

第3話 ラグランジュの未定乗数法

3.1 付加条件を伴う変分

- K氏：関数

$$F = F(u_1, u_2, \dots, u_n) \quad (3.1.1)$$

に1つの付加条件¹

$$f(u_1, u_2, \dots, u_n) = 0 \quad (3.1.2)$$

が付いた場合の関数の停留値（極値）を求める問題を考えよう。まず、考えられるのは付加条件(3.1.2)を u_i について解き、それを関数 F に入れば付加条件のない $n-1$ 個の独立変数の変分問題として取り扱うことができるということだ。もっとも、この方法は常にうまくいくとは限らない。付加条件から u_i を消去するのが大変面倒になる場合が多い。そのような場合の対処法は後で述べるとして、まず1つの付加条件

$$f(u_1, u_2, u_3) = 0 \quad (3.1.3)$$

を伴う3変数からなる関数

$$F = F(u_1, u_2, u_3) \quad (3.1.4)$$

の停留値を求める問題を考えよう。(3.1.3)の変分をとると

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial u_1} \delta u_1 + \frac{\partial f}{\partial u_2} \delta u_2 + \frac{\partial f}{\partial u_3} \delta u_3 = 0 \quad (3.1.5)$$

関数 F の変分は停留値のところで0だから

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial u_1} \delta u_1 + \frac{\partial F}{\partial u_2} \delta u_2 + \frac{\partial F}{\partial u_3} \delta u_3 = 0 \quad (3.1.6)$$

δu_i ($i = 1, 2, 3$) はそれぞれ独立した変分ではないので $\partial F / \partial u_i \neq 0$ ($i = 1, 2, 3$)。(3.1.5)の変分の内どれでもいいが、 δu_3 について解くと

$$\delta u_3 = - \left(\frac{\partial f}{\partial u_1} \delta u_1 + \frac{\partial f}{\partial u_2} \delta u_2 \right) / \frac{\partial f}{\partial u_3} \quad (3.1.7)$$

が得られる。これを(3.1.6)に入れて整理すると

$$\begin{aligned} \delta F &= \left(\frac{\partial F}{\partial u_1} - \frac{\frac{\partial f}{\partial u_1}}{\frac{\partial f}{\partial u_3}} \cdot \frac{\partial F}{\partial u_3} \right) \delta u_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial u_2} - \frac{\frac{\partial f}{\partial u_2}}{\frac{\partial f}{\partial u_3}} \cdot \frac{\partial F}{\partial u_3} \right) \delta u_2 \\ &= \left(\frac{\partial F}{\partial u_1} - \lambda \frac{\partial f}{\partial u_1} \right) \delta u_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial u_2} - \lambda \frac{\partial f}{\partial u_2} \right) \delta u_2 = 0, \quad \text{ただし、} \lambda \equiv \frac{\partial F}{\partial u_3} / \frac{\partial f}{\partial u_3} \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

¹(3.1.2)で表される付加条件はホロノミック系と呼ばれる。*holonomic*という語はHertzによって導入された。ギリシャ語からきており、「従来通り」のとか「普通の」という意味を持つ。可積分な拘束条件という意味合いでも使われる。

ここで、 $\delta u_1, \delta u_2$ は自由に動かせる独立な変分となるので

$$\frac{\partial F}{\partial u_1} - \lambda \frac{\partial f}{\partial u_1} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial u_2} - \lambda \frac{\partial f}{\partial u_2} = 0 \quad (3.1.9)$$

が成立する。また、 $\lambda = \frac{\partial F}{\partial u_3} / \frac{\partial f}{\partial u_3}$ より

$$\frac{\partial F}{\partial u_3} - \lambda \frac{\partial f}{\partial u_3} = 0 \quad (3.1.10)$$

以上の結果を (3.1.6) に入れて整理すると

$$\delta F - \lambda \left(\frac{\partial f}{\partial u_1} \delta u_1 + \frac{\partial f}{\partial u_2} \delta u_2 + \frac{\partial f}{\partial u_3} \delta u_3 \right) = \delta F - \lambda \delta f = 0 \quad (3.1.11)$$

$$\therefore \delta(F - \lambda f) = 0$$

となり、新しい関数

$$\mathcal{F} = F - \lambda f \quad (3.1.12)$$

を定義すれば、付加条件付の関数 F の極値問題は付加条件なしの関数 \mathcal{F} の極値問題に置き換えることができる。この結果は (3.1.1), (3.1.2) のような変数が n 個の一般のケースにもそのまま拡張適用できる。

