第2話　オイラー・ラグランジュ方程式

- K氏：第2話に入ったね。ここでは EL 方程式を解いていくに際して、関数 F の形によって効率的に処理できる方法を紹介していく。 EL 方程式を具体的に解いていく場合、(1.1.21) を真正面から取っ組んでもいいのだけど、計算が結構面倒になる場合が多いんだ。関数 $F(x,y,y')$ が具体的にどのような形をしているのか、それに応じた EL 方程式を整理しておくと、のちのち大変重宝する。例えば「最速降下線の問題」は EL 方程式 (1.1.21) を解けばいいのだが、実際やってみると結構面倒な計算になる。このような場合にこのセクションの話が生きてくる。それでは早速はじめよう。

2.1　$F(x,y,y')$ がいろいろな場合

- K氏：まず、F として独立変数が1個で、1次の導関数を含む $F=F(x,y,y')$ の場合を考える。EL 方程式の各項は

$$
\begin{aligned}
d\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)dy + \frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)dy' \\
\therefore \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)y' + \frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)y'' \\
&= F_{xy'} + F_{yy'}y' + F_{y'y'}y''
\end{aligned}
\tag{2.1.1}
$$

と展開できる。したがって EL の式は

$$
\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0 \quad \longrightarrow \quad F_y - F_{xy'} - F_{yy'}y' - F_{y'y'}y'' = 0 \tag{2.1.2}
$$

となる。尚、2つ以上の添え字については

$$
F_{xy'} \equiv \frac{\partial}{\partial x}F_{y'} \equiv \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right), \texttt{etc} \tag{2.1.3}
$$

を表すものとする。
(2.1.2) より、具体的な関数形に対応した EL 方程式は次のようになる。

$$
\begin{cases}
(1)\, F = F(x,y) & : \quad F_y = 0 & F = \texttt{const} \\
(2)\, F = F(x,y') & : \quad \dfrac{d}{dx}F_{y'} = 0 & F_{y'} = \texttt{const} \\
(3)\, F = F(y') & : \quad F_{y'y'}y'' = 0 & F_{y'y'} = 0 \texttt{ or } y'' = 0 \longrightarrow y = Ax + B \\
(4)\, F = F(y,y') & : \quad \dfrac{d}{dx}(F - y'F_{y'}) = 0 & F - y'F_{y'} = \texttt{const}
\end{cases}
\tag{2.1.4}
$$

(1)、(2)、(3) は明らかなので、(4) を証明しておく。x を陽に含まないので (2.1.2) の第2項は0となり

$$
F_y - F_{yy'}y' - F_{y'y'}y'' = 0 \tag{2.1.5}
$$

一方、$F - y'F_{y'}$ を x で微分すると

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(F - y'F_{y'}) &= \frac{d}{dx}F(y,y') - \frac{d}{dx}\{y'F_{y'}(y,y')\}\\ &= F_y y' + F_{y'}y'' - y''F_{y'} - F_{yy'}y'^2 - F_{y'y'}y'y''\\ &= y'(F_y - F_{yy'}y' - F_{y'y'}y'')\end{aligned}\tag{2.1.6}$$

これは (2.1.5) より 0 となる。したがって EL の式は

$$\frac{d}{dx}(F - y'F_{y'}) = 0 \longrightarrow F - y'F_{y'} = \mathtt{const}$$

となる。

- コニー：具体的な問題に適用すればどうなるのかしら。
- K 氏：うん、(3) のケースは第 1 話の最後でやった **Ex-1** がそれに当たる。(4) のケースとして最速降下線の問題をとりあげよう。

- **Ex-2：** x 軸を水平方向、y 軸を鉛直方向に取った座標系で、質点が滑らかな曲線に沿って原点 $O(0,0)$ から A 点 (a,b) まで滑り落ちるとする。最小の時間で降下する曲線の形を見出せ。

- **ans-2：** 質点の質量を m、速さを v、重力加速度を g とする。エネルギー保存則より

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgy, \quad \therefore\ v = \sqrt{2gy}$$

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dt}, \quad \therefore\ dt = \frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{v} = \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}dx$$

原点から A 点まで滑り落ちるに要する時間を t とすると

$$t = \int_0^t dt = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^a \sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}dx \equiv \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^a F(y,y')dx, \quad F(y,y') = \sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}\tag{2.1.7}$$

この関数形は (4) のケースに当たるので、EL 方程式は

$$F - y'F_{y'} = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}} - \frac{y'^2}{\sqrt{y(1+y'^2)}} = c, \quad \therefore\ \frac{1}{\sqrt{y(1+y'^2)}} = \mathtt{const}$$

となる[1]。両辺を 2 乗して整理すると

$$y(1+y'^2) = c_1 \quad (c_1 : \text{定数})\tag{2.1.8}$$

パラメータ α を使って

$$y' = \frac{dy}{dx} = \cot\alpha\tag{2.1.9}$$

と置くと (2.1.8) は

$$y = \frac{c_1}{1+\cot^2\alpha} = c_1\sin^2\alpha = \frac{1}{2}c_1(1-\cos 2\alpha), \quad \therefore \quad dy = 2c_1\sin\alpha\cos\alpha d\alpha\tag{2.1.10}$$

[1] 試しに (1.1.21) から計算してみられたし。大変厄介な計算になる。ここでのやり方の有難味が分かる。

(2.1.9),(2.1.10) より

$$dx = \frac{dy}{\cot\alpha} = 2c_1 \sin^2\alpha d\alpha = c_1(1-\cos 2\alpha)d\alpha \tag{2.1.11}$$

これを積分して

$$x = c_1\left(\alpha - \frac{1}{2}\sin 2\alpha\right) + c_2 = \frac{1}{2}c_1\left(2\alpha - \sin 2\alpha\right) + c_2 \quad (c_2 : \text{定数}) \tag{2.1.12}$$

