述されるわけだ．そして接続係数は (A.6) で表されるように計量テンソルが場所と共に変化する度合いによって表されるということだね．

- エミリー：ところで用語のことだけど， $\nabla_k v_i$ とか $\nabla_k v^i$ を共変微分係数といい，共変微分係数をもとめることを共変微分すると表現されていたわね．そして共変微分は

$$\delta v_i = du^k \nabla_k v_i, \quad \delta v^i = du^k \nabla_k v^i \quad (\text{A.15})$$

で表されるといわれていたけど，相対論のテキストなどを見ると共変微分係数のことを共変微分と呼んでいるよね．

- K氏：そうだね．本家数学のテキストでは (A.15) を共変微分と呼んでいる．一方，物理のテキストなどでは共変微分係数のことを共変微分と呼んでいるね．ここは数学のコーナーなので数学のテキストに準じているというわけだ．

A.2 測地線

A.2.1 レビ・チビタの平行性

- K氏：(A.15) を少し変形すると

$$\delta v^i = du^k \left(\frac{\partial v^i}{\partial u^k} + \Gamma_{jk}^i v^j \right) = dv^i + \Gamma_{jk}^i du^k v^j \quad (\text{B.1})$$

が得られる． δv^i はベクトル v の無限小移動 du^k 成分に伴う成分 v^i に伴う純粋な変化を表わしている．したがって，

$$\delta v^i = 0 \quad (\text{B.2})$$

ならば，無限小移動に伴うベクトル成分の変化はない，つまりこれはデカルト座標における平行移動を意味している．これがレビ・チビタの平行性と呼ばれるものだ．

- エミリー：共変微分が 0 になるのは，無限小の平行移動したベクトルが移動先のベクトルと等しいということの意味するのね．これは，無限小移動が曲線的な移動でなく直線的な移動となるような道が必ずあり，そこでは接続係数 $\Gamma_{jk}^i = 0$ となっている．いわば曲がった空間の中の直線というイメージね．
- K氏：そうだね．ただ老婆心ながら一言いっておくと，このことは既にもう分かっていると思うけど，2 点を結ぶ曲線は無数あるけど平行移動できる曲線はその内の一本に限られるということだね．そのような道を測地線³と呼んでいる．さて，測地線の話に入る前に，§6.4.5 の最後のほう

³測地線の話は数学のコーナーの「曲面と曲線（続・余談）」でもやっていますので興味のある方は参照ください．

で少し触れたけど、次の2つのことは平行移動の平行移動たる所以をなすものなので、ここで証明しておこう。

(A) 平行移動でベクトルの大きさは変わらない。

(B) 平行移動される2つのベクトルのなす角は一定に保たれる。

まず (A) の方だが、ベクトルの長さは

$$v^2 = g_{ij}v^i v^j \quad (\text{B.3})$$

で与えられる。(B.2) より無限小平行移動では $d(v)^2 = \delta(v)^2$ なので

$$d(v)^2 = \delta(g_{ij}v^i v^j) = (\delta g_{ij})v^i v^j + g_{ij}\delta(v^i)v^j + g_{ij}v^i \delta(v^j) \quad (\text{B.4})$$

と展開できる。(6.4.55) より $\delta g_{ij} = du^k \nabla_k g_{ij} = 0$ 、また $\delta v^i = 0$ なので

$$d(v)^2 = 0 \quad (\text{B.5})$$

となつて、ベクトルの長さは変化しないことがわかる。

次に (B) の方だが、2つのベクトル u^i, v^i の長さをそれぞれ u, v とすると、そのなす角は内積より

$$\cos \theta = \frac{g_{ij}u^i v^j}{uv} \quad (\text{B.6})$$

で与えられる。ベクトルの長さ u, v は平行移動によって値を変えないので

$$d(\cos \theta) = \delta \cos \theta = \delta \left(\frac{g_{ij}u^i v^j}{uv} \right) = \frac{1}{uv} \delta(g_{ij}u^i v^j) = 0 \quad (\text{B.7})$$

