

第1話 変分法の基礎理論

1.1 変分法とはなんだ

- コニー：こんにちわ～Kさん。いよいよ冬本番で寒さが厳しくなってきたわね。ところで最近『粘菌による迷路シミュレーション』という記事が目にとまったので少し読んでみたの。この記事を要約するとアメーバ状の単細胞生物である粘菌を迷路の入り口に置き、迷路の出口に餌を置いておくと『迷路の最短ルートを解く』という複雑な作業を粘菌はいとも簡単にやってのける。どのようにやってのけるかという

1. まず、粘菌は迷路のあらゆる通路に広がって餌にたどり着く。
2. 餌への最短経路以外に広がった粘菌部分を収縮させる。
3. 最終的に入り口から出口までの最短ルートの本道に粘菌が通る。

というステップを踏むらしいわね。このことは2000年に理化学研究所・北海道大学の共同研究で世界で初めて発見されたのね。自己組織化現象というらしいのだけど、これって変分法そのものを地で行くようなものね。面白いなあ～っと感動したわけ、と同時に解析力学や量子力学で変分法を少し勉強したけど、あらためて変分法を再学習してみたいなあ～という気になってKさんを尋ねてきたわけなの。

- K氏：そうなんだ。ボクも以前『粘菌の迷路シミュレーション』の新聞記事を読んだことがある。脳や神経系を持たない単細胞生物の粘菌がナント迷路を最短ルートで解くという非常に高度なことをやってのける。生命の底深い力というか、そういうのに感心と感動を覚えるね。粘菌が最短ルートを見つけるやりかたはコニーが言ったように、まさに変分原理を地で行くような感じだ。ところで、粘菌に触発されて(笑い)、変分法を再学習したいということだね。まあ何にでも触発されるのは結構なことだ。以前「変分小考」というレポートをUPしていたけど、読んだかな。それは兎も角として、まず変分法とは？という辺りから話をはじめようか。

- コニー：よろしくお願いします。

1.1.1 変分法とは

- K氏：変分というのは歴史的に見ると定積分の極値問題に端を発しているんだね。未知な関数 $y(x)$ とその導関数 $y'(x)$ を含む式、いまこれを $F(x, y, y')$ としよう。 $y(x)$ は2回連続微分可能と仮定する。変分問題というのは、この関数の積分 $I[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx$ が停留値をとるような関数 $y(x)$ を求める問題のことをいう。停留値というのはいまのところ極値と考えておけばいい。 $I[y(x)]$ は関数 $y(x)$ の関数だね。このような関数の関数を汎関数と呼んでいる。そして変数に相当する関数 $y(x)$ を変関数という。変関数 $y(x)$ をいろいろ変えてやるとそれに伴って $I[y(x)]$ の値も変化する。先ほどの粘菌の話で言えば、 $I[y(x)]$ は出発点から出口までの距離で、 $y(x)$ はそのルートと捉えればいいのかと思う。そしていろいろなルート $y(x)$ の中で $I[y(x)]$ を最短にするルート

$y(x)$ を見つけていこうというのが変分法の問題で、言い換えると汎関数の極大値や極小値（停留値）を求める問題ということだね。

- コニー：関数 $f(x)$ の場合 $x = x_0$ で極値をとるための必要条件は

$$\left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0} = f'(x_0) = 0 \quad (1.1.1)$$

だったけど、これだけでは $x = x_0$ で $f(x)$ が極大値をとるか極小値をとるかは分からない。もう一回微分した $f''(x_0)$ の値の符号で極大か極小かが分かる。 $f''(x_0) = 0$ となればそれは変曲点になるということだったわね。

$$\begin{cases} f''(x_0) > 0 & : x = x_0 \text{ で } f(x) \text{ は極小値をとる} \\ f''(x_0) < 0 & : x = x_0 \text{ で } f(x) \text{ は極大値をとる} \\ f''(x_0) = 0 & : x = x_0 \text{ は変曲点となる} \end{cases} \quad (1.1.2)$$

- K氏：そうだね。関数 $f(x)$ が $x = x_0$ で極値をとるということは $x = x_0$ の近傍で局所的な最大値か最小値をとるということだ。微分の定義は