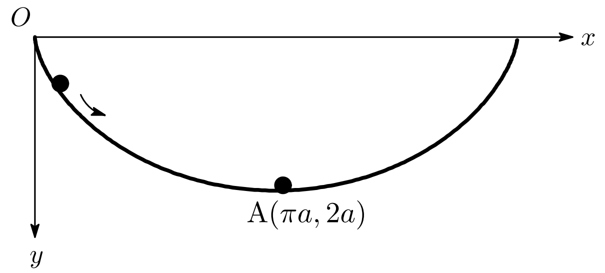
得られた結果を整理すると

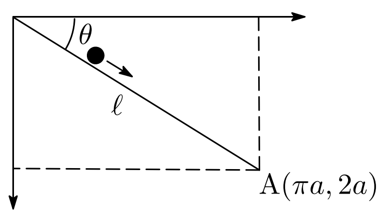
$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}c_1\left(2\alpha - \sin 2\alpha\right) + c_2 \\ y = \dfrac{1}{2}c_1(1-\cos 2\alpha) \end{cases} \tag{2.1.13}$$

質点は原点 $(0,0)$ を通ることから原点では $\alpha = 0$ となり、上式の第 1 式より $c_2 = 0$。$p = 2\alpha$ とおくと、求める停留関数は

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}c_1(p - \sin p) \\ y = \dfrac{1}{2}c_1(1-\cos p) \end{cases} \tag{2.1.14}$$

これはサイクロイド曲線を表す。





- K氏：折角だから原点から初速度 0 で最落下点 A$(\pi a, 2a)$ まで降下に要する時間を計算してみよう。(2.1.7) より

$$t = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^{\pi a}\sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}dx = \sqrt{\frac{a}{g}}\int_0^{\pi a}\frac{1}{y}dx \tag{2.1.15}$$

また、$dx = a(1-\cos p)dp = ydp$ なので、上式に代入すると

$$t = \sqrt{\frac{a}{g}}\int_0^{\pi}dp = \pi\sqrt{\frac{a}{g}} \tag{2.1.16}$$

を得る。一方、原点と A を結ぶ斜面上を滑り落ちる所要時間を T とすると $\ell = \frac{1}{2}\alpha T^2, (\alpha = g\sin\theta)$ より

$$T = \sqrt{\frac{2\ell}{\alpha}} = \frac{2}{\sin\theta}\sqrt{\frac{a}{g}} = \sqrt{\pi^2 + 2^2}\sqrt{\frac{a}{g}} \tag{2.1.17}$$

$t/T \doteqdot 0.84$ となるので、サイクロイド曲線に沿って滑ったほうが斜面を滑るより約 16%程度早く滑り落ちることになる。

2.2 高次導関数を含む場合

- K 氏：次に汎関数が高次導関数を含んでいる場合を考えよう。まず、2 次導関数 y'' までを含んだ場合を考える。汎関数として

$$I[y]=\int_{x_1}^{x_2}F(x,y,y',y'')dx \tag{2.2.1}$$

を取りあげよう。変分計算のやり方は第 1 話の 1.1.3 変分計算でやったのと同じで、境界条件として

$$\begin{cases} y(x_1)=y_1, \quad y'(x_1)=y'_1 \\ y(x_2)=y_2, \quad y'(x_2)=y'_2 \end{cases} \tag{2.2.2}$$

としておく。I の変分は

$$\begin{aligned}
\delta I &= \int_{x_1}^{x_2}F(x,y+\varepsilon\eta,y'+\varepsilon\eta',y''+\varepsilon\eta'')dx-\int_{x_1}^{x_2}F(x,y,y',y'')dx \\
&=\varepsilon\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\eta+\frac{\partial F}{\partial y'}\eta'+\frac{\partial F}{\partial y''}\eta''\right)dx \\
&+\frac{1}{2}\varepsilon^2\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial^2F}{\partial y^2}\eta^2+\frac{\partial^2F}{\partial y'^2}\eta'^2+\frac{\partial^2F}{\partial y''^2}\eta''^2+2\frac{\partial^2F}{\partial y\partial y'}\eta\eta'+2\frac{\partial^2F}{\partial y'\partial y''}\eta'\eta''+2\frac{\partial^2F}{\partial y\partial y''}\eta\eta''\right)dx \\
&+O(\varepsilon^3) \\
&=\varepsilon\delta^1I+\varepsilon^2\delta^2I+O(\varepsilon^3)
\end{aligned} \tag{2.2.3}$$

となり、これから第 1 変分は

$$\delta I=\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\eta+\frac{\partial F}{\partial y'}\eta'+\frac{\partial F}{\partial y''}\eta''\right)dx \tag{2.2.4}$$

となる。右辺第 2 項を部分積分すると、$\eta(x_2)=\eta(x_1)=0$ に注意して

$$\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial F}{\partial y'}\eta'dx=\left[\frac{\partial F}{\partial y'}\eta\right]_{x_1}^{x_2}-\int_{x_1}^{x_2}\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\eta dx=-\int_{x_1}^{x_2}\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\eta dx \tag{2.2.5}$$

次に第 3 項を部分積分すると、$\eta'(x_2)=\eta'(x_1)=0$ に注意して

$$\begin{aligned}
\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial F}{\partial y''}\eta''dx &=\left[\frac{\partial F}{\partial y''}\eta'\right]_{x_1}^{x_2}-\int_{x_1}^{x_2}\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)\eta'dx=-\int_{x_1}^{x_2}\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)\eta'dx \\
&=-\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)\eta\right]_{x_1}^{x_2}+\int_{x_1}^{x_2}\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)\eta dx=\int_{x_1}^{x_2}\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)\eta dx
\end{aligned} \tag{2.2.6}$$

となる。以上の結果から第 1 変分は

$$\delta I=\int_{x_1}^{x_2}\left\{\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)+\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)\right\}\eta dx \tag{2.2.7}$$