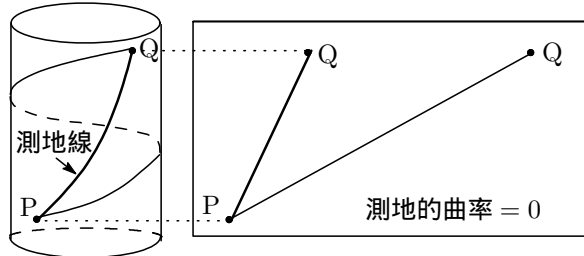
したがって、平行移動により2つのベクトルのなす角は変化しない。

A.2.2 測地線

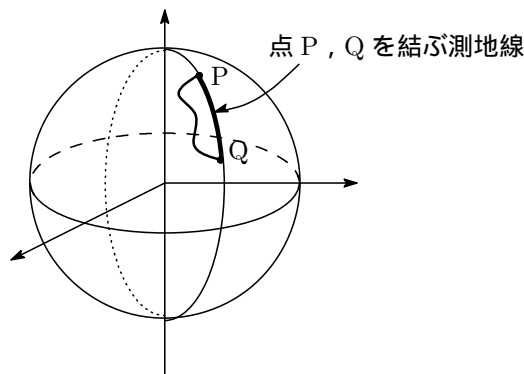
- K氏：測地線というのは次の微分方程式の解であるといつて済ましておけば楽なんだけど、聞いている方はなにか喉にモノが詰まったような感じになって肝心のイメージがなかなか浮かばないと思う。もっともそれはボクだけかも知れないけど。いずれにしても測地線のいろいろな面（詰まるところ同じことを言っているのだが）を眺めるのも意味があると思うので、主なものをピックアップしてみると

- (1) 曲面上の曲線でその上の任意の点における曲線の主法線方向とその点における曲面の法線方向とが一致するような性質を持つ曲線。
- (2) 曲線の接ベクトルが曲線に沿って移動しても平行に保たれるような曲線。
- (3) 測地線に沿って平行移動するベクトルと測地線の接線（接線ベクトル）とのなす角は一定である。
- (4) 曲面上の曲線の中で、その曲線上のどの点でもつねに測地的曲率がゼロであるような曲線。
- (5) 曲面上の曲線で、平面上に展開すると直線になるものを測地線という。
- (6) 曲面上の2点を結ぶ無数の経路の中で、その長さが最短となる経路を測地線という。

いかがだろうか．いろいろな角度からスポットライトを当てると測地線の多様な側面が見えてくるね．ところで，(4)で「測地的曲率」という言葉がでてきたが，これは曲面上の曲線を平面上に展開してできる曲線の曲率のことだ．測地的曲率がゼロである曲線は平面上の直線ということで，それは(5)につながってくる．また，平面上の2点間の距離を最短にするのは直線だから，(5)は(6)につながる．参考までに柱面の測地線を平面に展開すると直線になるという図を書いておいた．



- エミリー：柱面の2点P,Qを結ぶ線は無数に描けるけど，最短距離となるのは図の太線ね．球面の場合の測地線はどうなるのかしら．
- K氏：うん，球面の場合球の中心を通る平面で切ったときの切り口に現れる円が測地線となる．球を切ったときの一番大きい円となるからこれを大円と呼んでいる．赤道は大円の一つだし，北極，南極の両極を通る大円を特に子午線といっている．球面上の2点を結ぶ測地線は大円上の円弧で，このうち大円の劣弧（半円より小さい弧）が最短となるのでこれが球面の測地線となるんだね．詳細は省くけど⁴，球面を平面に展開した場合，大円は直線になるんだ．



- エミリー：測地線の(4)~(6)の側面は大体つかめたわ．(1)~(3)を説明していただけるかしら．
- K氏：うん，(1)と(2)は同じことを言っているのだから(2)を説明しよう．これはレビ・チビタの平行性のことをいっているんだね． t を曲線のパラメータとして曲面上の曲線を $x = x(t)$ で表し， $x(t + \Delta t)$ での曲線の接ベクトルを $p(t + \Delta t)$ としよう．接ベクトル $p(t + \Delta t)$ をその点での曲面の接平面に正射影してできるベクトルは， $x(t)$ での接ベクトル $p(t)$ と Δt の無限小を除いて普通の意味での平行である，つまり接ベクトルは無限小を除いて変化しないということなんだ．測地線のイメージ的な話は以上として，次のステップに進もうか．