次に m 個の独立な付加条件がある場合を考えよう。

$$F = F(u_1, u_2, \dots, u_n) \quad (3.1.13)$$

$$\begin{cases} f_1(u_1, u_2, \dots, u_n) = 0 \\ \vdots \\ f_m(u_1, u_2, \dots, u_n) = 0 \end{cases} \quad (m < n) \quad (3.1.14)$$

(3.1.14) の変分をとると

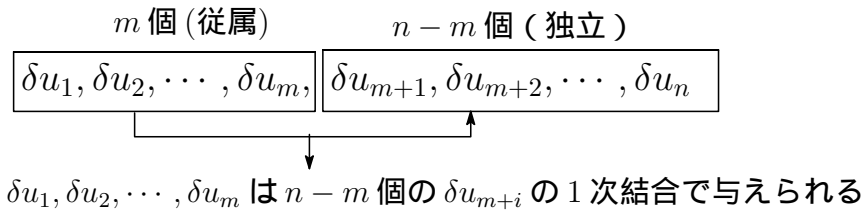
$$\begin{cases} \delta f_1 = \frac{\partial f_1}{\partial u_1} \delta u_1 + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial u_n} \delta u_n = 0 \\ \vdots \\ \delta f_m = \frac{\partial f_m}{\partial u_1} \delta u_1 + \dots + \frac{\partial f_m}{\partial u_n} \delta u_n = 0 \end{cases} \quad (3.1.15)$$

関数 F の変分は

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial u_1} \delta u_1 + \dots + \frac{\partial F}{\partial u_n} \delta u_n = \sum_{r=1}^n A_r \delta u_r = 0, \quad \text{ただし } A_r \equiv \frac{\partial F}{\partial u_r} \quad (3.1.16)$$

m 個の付加条件 (3.1.15) により、独立な変分の数は $n - m$ 個となる。その内、どれでもよいが例えば $\delta u_{m+1}, \delta u_{m+2}, \dots, \delta u_n$ を独立な変分として採用すると、残り m 個の $\delta u_1, \delta u_2, \dots, \delta u_m$ はそれらの1次結合として表される。その関係式は、 $\delta u_1, \delta u_2, \dots, \delta u_m$ を未知数とする (3.1.15) の m 個の連立1次同次方程式を解いて得られる²。

²詳細は適当な線形代数のテキスト、例えば稲葉三男「行列と行列式」(近代数学新書)等を参照されたし。



いま、仮にその関係式が求まったとして

$$\delta u_j = c_1^{(j)} \delta u_{m+1} + c_2^{(j)} \delta u_{m+2} + \dots + c_{n-m}^{(j)} \delta u_n = \sum_{i=1}^{n-m} c_i^{(j)} \delta u_{m+i} \quad (j = 1, 2, \dots, m) \quad (3.1.17)$$

と書こう。これを (3.1.16) に入れて整理すると

$$\sum_{i=1}^{n-m} \left(A_{m+i} + \sum_{j=1}^m A_j c_i^{(j)} \right) \delta u_{m+i} = 0 \quad (3.1.18)$$

となり、 δu_{m+i} ($i = 1, 2, \dots, n - m$) は独立な変分なので、 A_r の従うべき式として

$$A_{m+i} + \sum_{j=1}^m A_j c_i^{(j)} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n - m) \quad (3.1.19)$$