と表される。η は任意の関数なので $\delta I=0$ となるには

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)+\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)=0 \tag{2.2.8}$$

でなければならない。これが EL 方程式だね。

　それでは n 次導関数を含む $F=F(x,y,y',y'',\cdots,y^{(n)})$ の場合の EL 方程式はどうなるか、コニーやってみるかい。

- コニー：そうね、いまの議論から類推して、n 次導関数を含む $F = F(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n)})$ の場合に拡張すれば、第 1 変分は

$$\delta^1 I = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y}\eta + \frac{\partial F}{\partial y'}\eta' + \frac{\partial F}{\partial y''}\eta'' + \cdots + \frac{\partial F}{\partial y^{(n)}}\eta^{(n)} \right) dx \tag{2.2.9}$$

となる。任意の関数 $\eta(x)$ とその高次導関数は両端 A、B で 0 という条件で部分積分を繰り返していくと第 1 変分として

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) + \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right) - \cdots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}}\right) \right\} \eta dx \tag{2.2.10}$$

が得られる。汎関数 I が停留値を持つ $(\delta I = 0)$ 必要条件は上式の { } 内を 0 とおけばよいので、EL 方程式として

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) + \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right) - \cdots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}}\right) = 0 \tag{2.2.11}$$

が得られる。この微分方程式の境界条件は

$$\begin{cases} y(x_1) = y_1, \quad y'(x_1) = y_1', \quad \cdots, \quad y^{(n)}(x_1) = y_1^{(n)} \\ y(x_2) = y_2, \quad y'(x_2) = y_2', \quad \cdots, \quad y^{(n)}(x_2) = y_2^{(n)} \end{cases} \tag{2.2.12}$$

とおくのね。

- K 氏：その通りだ。

2.3　多従属変数を含む場合

- K 氏：次に独立変数 x は 1 個で多くの従属変数（関数 $y_i(x)$ を従属変数として取り扱う) を含む

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y_1, y_2, \cdots, y_n, y_1', y_2', \cdots, y_n') dx \tag{2.3.1}$$

の場合を考えよう。適当な一つの変数 y_k を選び、残りの変数は一定に保ちながらこの変数を少し動かした場合の変分を $\delta_k I$ としよう。具体的には

$$Y_k(x, \varepsilon) = y_k(x) + \varepsilon\eta_k(x) \tag{2.3.2}$$

と置くわけだね。$\eta_k(x)$ は両端 A、B で $\eta_k(x_1) = \eta_k(x_2) = 0$ を満たす連続微分可能な任意の関数で、添え字の異なる $\eta_k(x)$ は互いに独立とする。そうすると $\delta I_k = 0$ より、EL 方程式として

$$\frac{\partial F}{\partial y_k} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y_k'}\right) = 0 \qquad (k = 1, 2, \cdots, n) \tag{2.3.3}$$

が得られる。すべての変数 y_k について同時に変分をとったときの合計は、各変分の合計で表される。

$$\delta I = \delta_1 I + \delta_2 I + \cdots + \delta_n I = \int_{x_1}^{x_2} \sum_{k=1}^{n} \left\{ \frac{\partial F}{\partial y_k} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y_k'}\right) \right\} \eta_k dx \tag{2.3.4}$$

したがって、I が停留値をとるためには (2.3.3) の n 個の微分方程式が同時に成り立つことが必要条件となる。

- **Ex-3：** n 個の質点系の運動エネルギーと位置エネルギーをそれぞれ

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i,j} a_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k, \quad V = V(t, q_1, q_2 \cdots, q_n)$$

とするとき、運動は

$$\int_0^t (T - V)dt = \int_0^t L dt$$

が停留値をとるように起こる。

$$\delta \int_0^t L dt = 0$$

これをハミルトンの原理という。EL の方程式を導出せよ。

- **ans-3：**

$$L = L(t, q_1, q_2, \cdots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_n)$$

なので、EL 方程式は (2.3.3) で $x \to t$, $y_k \to q_k$ に置き換えると次の n 個の連立微分方程式となる。

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) = 0 \qquad (k = 1, 2, \cdots, n) \tag{2.3.5}$$

2.4　多独立変数を含む場合

- K氏：独立変数を多数含んだ場合を考えよう。$y = y(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ として

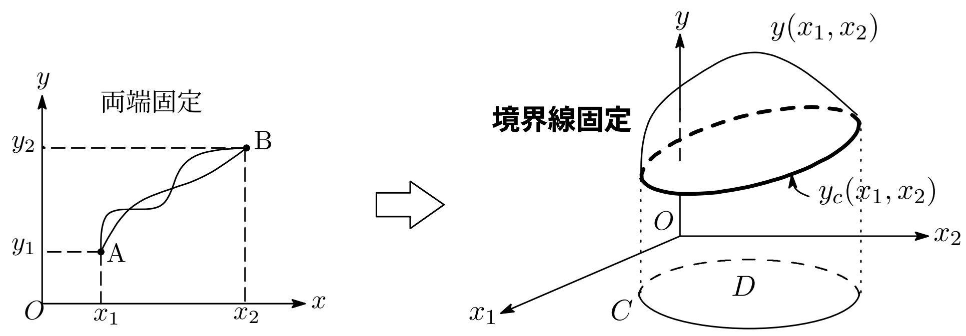
$$I = \int\int_D \cdots \int F\left(x_1, x_2, \cdots, x_n, y, \frac{\partial y}{\partial x_1}, \frac{\partial y}{\partial x_2}, \cdots \frac{\partial y}{\partial x_n}\right) dx_1 dx_2 \cdots dx_n \tag{2.4.1}$$

の場合を考えよう。まず独立変数が 2 個の場合を考える。

$$I = \iint_D F\left(x_1, x_2, y, \frac{\partial y}{\partial x_1}, \frac{\partial y}{\partial x_2}\right) dx_1 dx_2, \quad y = y(x_1, x_2) \tag{2.4.2}$$