⁴詳細は栗田稔「近代数学新書 リーマン幾何」などを参照してください．

- エミリー：そうね．測地線の大体のイメージはつかめたような気がするしお話を進めていただけ．
- K氏：OK．パラメータとして弧長 s をとり，曲線 $u^i = u^i(s)$ を考えよう． du^i/ds は大きさが1の単位接ベクトルになる⁵．これを v^i とすると

$$v^i = \frac{dx^i}{ds} \tag{B.8}$$

で与えられる．したがって，測地線の満足すべき微分方程式は (B.1) より

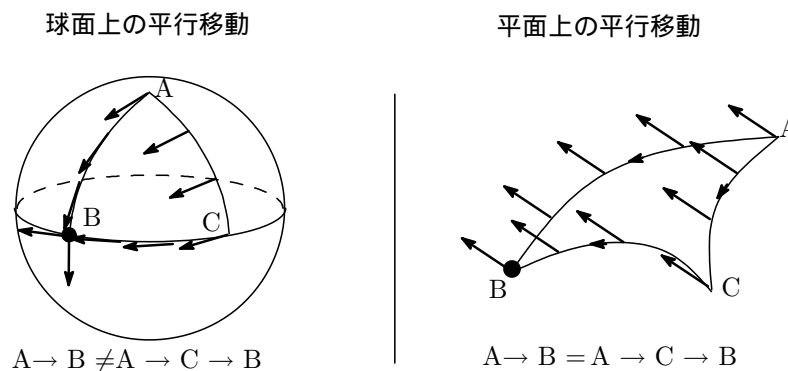
$$d\left(\frac{dx^i}{ds}\right) = \frac{d^2x^i}{ds^2} ds = -\Gamma^i_{jk} dx^k \frac{dx^j}{ds} \tag{B.9}$$

$$\therefore \frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{jk} \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} = 0 \quad \text{or} \quad \frac{dv^i}{ds} = -\Gamma^i_{jk} v^j v^k$$

となる．測地線は2点を結ぶ曲線のうちで弧の長さが最短の曲線ということで変分原理から求めることができるけど，ここでは省略する．大抵の相対論のテキストに載っているので興味があればそちらを参照して欲しい．具体的な曲面の測地線を求める計算例は「続・曲面と曲線」のレポートに載せているので参照ください．

A.3 曲率テンソルの物理的意味

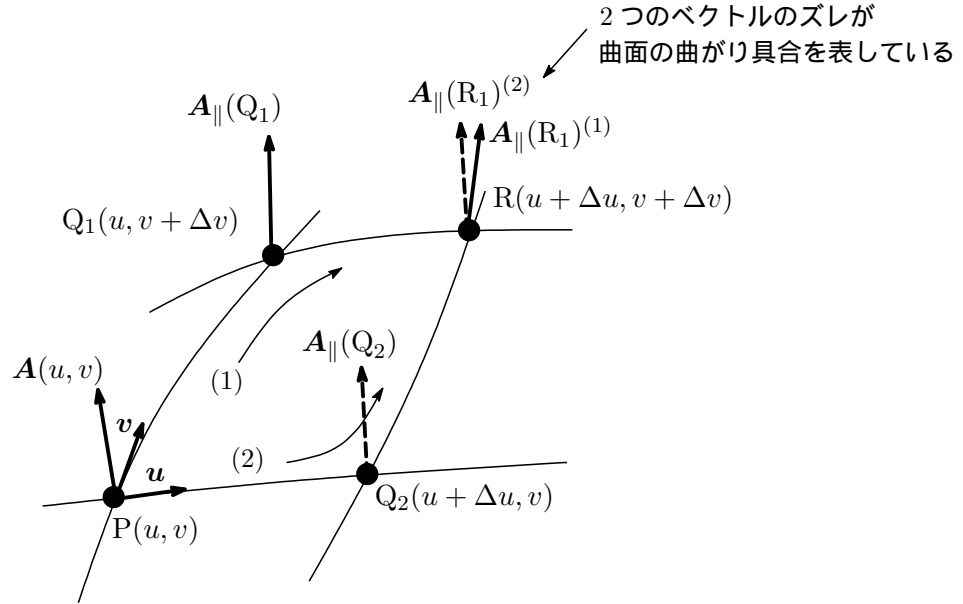
- K氏：曲面上の平行移動についてかなり詳しく説明した．くどいようだけど平坦な平面での平行移動ではないので離れた距離でのベクトルの平行性を保つことはできないね．曲面上の平行移動は無限小離れた2点間でベクトルを平行に保ちつつその長さを変えないように移動するということだ．たとえば球面上のベクトルを考えてみよう．A点を北極とし，B，Cは赤道上の点とする．A点のベクトルを子午線に沿って直前のベクトルにできる限り平行に保ちつつB点まで平行移動したベクトルと，A点からC点を経由してB点に到達したベクトルは異なるね．しかし同じことを平面上の3点で行うと，ベクトルの平行移動の経路にかかわらず同じベクトルになる．このことは球面の曲率が影響しているからだ．