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = 0 \quad (1.1.3)$$

これは $x = x_0$ の無限小近傍 $x_0 + \Delta x$ では $f(x_0 + \Delta x) = f(x_0)$ となるということの意味しているわけだね。この場合関数は $x = x_0$ で停留値をもつという。 $x = x_0$ の近傍での関数の値は変化しない、つまり値が停留している。そして汎関数 $I[y]$ に停留値を与える関数 $y(x)$ を停留関数という。

- コニー：なるほど。。。ところで、先ほどの汎関数 $I[y]$ が極値というか停留値を持つ必要条件是

$$\frac{dI[y]}{dy} = 0 \quad (1.1.4)$$

として、この式を解いて停留関数 $y(x)$ を求めるというのは駄目かしら？

- K氏：うん、そのように考えたいところだけど、変分法の場合いろいろな関数（比較関数）をあてがって $I[y]$ が停留値をとるような停留関数 $y(x)$ を見つけるということなので、それでは駄目なんだ。関数の極値を求める微分法と汎関数の停留値を求める変分法の違いが次第に明らかになってくるので、今しばらく我慢して頂戴。もっとも関数 F が y' を含まない $F = F(x, y)$ の場合にはコニーが言ったようなステップになる。それは第2話の §2.1 ででてくる。

1.1.2 変分とは

- K氏：さて、ということで具体的に

$$I[y] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx \quad (1.1.5)$$

が停留値を持つような停留関数 $y(x)$ を見つけていくことにしよう。その前に“変分とは何だ”ということをおぼろげに再確認しておこう。関数 $y(x)$ は $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ 両端で固定されており、両端での y 値が次のように与えられていると仮定する。

$$y(x_1) = y_1, \quad y(x_2) = y_2 \quad (1.1.6)$$

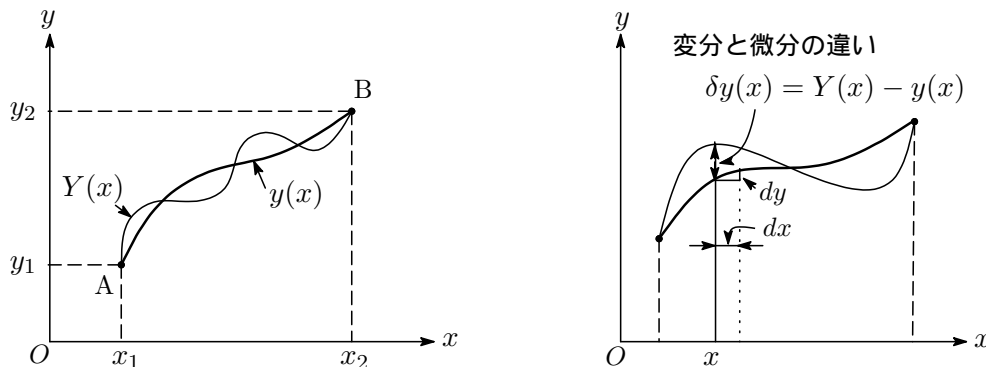
$I[y]$ の値は両端 A、B を結ぶ道筋、つまり比較関数によってその値が変わる。停留関数 $y(x)$ が一つ存在するための必要条件は、この関数からわずかに外れたもう一つの関数 $y = Y(x)$ による $I[Y]$ 値が $I[y] = I[Y]$ となることだ。そこでパラメータ ε を持つ次の新しい関数を考える。

$$Y(x, \varepsilon) = y(x) + \varepsilon\eta(x) \tag{1.1.7}$$

$\eta(x)$ は積分区間の両端で

$$\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0 \tag{1.1.8}$$

を満たす連続微分可能な関数であれば何でもよい。



積分区間内の任意の1点 x での $Y(x, \varepsilon)$ と $y(x)$ の差を関数 $y(x)$ の変分といい δy で表す。

$$\delta y = Y(x, \varepsilon) - y(x) = \varepsilon\eta(x) \tag{1.1.9}$$

パラメータ ε はゼロに近づけられるので変分は無微小の変化を表し、 ε は任意に変化させてよいので δy は関数 $y(x)$ の仮想的変化となる。微分で登場する dy と変分 δy の違いを説明しておく、 dy というのは独立変数 x が dx だけ変化した場合の、関数 $y(x)$ の実際の無微小変化を表すが、 δy は独立変数 x の変化とは関係なく関数 $y(x)$ の無微小の変化を表し、言い換えると x の変化を止めた $y(x)$ の仮想的変化¹ ということ、常に $\delta x = 0$ だ。