$y(x_1, x_2)$ は 2 階連続微分可能とする。なお、積分領域 D の境界線を C とし $y(x_1, x_2)$ はその上で定められた固定値をとるものとする。

$$y(x_1, x_2) = y_c(x_1, x_2) \tag{2.4.3}$$



- コニー：比較関数のイメージとしてリングに張られたシャボン玉の石鹸膜を思い浮かべればいいわね。シャボン玉の膜はいろいろ形を変えるけど、その中で I が停留値をとる膜の形が求める停留関数となるわけね。

- K氏：そうだね。さて、例によって比較関数として

$$Y(x_1, x_2, \varepsilon) = y(x_1, x_2) + \varepsilon\eta(x_1, x_2) \tag{2.4.4}$$

とおく。境界線界 C 上では

$$\eta(x_1, x_2) = 0 \tag{2.4.5}$$

とする。(2.4.2) の y を Y で置き換えると

$$I = \iint\limits_D F\left(x_1, x_2, y + \varepsilon\eta, y_{x_1} + \varepsilon\eta_{x_1}, y_{x_2} + \varepsilon\eta_{x_2}\right) dx_1 dx_2 \qquad \left(y_{x_k} \equiv \frac{\partial y}{\partial x_k}\right) \tag{2.4.6}$$

となる。したがって第 1 変分は

$$\delta I = \iint\limits_D \left(F_y\eta + F_1\frac{\partial\eta}{\partial x_1} + F_2\frac{\partial\eta}{\partial x_2}\right) dx_1 dx_2, \quad \text{ただし、} F_k \equiv \frac{\partial F}{\partial y_{x_k}} \quad (k = 1, 2) \tag{2.4.7}$$

となるね。ここで次の関係式

$$\frac{\partial}{\partial x_k}(F_k\eta) = \frac{\partial F_k}{\partial x_k}\eta + F_k\frac{\partial\eta}{\partial x_k}, \quad \therefore\ F_k\frac{\partial\eta}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k}(F_k\eta) - \frac{\partial F_k}{\partial x_k}\eta \tag{2.4.8}$$

を使えば (2.4.7) の右辺第 2、第 3 項は

$$\begin{aligned}\iint\limits_D \left(F_1\frac{\partial\eta}{\partial x_1} + F_2\frac{\partial\eta}{\partial x_2}\right) dx_1 dx_2 &= \iint\limits_D \left(\frac{\partial}{\partial x_1}(F_1\eta) + \frac{\partial}{\partial x_2}(F_2\eta)\right) dx_1 dx_2 \\ &\quad - \iint\limits_D \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2}\right) \eta dx_1 dx_2\end{aligned} \tag{2.4.9}$$

となる。この積分は面積分なのでグリーンの定理を使って線積分に変換する。グリーンの定理は次のようなものだったね。

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) dxdy = \int_c (fdx + gdy) \tag{2.4.10}$$

(2.4.9) の右辺第 1 項にグリーンの定理を適用して線積分に変換すると、境界線 C 上で $\eta(x_1, x_2) = 0$ なので、結局この項は 0 になる。

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial}{\partial x_1}(F_1\eta) + \frac{\partial}{\partial x_2}(F_2\eta)\right) dx_1 dx_2 = \int_C \eta(F_1 dx_2 - F_2 dx_1) = 0 \tag{2.4.11}$$

したがって (2.4.7) は

$$\delta I = \iint\limits_D \eta\left(F_y - \frac{\partial F_1}{\partial x_1} - \frac{\partial F_2}{\partial x_2}\right) dx_1 dx_2 \tag{2.4.12}$$

となる。$\eta(x_1, x_2)$ は任意の関数なので、$\delta I = 0$ より EL 方程式として

$$F_y - \frac{\partial F_1}{\partial x_1} - \frac{\partial F_2}{\partial x_2} = F_y - \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial F}{\partial y_{x_1}}\right) - \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial F}{\partial y_{x_2}}\right) = 0 \tag{2.4.13}$$

を得る。

尚、上で得られた結果を一般論に拡張すれば EL 方程式は

$$F_y - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial F}{\partial y_{x_k}}\right) = 0 \qquad (k = 1, 2, \cdots, n) \tag{2.4.14}$$

となるわけだ。

具体的な例として次の汎関数に対する EL 方程式を求めてみよう

$$I = \iint_D \{y_{x_1}^2 + y_{x_2}^2 + 2yf(x_1, x_2)\}dx_1 dx_2 \tag{2.4.15}$$

$F = y_{x_1}^2 + y_{x_2}^2 + 2yf(x_1, x_2)$ とおいて

$$F_y = 2f(x_1, x_2), \quad \frac{\partial F_1}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial F}{\partial y_{x_1}}\right) = 2\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial F}{\partial y_{x_2}}\right) = 2\frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} \tag{2.4.16}$$

これから EL 方程式は (2.4.13) より

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} = f(x_1, x_2) \tag{2.4.17}$$

これは 2 次元のポアソン方程式と呼ばれるものだね。ご承知のように $f = 0$ の場合はラプラスの方程式と呼ばれる。

- コニー：電磁気学でラプラスの方程式 $\nabla^2\phi = 0$ を勉強したわ。ϕ は静電ポテンシャル。荷電粒子が存在しない静電場のエネルギー密度を $\mathcal{E}$ とすると、これは電場を E、真空の誘電率を ε_0 として $\mathcal{E} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$ で表される。ところで $E = -\nabla\phi$ なので $\mathcal{E}$ を ϕ で表せば $\mathcal{E} = \frac{1}{2}\varepsilon_0(\nabla\phi)^2$。したがって、ある与えられた体積中の静電エネルギーを $I[\phi]$ とすると

$$I[\phi] = \int \mathcal{E} dV = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \iiint (\nabla\phi)^2 dxdydz = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \iiint (\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2) dxdydz \tag{2.4.18}$$