一般的に言うと，曲面上のある1点から別のある1点へベクトルを平行移動したとき，その経路により異なるベクトルになるということで，この違いを比較することで曲面の曲がり具合の指標を引き出すことができる．これが曲率テンソルの物理的な内容だ．

⁵詳しいことは数学のコーナーの「曲線と曲面」のレポートを参照されたい．

- エミリー：なるほど，曲面を外部から眺めて曲がり具合を調べるという発想ではなく，曲面上に張り付いていても曲面の曲がり具合がわかる！ それは曲面上の異なる経路を辿ったベクトルの比較結果が曲面の曲がり具合の情報を含んでいるということね．
- K氏：そうなんだ．そこで以下，2つの異なる経路 (1) : $P \rightarrow Q_1 \rightarrow R$ と経路 (2) : $P \rightarrow Q_2 \rightarrow R$ の2つの経路に沿ってベクトル A を平行移動し，到達点 R でのそれぞれの経路を辿ってきたベクトルの差を計算し，これが曲率テンソルを示すことを見ていこう． u, v は接ベクトルとする．



まず経路 (1) で， $A(P)$ を Q_1 まで平行移動させると (A.9) より

$$A_{\parallel}^{\mu(1)}(Q_1) = A^{\mu}(P) - \Gamma_{\lambda\beta}^{\mu}(P)A^{\lambda}(P)\Delta v^{\beta} \quad (\text{B.1})$$

次に，このベクトルを Q_1 から R へ平行移動すると

$$\begin{aligned} A_{\parallel}^{\mu(1)}(R) &= A_{\parallel}^{\mu(1)}(Q_1) - \Gamma_{\lambda\gamma}^{\mu}(Q_1)A_{\parallel}^{\lambda(1)}(Q_1)\Delta u^{\gamma} \\ &= A^{\mu}(P) - \Gamma_{\lambda\beta}^{\mu}(P)A^{\lambda}(P)\Delta v^{\beta} - \Gamma_{\lambda\gamma}^{\mu}(Q_1)A_{\parallel}^{\lambda(1)}(Q_1)\Delta u^{\gamma} \\ &= A^{\mu}(P) - \Gamma_{\lambda\beta}^{\mu}(P)A^{\lambda}(P)\Delta v^{\beta} - \Gamma_{\lambda\gamma}^{\mu}(Q_1)\left(A^{\lambda}(P) - \Gamma_{\delta\beta}^{\lambda}(P)A^{\delta}(P)\Delta v^{\beta}\right)\Delta u^{\gamma} \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

となる．ただし，

$$\Delta v^{\beta} \equiv \frac{\partial x^{\beta}}{\partial v}\Delta v, \quad \Delta u^{\gamma} \equiv \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial u}\Delta u \quad (\text{B.3})$$

ここで右辺第3項目の $\Gamma_{\lambda\gamma}^{\mu}(Q_1)$ を展開して1次の項までとると

$$\begin{aligned} \Gamma_{\lambda\gamma}^{\mu}(Q_1) &= \Gamma_{\lambda\gamma}^{\mu}(u, v + \Delta v) \\ &\simeq \Gamma_{\lambda\gamma}^{\mu}(u, v) + \Delta v \frac{\partial \Gamma_{\lambda\gamma}^{\mu}(u, v)}{\partial v} = \Gamma_{\lambda\gamma}^{\mu}(u, v) + \Delta v^{\beta} \frac{\partial \Gamma_{\lambda\gamma}^{\mu}(u, v)}{\partial x^{\beta}} \\ &= \Gamma_{\lambda\gamma}^{\mu}(P) + \Delta v^{\beta} \frac{\partial \Gamma_{\lambda\gamma}^{\mu}(P)}{\partial x^{\beta}} \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