このように、変分 δ と微分演算子 d/dx はもともと異なる操作なので交換可能だ。これは次のようなことから分かる。点 x における関数 $Y(x, \varepsilon)$, $y(x)$ のそれぞれの微分の差を $\delta(dy/dx)$ とすると

$$\delta \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{dY}{dx} - \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(Y - y) = \frac{d}{dx}(\delta y) \tag{1.1.10}$$

となるので、 δ と d/dx は作用の順番を変えてもよい。あるいは次のようにも言える。(1.1.9) で見たように、関数 $y(x)$ の変分は新しい関数 $\varepsilon\eta(x)$ を定義する。変分の導関数を求めると

$$\frac{d}{dx} \delta y = \frac{d}{dx} \{Y(x, \varepsilon) - y(x)\} = \frac{d}{dx} \varepsilon\eta(x) = \varepsilon\eta'(x) \tag{1.1.11}$$

となり、一方、関数 $y(x)$ の導関数の変分は

$$\delta \left(\frac{dy}{dx} \right) = Y' - y' = (y'(x) + \varepsilon\eta'(x)) - y'(x) = \varepsilon\eta'(x) \tag{1.1.12}$$

となるので

$$\frac{d}{dx} \delta y = \delta \frac{d}{dx} y \tag{1.1.13}$$

¹変分記号の δ はその仮想的特長を強調するためにラグランジュが導入した。

これから 変分の導関数と導関数の変分は等しい ことが分かる。

変分 δ と微分演算子 d/dx は可換ということに加え、変分と積分演算も可換であることを示しておこう。定積分の変分は、新しい関数 $\mathcal{F}(x)$ を用いたときの定積分と元の関数 $F(x)$ を用いたときの定積分の差によって定義される。

$$\delta \int_a^b F(x) dx = \int_a^b \mathcal{F}(x) dx - \int_a^b F(x) dx \quad (1.1.14)$$

右辺は

$$\int_a^b \mathcal{F}(x) dx - \int_a^b F(x) dx = \int_a^b \{\mathcal{F}(x) - F(x)\} dx$$

となるので

$$\begin{aligned} \delta \int_a^b F(x) dx &= \int_a^b \{\mathcal{F}(x) - F(x)\} dx = \int_a^b \delta F(x) dx \\ \therefore \delta \int_a^b F(x) dx &= \int_a^b \delta F(x) dx \end{aligned} \quad (1.1.15)$$

つまり、定積分の変分は変分の定積分に等しい。以上で“変分”という概念がつかめただろうか。

- コニー：変分 δ は仮想的変化をとる操作ということね。Kさんが解析力学のレポートに書かれていた「映画はフィルムのコマ送りで動いているように見えますね。ところでその中から1コマ取り出して、そこに写っているブツを少し動かしてやる。それが仮想変位というものです。」というフレーズを思い出したわ。

1.1.3 変分計算

- K氏：お待たせしました、変分計算の話に入ろう。汎関数 $I[y]$ の変分を次式で定義する。

$$\delta I[y] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y + \varepsilon\eta, y' + \varepsilon\eta') dx - \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx \quad (1.1.16)$$

y をわずかにずらして $y + \varepsilon\eta$ としたとき、 y' の方も $y' + \varepsilon\eta'$ とずれる、つまり y と y' はそれぞれ独立変数ではない。案外このことを見落としている場合があるので念のため注意しておこう²。

さて、右辺第1項をテーラー展開して整理すると

$$\begin{aligned} \delta I &= \varepsilon \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \eta + \frac{\partial F}{\partial y'} \eta' \right) dx + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \eta^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} \eta \eta' + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \eta'^2 \right) dx + O(\varepsilon^3) \\ &= \varepsilon \delta^1 I + \varepsilon^2 \delta^2 I + O(\varepsilon^3) \end{aligned} \quad (1.1.17)$$