を得る。しかし、この式を具体的に書き下すと一般に複雑なものとなり、付加条件を“ 解く ”この方法は必ずしも見通しのよい方法とはいえない。そこで、(3.1.16) の $\delta F = 0$ の代わりに

$$\begin{aligned} & \delta F - (\lambda_1 \delta f_1 + \dots + \lambda_m \delta f_m) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial F}{\partial u_k} \delta u_k - \lambda_1 \left(\frac{\partial f_1}{\partial u_1} \delta u_1 + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial u_n} \delta u_n \right) - \dots - \lambda_m \left(\frac{\partial f_m}{\partial u_1} \delta u_1 + \dots + \frac{\partial f_m}{\partial u_n} \delta u_n \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial u_k} - \sum_{\ell=1}^m \lambda_\ell \frac{\partial f_\ell}{\partial u_k} \right) \delta u_k = 0 \end{aligned} \quad (3.1.20)$$

とおいてみよう。こうしても付加条件 (3.1.15) により任意の λ_ℓ ($\ell = 1, 2, \dots, m$) に対して δF の値は変わらない。つまり (3.1.20) は (3.1.16) と同等ということだね。

- コニー：この狙いは従属的な変分を消去しようという意図があるのね。
- K氏：そうなんだ。 λ_ℓ ($\ell = 1, 2, \dots, m$) は任意だから、 λ_ℓ として次の m 個の連立方程式の解を採用する。

$$\frac{\partial F}{\partial u_k} - \sum_{\ell=1}^m \lambda_\ell \frac{\partial f_\ell}{\partial u_k} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, m) \quad (3.1.21)$$

そうすると (3.1.20) の前半の m 個の項が消えて次式を得る。

$$\sum_{k=m+1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial u_k} - \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial u_k} - \dots - \lambda_m \frac{\partial f_m}{\partial u_k} \right) \delta u_k = 0 \quad (3.1.22)$$

δu_k は どれも独立した変分 なので

$$\frac{\partial F}{\partial u_k} - \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial u_k} - \dots - \lambda_m \frac{\partial f_m}{\partial u_k} = 0 \quad (k = m + 1, \dots, n) \quad (3.1.23)$$

が成立する。したがって、(3.1.21) と (3.3.10) より

$$\frac{\partial F}{\partial u_k} - \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial u_k} - \dots - \lambda_m \frac{\partial f_m}{\partial u_k} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (3.1.24)$$

が得られる。(3.1.24) は すべての変分 δu_k が独立である として

$$\delta F - \lambda_1 \delta f_1 - \dots - \lambda_m \delta f_m = 0 \quad (3.1.25)$$

から得られる結果と等価だ。すなわち、 m 個の付加条件付の関数 F の停留値を求める問題は、付加条件のない新しい関数

$$\mathcal{F} = F - \lambda_1 f_1 - \dots - \lambda_m f_m = F - \sum_{\ell=1}^m \lambda_\ell f_\ell \quad (3.1.26)$$

の停留値問題に置き換えることができる。 λ は未定乗数と呼ばれ、この方法をラグランジュの未定乗数法と呼んでいる。この方法の優れているところは、付加条件の数には関係しないし、また、非ホロノミック (*nonholonomic*) な付加条件³にも適用することができる点にあるんだね。

- コニー：未定乗数の“未定”とは値の定まっていない乗数という意味ね。
- K氏：そうなんだね。 λ は式を立てた段階では未定だけど、問題を解いた後で自然に決まってくる。このあたりの事情はあとで問題をやったときに分かると思う。
- コニー：一般論はいつも抽象的でなかなか掴み難いものを感じるけど。。
- K氏：まあ、しばらく我慢我慢。ラグランジュの未定乗数法を要約しておくとな次のようになるね。
『付加条件 $f_i(u_1, \dots, u_n)$ ($i = 1, 2, \dots, m$) のもとでの関数 $F(u_1, \dots, u_n)$ の停留値問題は付加条件なしのあたらしい関数 $\mathcal{F} = F - \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i$ の停留値問題に置き換えることができる。』

3.2 積分形の付加条件

- K氏： $G(x, y, y')$ を既知の汎関数として、次の積分形の付加条件

$$J = \int_{x_1}^{x_2} G(x, y, y') dx = C(\text{定数}) \quad (3.2.1)$$

のもとで次の汎関数の変分問題を考えよう。

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx \quad (3.2.2)$$

この問題の典型例として『周の長さを一定としたとき、それが囲む面積が最大となる図形は何か?』(Didoの問題と) いうのがあり、このことからこの種の変分問題を等周問題と呼んでいる。これは λ を未定乗数として、

$$\mathcal{F} = F - \lambda G \quad (3.2.3)$$

とおき、付加条件のない次の変分問題と等価になる。

$$\delta \int_{x_1}^{x_2} \mathcal{F} dx = 0 \longrightarrow \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y'} \right) = 0 \quad (3.2.4)$$