これを (B.2) に入れて整理すると、座標位置を示す (P) は省略して

$$\begin{aligned} A_{\parallel}^{\mu(1)}(\mathbf{R}) &\simeq A^{\mu} - \Gamma_{\lambda\beta}^{\mu} A^{\lambda} \Delta v^{\beta} - \left(\Gamma_{\lambda\gamma}^{\mu} + \Delta v^{\beta} \frac{\partial \Gamma_{\lambda\gamma}^{\mu}}{\partial x^{\beta}} \right) \left(A^{\lambda} - \Gamma_{\delta\beta}^{\lambda} A^{\delta} \Delta v^{\beta} \right) \Delta u^{\gamma} \\ &= A^{\mu} - \Gamma_{\lambda\beta}^{\mu} A^{\lambda} (\Delta u^{\beta} + \Delta v^{\beta}) - \left(\frac{\partial \Gamma_{\alpha\gamma}^{\mu}}{\partial x^{\beta}} - \Gamma_{\lambda\gamma}^{\mu} \Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda} \right) A^{\alpha} \Delta v^{\beta} \Delta u^{\gamma} \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

となる。

次に経路 (2) をとると $A_{\parallel}^{\mu(2)}(\mathbf{R})$ は (B.5) で $u \longleftrightarrow v$ の置き換えをすればよいので

$$\begin{aligned} A_{\parallel}^{\mu(2)}(\mathbf{R}) &\simeq A^{\mu} - \Gamma_{\lambda\beta}^{\mu} A^{\lambda} (\Delta v^{\beta} + \Delta u^{\beta}) - \left(\frac{\partial \Gamma_{\alpha\gamma}^{\mu}}{\partial x^{\beta}} - \Gamma_{\lambda\gamma}^{\mu} \Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda} \right) A^{\alpha} \Delta u^{\beta} \Delta v^{\gamma} \\ &= A^{\mu} - \Gamma_{\lambda\beta}^{\mu} A^{\lambda} (\Delta u^{\beta} + \Delta v^{\beta}) - \left(\frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}}{\partial x^{\gamma}} - \Gamma_{\lambda\beta}^{\mu} \Gamma_{\alpha\gamma}^{\lambda} \right) A^{\alpha} \Delta u^{\gamma} \Delta v^{\beta} \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

ここで右辺第3項の添え字 β と γ はいずれも和をとるダミーの添え字なのでそれらの名前を入れ替えた。(B.5) と (B.6) の差をとると

$$\begin{aligned} A_{\parallel}^{\mu(1)}(\mathbf{R}) - A_{\parallel}^{\mu(2)}(\mathbf{R}) &= \left(\frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}}{\partial x^{\gamma}} - \frac{\partial \Gamma_{\alpha\gamma}^{\mu}}{\partial x^{\beta}} + \Gamma_{\lambda\gamma}^{\mu} \Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda} - \Gamma_{\lambda\beta}^{\mu} \Gamma_{\alpha\gamma}^{\lambda} \right) A^{\alpha} \Delta u^{\gamma} \Delta v^{\beta} \\ &= R_{\alpha\gamma\beta}^{\mu} A^{\alpha} \Delta u^{\gamma} \Delta v^{\beta} \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

これから曲率テンソルを

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta\gamma}^{\mu} &= \frac{\partial \Gamma_{\alpha\gamma}^{\mu}}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}}{\partial x^{\gamma}} + \Gamma_{\lambda\beta}^{\mu} \Gamma_{\alpha\gamma}^{\lambda} - \Gamma_{\lambda\gamma}^{\mu} \Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda} \\ &= \partial_{\beta} \Gamma_{\alpha\gamma}^{\mu} - \partial_{\gamma} \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} + \Gamma_{\lambda\beta}^{\mu} \Gamma_{\alpha\gamma}^{\lambda} - \Gamma_{\lambda\gamma}^{\mu} \Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda} \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

と定義する⁶。これは (6.6.6) に一致する。任意のベクトル A に対して (B.7) が常に 0 であれば $R_{\alpha\beta\gamma}^{\mu} = 0$ となる。この場合は平坦な曲面ということだね。曲率テンソルの成分数は3次元の場合は $3^4 = 81$ 個、4次元では $4^4 = 256$ 個、一般に n 次元空間では n^4 個となる。ただし、すべてが独立成分ではない。対称性により独立成分数はもっと少なくなる。