$I[\phi]$ が停留値をとる ϕ は EL 方程式の解ということね。EL 方程式は、$F = \phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2$ とおいて上と同じような計算をすると

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0 \longrightarrow \nabla^2\phi = 0 \tag{2.4.19}$$

が得られ、ラプラスの方程式は静電場のエネルギーを最小にするという要請からでてくる。

- K 氏：それでは次の問題をやろう。

• **Ex-4：** xy 平面の領域 D に張られた薄い弾性膜の振動の方程式を求めよ。$\sigma(x, y)$ を膜の表面密度、Γ を膜の表面張力とすると、膜の運動エネルギー T は

$$T = \frac{1}{2}\iint_D \sigma\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2 dxdy, \qquad z = z(x, y, t) \tag{2.4.20}$$

膜振動のポテンシャルエネルギー V は

$$V = \frac{1}{2}\Gamma \iint_D \left\{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right\} dxdy \tag{2.4.21}$$

で与えられる。

- **ans-4：** 膜の振動のラグランジアンは $L = T - V$。ハミルトンの原理より $\delta \int L dt = 0$ が実現する膜振動となる。

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \frac{1}{2}\delta \int_{t_1}^{t_2} \iint_D \left\{ \sigma \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)^2 - \Gamma \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \right] \right\} dxdydt$$

(2.4.1) の F に対応する式は

$$F(x, y, t, z, z_x, z_y.z_t) = \sigma \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)^2 - \Gamma \left\{ \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \right\}$$

となる。EL 方程式は (2.4.14) で $x_1 \to x$, $x_2 \to y$, $x_3 \to t$, $y \to z$ と置き換えて

$$F_z - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial z_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial z_y} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial F}{\partial z_t} \right) = 0 \tag{2.4.22}$$

となる。上式の各項は

$$\begin{cases} F_z = \dfrac{\partial F}{\partial z} = 0, & \dfrac{\partial}{\partial x} \left(\dfrac{\partial F}{\partial z_x} \right) = -2\Gamma \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \left(\dfrac{\partial F}{\partial z_y} \right) = -2\Gamma \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}, & \dfrac{\partial}{\partial t} \left(\dfrac{\partial F}{\partial z_t} \right) = 2\sigma \dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2} \end{cases}$$

と計算され、これを (2.4.22) に入れて膜の振動方程式

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right), \quad c = \sqrt{\frac{\Gamma}{\sigma}}$$

を得る。

2.5　自然境界条件

- K 氏：第 1 話「変分法の基礎理論」の話を振り返ってみよう。

$$I[y] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')dx \tag{2.5.1}$$

の第 1 変分 $\delta I = 0$ より EL 方程式が導かれた。この導出プロセスを再掲すると

$$\begin{aligned} \delta I &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y} \eta dx + \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y'} \eta' dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y} \eta dx + \left[\frac{\partial F}{\partial y'} \eta \right]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \eta dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y} \eta dx - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \eta dx = \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right\} \eta dx = 0 \\ \therefore \quad & \forall \eta \longrightarrow \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0 \end{aligned} \tag{2.5.2}$$

2 行目から 3 行目へは両端固定の境界条件を利用して余分な項を消去できた。その結果 EL 方程式が得られたわけだが、両端固定という境界条件の代わりに

$$\left. \frac{\partial F}{\partial y'} \right|_{x=x_1} = 0, \qquad \left. \frac{\partial F}{\partial y'} \right|_{x=x_2} = 0 \tag{2.5.3}$$

という境界条件を設定しても EL の式はでてくる。この境界条件のことを**自然境界条件**と呼んでいる。この場合、EL 方程式に自然境界条件が加わることになる。

$$\begin{cases} EL\text{ 方程式} & : \quad \dfrac{\partial F}{\partial y} - \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0 \\ \text{自然境界条件} & : \quad \left.\dfrac{\partial F}{\partial y'}\right|_{x=x_1} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial F}{\partial y'}\right|_{x=x_2} = 0 \end{cases} \tag{2.5.4}$$

- コニー：例えば一端 A が固定されており、B 端は自由端になっているような場合は $\eta(x_1) = 0, \eta(x_2) \neq 0$ で、EL の方程式と自然境界条件のセットは

$$\begin{cases} EL\text{ 方程式} & : \quad \dfrac{\partial F}{\partial y} - \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0 \\ \text{自然境界条件} & : \quad \left.\dfrac{\partial F}{\partial y'}\right|_{x=x_2} = 0 \end{cases} \tag{2.5.5}$$

とすればいいのね。

- K 氏：そうだね。具体的な例として汎関数

$$I[y] = \int_0^1 (y'^2 - 4y)dx$$

を考えよう。境界条件として、A 端 ($x_1 = 0$) は固定されて $y(0) = 1$、B 端 ($x = x_2 = 1$) は自由端、つまり B 端の y 値は y 軸と平行な直線 $x_2 = 1$ 上にある場合だね。そうすると EL 方程式と自然境界条件のセットは $F = y'^2 - 4y$ として

$$\begin{cases} EL\text{ 方程式} & : \quad \dfrac{\partial F}{\partial y} - \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0 \longrightarrow y''(x) + 2 = 0 \\ \text{境界条件} & : \quad y(0) = 1, \quad \left.\dfrac{\partial F}{\partial y'}\right|_{x=x_2=1} = 0 \end{cases}$$