となる。ただし、

$$\delta^1 I \equiv \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \eta + \frac{\partial F}{\partial y'} \eta' \right) dx, \quad \delta^2 I \equiv \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \eta^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} \eta \eta' + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \eta'^2 \right) dx \quad (1.1.18)$$

$\delta^1 I$ を第1変分、 $\delta^2 I$ を第2変分という。第2変分以上の高次の項は $\varepsilon \rightarrow 0$ のとき無視できるので、第1変分だけを考えればよい。したがって、第1変分がゼロ

$$\delta^1 I = 0 \quad (1.1.19)$$

²解析力学では q と \dot{q} を独立変数とみなす!?

ということが積分 I が停留値を持つ必要条件となる。以後第1変分の上付き添え字は省略する。

$$\begin{aligned} \delta I &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y} \eta dx + \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y'} \eta' dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y} \eta dx + \left[\frac{\partial F}{\partial y'} \eta \right]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \eta dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y} \eta dx - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \eta dx = \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right\} \eta dx \end{aligned} \quad (1.1.20)$$

この展開は部分積分と両端固定の境界条件を使った。 $\eta(x)$ は任意の関数なので $\delta I = 0$ が成り立つためには

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0 \quad (1.1.21)$$

でなければならない。(1.1.21) はオイラー・ラグランジュ (以下 EL と記す) の方程式と呼ばれる。

尚、 EL の方程式を導くやり方として別の方法もある。

$$I[Y] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, Y, Y') dx = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y + \varepsilon \eta, y' + \varepsilon \eta') dx, \quad Y = y + \varepsilon \eta \quad (1.1.22)$$

とにおいて、汎関数 $I[Y]$ をパラメータ ε の普通の関数とみなす。そこで $I(\varepsilon)$ を ε で微分したものを 0 とにおいて $I(\varepsilon)$ の極値を求め、 $\varepsilon = 0$ とすれば停留関数 $y(x)$ が満たす方程式がでてくる。

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} I(y + \varepsilon \eta) \right|_{\varepsilon=0} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} F(x, y + \varepsilon \eta, y' + \varepsilon \eta') dx \Big|_{\varepsilon=0} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \eta + \frac{\partial F}{\partial y'} \eta' \right) dx = 0 \quad (1.1.23)$$

最後の式は (1.1.18) ででてきた第1変分と同じ式だね。あとは部分積分と境界条件より求める EL の式がでてくる。

- コニー： $\delta I = 0$ から停留値が求まるけど、この値は最小値か最大値かは分からない。第2変分の符号をチェックする必要はないのかしら。
- K氏：確かに、コニーが指摘したように停留値が最小化どうかの判定は第2変分 $\delta^2 I$ の符号でなされる。 $\delta^2 I \geq 0$ であれば最小値となり³、 $\delta^2 I < 0$ であれば最大値となるわけだ。しかし、大抵は物理的考察により最小値の存在が予想されるので、あえて第2変分の符号までは普通考慮しないんだ。必要があれば第2変分の符号をチェックすればいい。
- コニー：なるほど、現実的な話ね。
- K氏：さて、ここらで第1話はお開きとしよう。話の締めくくりとして、復習をかねて次の問題をやっておこう。

• Ex-1：平面内の2点間の最短距離は直線であることを証明せよ。

• ans-1：線素を ds とすると $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + y'^2} dx$ なので2点間の距離 s は

$$s = \int_{x_1}^{x_2} ds = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2} dx$$

$\delta s = 0$ となる停留関数 $y(x)$ は次の EL 方程式を解いて得られる。 $F = \sqrt{1 + y'^2}$ とおけば

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right) = 0, \quad \therefore \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = c, \quad y' = \pm \frac{c}{\sqrt{1 - c^2}}$$

³ルジャンドルの判定条件と呼ばれる。

y' は定数値をとり、これから直線の式

$$y = Ax + B \quad (A, B: \text{定数})$$

を得る。定数 A 、 B は両端固定の境界条件より決まる。