計量テンソルの共変成分を使って曲率テンソルの添え字をすべて下付きにした量 $R_{\mu\alpha\beta\gamma}$ を次式で定義しよう。

$$R_{\mu\alpha\beta\gamma} \equiv g_{\mu\nu} R_{\alpha\beta\gamma}^{\nu} \quad (\text{B.9})$$

これを共変曲率テンソルと呼んでいる。さて、曲率テンソルは次のような対称性を持っている。

(1) 後の添え字 2 つ (β, γ) に対して反対称

$$R_{\alpha\beta\gamma}^{\mu} = -R_{\alpha\gamma\beta}^{\mu}, \quad R_{\mu\alpha\beta\gamma} = -R_{\mu\alpha\gamma\beta} \quad (\text{B.10})$$

(2) 3 つの添え字を循環的に置換したものの和が 0

$$R_{\alpha\beta\gamma}^{\mu} + R_{\beta\gamma\alpha}^{\mu} + R_{\gamma\alpha\beta}^{\mu} = 0, \quad R_{\mu\alpha\beta\gamma} + R_{\mu\beta\gamma\alpha} + R_{\mu\gamma\alpha\beta} = 0 \quad (\text{B.11})$$

(3) 共変曲率テンソルは前の 2 つの添え字 (μ, α) に対して反対称

$$R_{\mu\alpha\beta\gamma} = -R_{\alpha\mu\beta\gamma} \quad (\text{B.12})$$

⁶符号が反対になっているテキストもある。

(4) 共変曲率テンソルは (1) と (3) から前後 2 対の添え字 $(\mu\alpha, \beta\gamma)$ に対して対称

$$\begin{aligned}
 R_{\mu\alpha\beta\gamma} &= R_{\beta\gamma\mu\alpha} \\
 \therefore R_{\alpha\beta\gamma\delta} &= -R_{\beta\alpha\gamma\delta} = R_{\beta\gamma\delta\alpha} + R_{\beta\delta\alpha\gamma} = -R_{\gamma\beta\delta\alpha} - R_{\delta\beta\alpha\gamma} \\
 &= R_{\gamma\delta\alpha\beta} + R_{\gamma\alpha\beta\delta} + R_{\delta\alpha\gamma\beta} + R_{\delta\gamma\beta\alpha} \\
 &= 2R_{\gamma\delta\alpha\beta} + R_{\alpha\gamma\delta\beta} + R_{\alpha\delta\beta\gamma} \\
 &= 2R_{\gamma\delta\alpha\beta} - R_{\alpha\beta\gamma\delta}
 \end{aligned} \tag{B.13}$$

この対称性を利用して n 次元での独立成分の数を求めてみよう。 $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ について $(\alpha, \beta), (\gamma, \delta)$ の対の添え字で同じものがあればその成分はゼロになるので独立成分の数は ${}_n C_2 \times {}_n C_2 = ({}_n C_2)^2$ 個を超えない。(B.11) で (α, β, γ) のどれかが同じ場合, (B.10) か (B.12) のいずれかになるので (B.11) の独立な式の数 $n \times {}_n C_3$ 個となる。したがって求める独立成分の数は上の個数から条件式の数 $n \times {}_n C_3$ を引いて

$$({}_n C_2)^2 - n \times {}_n C_3 = \frac{n^2(n^2 - 1)}{12} \tag{B.14}$$

となる。3 次元の場合 $n = 3$ とおいて 6 個, 4 次元の場合は 20 個となる。

- この独立成分の数は曲率テンソルのもつ対称性からでてくる数で, たとえば曲面に対称性がある場合にはもっと数が減ることになるわね。
- そうだね。ところで上で見た曲率テンソルの関係式に加えてビアンキの恒等式と呼ばれる重要な関係式を紹介してこのセクションを終わろう。これは曲率テンソルの微分に関するものだ。

ビアンキの恒等式

$$\nabla_\gamma R^\mu_{\nu\alpha\beta} + \nabla_\alpha R^\mu_{\nu\beta\gamma} + \nabla_\beta R^\mu_{\nu\gamma\alpha} = 0 \tag{B.15}$$

== ページ数も丁度 100 ページと切りのいい数字になったので, テンソル談義もここらでお開きにします。==

(以上)