EL 方程式より

$$y(x) = -x^2 + ax + b \quad (a, b\text{：定数})$$

境界条件より

$$y(0) = 1 \to b = 1, \quad \partial F/\partial y'|_{x=1} = 0 \to a = 2$$

となるので、求める停留関数は

$$y = -x^2 + 2x + 1$$

停留値は

$$I = \int_0^1 \left\{(-2x+2)^2 - 4(-x^2 + 2x + 1)\right\} dx = -\frac{16}{3}$$

となる。

2.6　横断条件

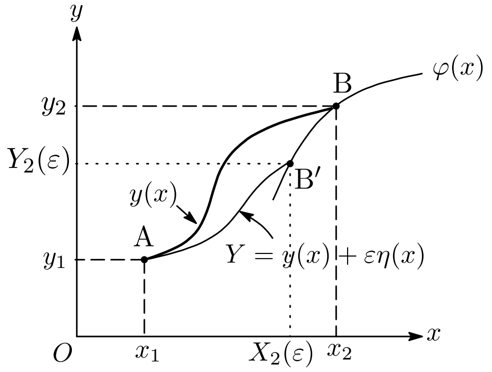
- K 氏：さて、汎関数

$$I[y] = \int_{x_1}^{P} F(x, y, y')dx \tag{2.6.1}$$

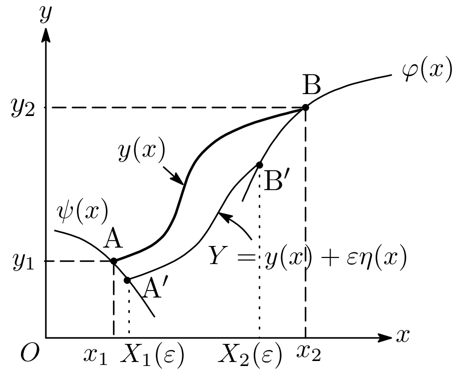
を考え、境界条件は A 点で固定値

$$y(x_1) = y_1 \tag{2.6.2}$$

をとり、B 点はある曲線 $y = \varphi(x)$ 上にあればどこでもよい場合を考える（次ページの左図参照）。積分の上限 P は曲線 $\varphi(x)$ 上の x 座標を表す。



$X_2(\varepsilon) = x_2 + \varepsilon u$



$X_1(\varepsilon) = x_1 + \varepsilon v \quad X_2(\varepsilon) = x_2 + \varepsilon u$

比較関数を

$$Y(x, \varepsilon) = y(x) + \varepsilon\eta(x) \tag{2.6.3}$$

として、曲線 $\varphi(x)$ との交点を B$'$ とし、その座標を $(X_2(\varepsilon), Y_2(\varepsilon))$ とする。停留関数 $y(x)$ が $\varepsilon\eta$ だけ動かされたために B 点が B$'$ 点になったと考える。(2.6.1) の y の代わりに (2.6.3) の Y を入れ、積分の上限 P を $X_2(\varepsilon)$ とすると、問題とすべき汎関数は

$$I[y + \varepsilon\eta] = \int_{x_1}^{X_2(\varepsilon)} F(x, y + \varepsilon\eta, y' + \varepsilon\eta')dx, \quad X_2(\varepsilon) = x_2 + \varepsilon u \tag{2.6.4}$$

となる。以下、停留関数 $y(x)$ が満たすべき必要条件を求めていく。

I をパラメータ ε の単なる関数とみなすと、ε を変数とした I の極値問題と考えればよい。I を ε で微分し、この § の最後で証明する公式

$$\frac{d}{d\varepsilon}\int_{X_1(\varepsilon)}^{X_2(\varepsilon)} F(x, \varepsilon)dx = \int_{X_1(\varepsilon)}^{X_2(\varepsilon)} \frac{\partial}{\partial\varepsilon}F(x, \varepsilon)dx + F(X_2, \varepsilon)\frac{dX_2}{d\varepsilon} - F(X_1, \varepsilon)\frac{dX_1}{d\varepsilon} \tag{2.6.5}$$

を利用すれば

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\varepsilon}I &= \frac{d}{d\varepsilon}\int_{x_1}^{X_2(\varepsilon)} F(x, y + \varepsilon\eta, y' + \varepsilon\eta')dx \\
&= \int_{x_1}^{X_2(\varepsilon)} \frac{\partial}{\partial\varepsilon}F(x, y + \varepsilon\eta, y' + \varepsilon\eta')dx \\
&+ F\left(X_2(\varepsilon), y + \varepsilon\eta, y' + \varepsilon\eta'\right)\frac{dX_2(\varepsilon)}{d\varepsilon} - F\left(x_1, y + \varepsilon\eta, y' + \varepsilon\eta'\right)\frac{dx_1(\varepsilon)}{d\varepsilon} \\
&= \int_{x_1}^{X_2(\varepsilon)} \frac{\partial}{\partial\varepsilon}F(x, y + \varepsilon\eta, y' + \varepsilon\eta')dx + F\left(X_2(\varepsilon), y + \varepsilon\eta, y' + \varepsilon\eta'\right)u
\end{aligned} \tag{2.6.6}$$

となる（A 点は固定されているので $dx_1(\varepsilon)/d\varepsilon = 0$）。右辺第 1 項は

$$\int_{x_1}^{X_2(\varepsilon)} \frac{\partial}{\partial\varepsilon}F(x, Y, Y')dx = \int_{x_1}^{X_2(\varepsilon)} \left(\frac{\partial F}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial\varepsilon} + \frac{\partial F}{\partial Y'}\frac{\partial Y'}{\partial\varepsilon}\right)dx = \int_{x_1}^{X_2(\varepsilon)} \left(\frac{\partial F}{\partial Y}\eta + \frac{\partial F}{\partial Y'}\eta'\right)$$

となるので、(2.6.6) は

$$\frac{d}{d\varepsilon}I = \int_{x_1}^{X_2(\varepsilon)} \left(\frac{\partial F}{\partial Y}\eta + \frac{\partial F}{\partial Y'}\eta' \right) dx + F\left(X_2(\varepsilon), Y, Y'\right) u \tag{2.6.7}$$

となる。第 1 変分を

$$\delta I = \frac{d}{d\varepsilon} I(y+\varepsilon\eta) \bigg|_{\varepsilon=0} = 0 \tag{2.6.8}$$