³ホロノミックや非ホロノミックについては最後の『おまけの蛇足』を参照されたし。

一般論をまとめておくと次のようになる。 m 個の積分形の付加条件

$$J_k = \int_{x_1}^{x_2} G_k(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y'_1, y'_2, \dots, y'_n) dx = C_k \quad (k = 1, 2, \dots, m) \quad (3.2.5)$$

のもとで

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y'_1, y'_2, \dots, y'_n) dx \quad (3.2.6)$$

の変分問題は λ_k を未定乗数として

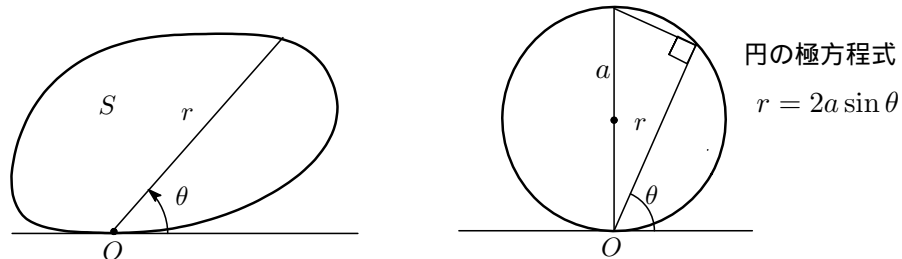
$$\mathcal{F} = F - \sum_{k=1}^m \lambda_k G_k \quad (k = 1, 2, \dots, m) \quad (3.2.7)$$

とおき、付加条件なしの

$$\delta \int_{x_1}^{x_2} \mathcal{F} dx = 0 \longrightarrow \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y_k} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y'_k} \right) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (3.2.8)$$

の変分問題となるということだね。さっそく問題をやってみよう。

- Ex-6: 周囲の長さ L で囲まれた面積 S を最大にするような滑らかな平面曲線を求めよ。



- ans-6: 曲線上の1点を極とし、その点での接線を基線とする曲線の極方程式を $r = f(\theta)$ とすると、曲線で囲まれた面積 S は

$$S = \int_0^\pi \frac{1}{2} r^2 d\theta \quad (3.2.9)$$

周囲の長さは

$$L = \int_0^\pi \left\{ \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 + r^2 \right\}^{1/2} d\theta \quad (3.2.10)$$

で与えられる。付加条件を伴う関数 S の変分問題はラグランジュの未定乗数法を使うことで次の関数 S の変分問題と等価となる。

$$S = S - \lambda L = \int_0^\pi \left[\frac{1}{2} r^2 - \lambda \left\{ \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 + r^2 \right\}^{1/2} \right] d\theta = \int_0^\pi F(r, r') d\theta \quad (3.2.11)$$

EL の式は第2話でてきた (2.1.4) の第 式

$$F = F(y, y') \longrightarrow F - y' F_{y'} = \text{const}$$

が使える。

$$T = \left\{ \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 + r^2 \right\}^{1/2} \longrightarrow \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 = T^2 - r^2$$

とおくと EL の式は

$$\frac{1}{2}r^2 - \lambda T + \lambda \frac{(dr/d\theta)^2}{T} = \frac{1}{2}r^2 - \lambda \frac{r^2}{T} = \text{const} \quad (3.2.12)$$

曲線上の1点で $r = 0$ となるので $\text{const} = 0$ とおける。これから

$$\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = 4\lambda^2 - r^2, \quad \therefore \frac{d\theta}{dr} = \frac{1}{(4\lambda^2 - r^2)^{1/2}} \quad (3.2.13)$$