として、$X_2(0) = x_2$, $\eta(x_1) = 0$ であることに留意しながら (2.6.7) を計算すると

$$\begin{aligned}
\delta^1 I &= \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y}\eta + \frac{\partial F}{\partial y'}\eta' \right) dx + F\left(X_2(\varepsilon), Y, Y'\right) u \\
&= \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y}\eta dx + \left[\frac{\partial F}{\partial y'}\eta \right]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \eta dx + F(x_2, y, y')u \\
&= \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right\} \eta dx + \frac{\partial F}{\partial y'}\bigg|_{x=x_2} \cdot \eta(x_2) + F(x_2, y, y')u \\
&= 0
\end{aligned} \tag{2.6.9}$$

となる。ここで η は任意関数なので

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0 \tag{2.6.10}$$

とおいて EL の方程式を得る。同時に

$$\frac{\partial F}{\partial y'}\bigg|_{x=x_2} \cdot \eta(x_2) + F(x_2, y, y')u = 0 \tag{2.6.11}$$

が成立しなければならないので、これが成立する条件を求めていこう。$X_2(\varepsilon)$ は曲線 $\varphi(x)$ 上の点なので

$$\varphi(X_2) = y(X_2) + \varepsilon\eta(X_2) \tag{2.6.12}$$

と表せる。この両辺を ε で微分して

$$\frac{d\varphi}{d\varepsilon} = \frac{\partial y}{\partial X_2}\frac{dX_2}{d\varepsilon} + \eta + \varepsilon\frac{\partial \eta}{\partial X_2}\frac{dX_2}{d\varepsilon} = \frac{\partial y}{\partial X_2}u + \eta + \varepsilon\frac{\partial \eta}{\partial X_2}u \tag{2.6.13}$$

を得る。ここで $\varepsilon = 0$ とすると右辺第 3 項が消え、このとき $X_2(0) = x_2$ になることに注意すれば上式は

$$\varphi'(x_2)u = y'(x_2)u + \eta(x_2) \tag{2.6.14}$$

となり、これから

$$\eta(x_2) = \left\{ \varphi'(x_2) - y'(x_2) \right\} u \tag{2.6.15}$$

が得られる。これを (2.6.11) に入れて整理すると

$$\left\{ F(x, y, y') + F_{y'}(\varphi' - y') \right\}_{x=x_2} u = 0 \tag{2.6.16}$$

となり、u は任意なので上式が成り立つためには $x = x_2$ の点で

$$F - F_{y'}(\varphi' - y') = 0 \tag{2.6.17}$$

でなければならない。したがって求める必要条件は

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial y} - \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0 \\ \big[F - F_{y'}(\varphi' - y')\big]_{x=x_2} = 0 \end{cases} \tag{2.6.18}$$

となる。(2.6.18) の境界条件は**横断条件**とか**横断線条件**と呼ばれる。

さて、A 端も曲線 $\psi(x)$ 上にある場合の横断条件はどうなるか、コニーやってみるかい。

- コニー：そうねぇ、上の計算をなぞっていけばいいハズね。

$$X_1(\varepsilon) = x_1 + \varepsilon v, \quad X_2(\varepsilon) = x_2 + \varepsilon u \tag{2.6.19}$$

とおいて

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varepsilon} I(y + \varepsilon\eta) &= \frac{d}{d\varepsilon}\int_{X_1}^{X_2} F(x, y + \varepsilon\eta, y' + \varepsilon\eta')dx \\ &= \int_{X_1}^{X_2}\left(\frac{\partial F}{\partial Y}\eta + \frac{\partial F}{\partial Y'}\eta'\right)dx + F\left(X_2, Y, Y'\right)u - F\left(X_1, Y, Y'\right)v \end{aligned} \tag{2.6.20}$$

となって、$\delta I = 0$ の式は

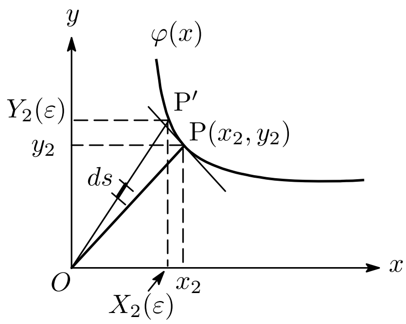
$$\begin{aligned} \delta I &= \int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\eta + \frac{\partial F}{\partial y'}\eta'\right)dx + F\left(X_2, Y, Y'\right)u - F\left(X_1, Y, Y'\right)v \\ &= \int_{x_1}^{x_2}\left\{\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right\}\eta dx + \left.\frac{\partial F}{\partial y'}\right|_{x=x_2}\cdot\eta(x_2) - \left.\frac{\partial F}{\partial y'}\right|_{x=x_1}\cdot\eta(x_1) \\ &+ F(x_2, y, y')u - F(x_1, y, y')v \\ &= \int_{x_1}^{x_2}\left\{\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right\}\eta dx \\ &+ \big\{F(x, y, y') + F_{y'}(\varphi' - y')\big\}_{x=x_2}\cdot u - \big\{F(x, y, y') + F_{y'}(\psi' - y')\big\}_{x=x_1}\cdot v = 0 \end{aligned} \tag{2.6.21}$$

η, u, v は任意なので上式が成立するためには

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial y} - \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0 \\ \big\{F + F_{y'}(\psi' - y')\big\}_{x=x_1} = 0 \\ \big\{F + F_{y'}(\varphi' - y')\big\}_{x=x_2} = 0 \end{cases} \tag{2.6.22}$$

となり、EL 方程式に加えて A 端、B 端での 2 つの横断条件が加わる。

- K 氏：そうだね。
- コニー：横断条件の何か適当な例題があるかしら。
- K 氏：そうだね、それじゃ『原点 $O(0,0)$ から与えられた曲線 $y = \varphi(x)$ までの最短距離を求めよ』という問題を考えよう。この問題は 1 端が原点に固定され、もう 1 端は曲線 $\varphi(x)$ 上にある任意の点だね。



原点から曲線 $\varphi(x)$ への最短距離を実現する曲線は直線であることは明らかだ。“ 最短距離を実現する ”直線 $y(x)$ と曲線 $\varphi(x)$ の交点を $\mathrm{P}(x_2, y_2)$ とし、直線の線素を ds とすると $ds = \sqrt{1+y'^2}dx$。

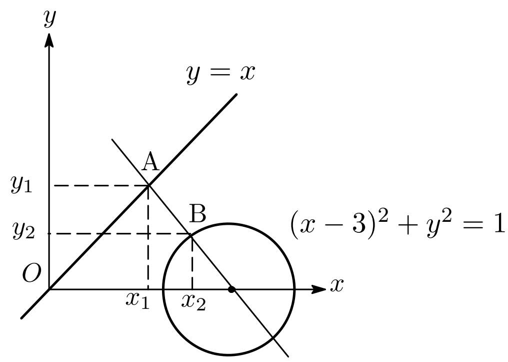
$$F = \sqrt{1+y'^2} \tag{2.6.23}$$

とおいて (2.6.18) より

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial y} - \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0 & \longrightarrow \quad \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0 \\ \big[F - F_{y'}(\varphi' - y')\big]_{x=x_2} = 0 & \longrightarrow \quad [1 + y'\varphi']_{x=x_2} = 0 \quad \therefore\ y'(x_2)\varphi'(x_2) = -1 \end{cases} \tag{2.6.24}$$

$\varphi'(x_2)$ は曲線 $\varphi(x)$ 接線の傾きで、$y'(x_2)$ は原点 O から伸びる直線の傾きだ。したがって直線 OP は曲線 $\varphi(x)$ と直交する直線となる。

- **Ex-5：** 両端での横断条件を使うことによって、直線 $y = x$ と円 $(x-3)^2 + y^2 = 1$ との間の最短距離を求めよ。



- **ans-5：** 最短距離は直線になる。$F = \sqrt{1+y'^2}$ として A 点での横断条件より

$$[1 + y'\psi']_{x=x_1} = 0 \quad \therefore\ y'(x_1) = -1 \quad (\because \psi = x)$$

B 点での横断条件より

$$[1 + y'\varphi']_{x=x_2} = 0 \quad \therefore\ y'(x_2) = (x_2 - 3)/y_2 \quad (\because \varphi' = (x-3)/\varphi)$$

$y'(x_1) = y'(x_2)$ より最短距離を実現する直線の式は

$$y = -x + 3$$

となる。これから A、B の座標は

$$A(x_1, y_1) = A(3/2,\, 3/2), \quad B(x_2, y_2) = B(3 - 1/\sqrt{2},\, 1/\sqrt{2})$$

最短距離 ℓ は

$$l = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = (3\sqrt{2} - 1)/2$$

となる。

- K 氏：最後に (2.6.5) の公式を証明して第 2 話を終了しよう。次のような公式だったね

$$\frac{d}{d\varepsilon}\int_{X_1(\varepsilon)}^{X_2(\varepsilon)} F(x,\varepsilon)dx = \int_{X_1(\varepsilon)}^{X_2(\varepsilon)} \frac{\partial}{\partial\varepsilon}F(x,\varepsilon)dx + \left[F(\varepsilon.x)\frac{dx}{d\varepsilon}\right]_{X_1(\varepsilon)}^{X_2(\varepsilon)}$$

この証明は次のようにやればよい。$f(\varepsilon, x)$ を $F(\varepsilon, x)$ の原始関数とすると

$$\int F(\varepsilon, x)dx = f(\varepsilon, x) \longleftrightarrow F(\varepsilon, x) = \frac{d}{dx}f(\varepsilon, x) \tag{2.6.25}$$

この関係式を使い積分範囲を X_1, X_2 とすると

$$\frac{d}{d\varepsilon}\int_{X_1}^{X_2} F(x,\varepsilon)dx = \frac{d}{d\varepsilon}\Big[f(\varepsilon,x)\Big]_{X_1}^{X_2} = \frac{d}{d\varepsilon}\left[f(\varepsilon, X_2) - f(\varepsilon, X_1)\right] \tag{2.6.26}$$

$$\begin{aligned}
\text{右辺} &= \frac{\partial}{\partial\varepsilon}f(\varepsilon, X_2) + \frac{\partial f(\varepsilon, X_2)}{\partial X_2}\frac{dX_2}{d\varepsilon} - \frac{\partial}{\partial\varepsilon}f(\varepsilon, X_1) - \frac{\partial f(\varepsilon, X_1)}{\partial X_1}\frac{dX_1}{d\varepsilon} \\
&= \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\{f(\varepsilon, X_2) - f(\varepsilon, X_1)\} + F(\varepsilon.X_2)\frac{dX_2}{d\varepsilon} - F(\varepsilon.X_1)\frac{dX_1}{d\varepsilon} \\
&= \frac{d}{d\varepsilon}\int_{X_1}^{X_2} F(\varepsilon, x)dx + F(\varepsilon.X_2)\frac{dX_2}{d\varepsilon} - F(\varepsilon.X_1)\frac{dX_1}{d\varepsilon} \\
&= \int_{X_1}^{X_2}\frac{\partial}{\partial\varepsilon}F(\varepsilon, x)dx + \left[F(\varepsilon.x)\frac{dx}{d\varepsilon}\right]_{X_1}^{X_2}
\end{aligned} \tag{2.6.27}$$

となって、公式がでてくる。

次回第 3 話は、境界条件に加えて付加条件（束縛条件）を伴う変分の話をしていく予定で、ラグランジュの未定乗数法がでてくる。お楽しみに。