これを解いて

$$\theta = \sin^{-1}\left(\frac{r}{2\lambda}\right) + C \quad (3.2.14)$$

積分定数 C は $r = 0$ で $\theta = 0$ なので $C = 0$ 。したがって

$$r = 2\lambda \sin \theta \quad (3.2.15)$$

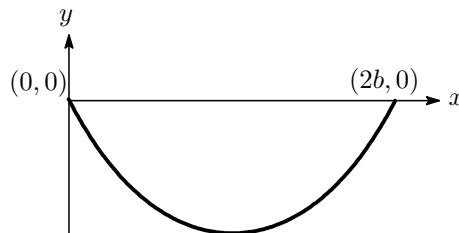
これは半径 λ の円を表す。付加条件 (3.2.10) より

$$L = \int_0^\pi 2\lambda d\theta = 2\pi\lambda, \quad \therefore \lambda = L/2\pi \quad (3.2.16)$$

- Ex-7: 長さ $2a$ の一様な線密度 ρ のロープが2点 $(x, y) = (0, 0)$, $(x, y) = (2b, 0)$ の間に懸けてある。ポテンシャルエネルギー

$$V = \rho g \int_0^{2b} y ds \quad (3.2.17)$$

を極小にする曲線 $y = y(x)$ を求めよ。ただし、 $b < a$ とする。



- ans-7: ロープの長さは $2a$ なので

$$\int_0^{2b} ds = \int_0^{2b} (1 + y'^2)^{1/2} dx = 2a \quad (3.2.18)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \int_0^{2b} \{\rho g y (1 + y'^2)^{1/2} - \lambda (1 + y'^2)^{1/2}\} dx \\ &= \int_0^{2b} (\rho g y - \lambda) (1 + y'^2)^{1/2} dx = \int_0^{2b} F(y, y') dx \end{aligned} \quad (3.2.19)$$

とにおいて EL の式は

$$F - y' F_{y'} = \frac{\rho g y - \lambda}{(1 + y'^2)^{1/2}} = c_1 \quad (c_1 = \text{const}) \quad (3.2.20)$$

$$\therefore \left(y - \frac{\lambda}{\rho g}\right)^2 = \left(\frac{c_1}{\rho g}\right)^2 (1 + y'^2)$$

$Y = y - \lambda/\rho g$ とおくと

$$Y^2 = \left(\frac{c_1}{\rho g}\right)^2 (1 + Y'^2) \longrightarrow \frac{dY}{\sqrt{Y^2 - k^2}} = \pm \frac{dx}{k} \quad (k = c_1/\rho g) \quad (3.2.21)$$

$$\therefore Y = k \cosh\left(\frac{x - c_2}{k}\right) \longrightarrow y = \frac{\lambda}{\rho g} + \frac{c_1}{\rho g} \cosh\left\{\frac{(x - c_2)\rho g}{c_1}\right\} \quad (c_2 = \text{const})$$

これは懸垂曲線を表す。3個の定数 λ, c_1, c_2 は付加条件 (3.2.18) と2つの境界条件から求まる。

• Ex-8 : $\int_0^1 \dot{x}^2 dt$ を次の条件の下で極小にせよ。

$$\int_0^1 x dt = 0, \quad \int_0^1 x t dt = 1, \quad x(0) = x(1) = 0 \quad (3.2.22)$$

• ans-8 : 付加条件が2つなので

$$\mathcal{F}(x, \dot{x}, t) = \dot{x}^2 - \lambda_1 x - \lambda_2 x t \quad (3.2.23)$$

とにおいて EL の式を求めると

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{x}} \right) = -(\lambda_1 + \lambda_2 t + 2\ddot{x}) = 0 \quad (3.2.24)$$

$$\therefore 2\ddot{x} + \lambda_2 t + \lambda_1 = 0$$

境界条件 $x(0) = 0$ を使ってこれを解くと

$$x = -\frac{1}{4}\lambda_1 t^2 - \frac{1}{12}\lambda_2 t^3 + C_2 t \quad (3.2.25)$$

第2境界条件 $x(1) = 0$ より

$$\frac{1}{4}\lambda_1 + \frac{1}{12}\lambda_2 - C_2 = 0 \quad (3.2.26)$$

付加条件より

$$\int_0^1 x dt = \int_0^1 \left(-\frac{1}{4}\lambda_1 t^2 - \frac{1}{12}\lambda_2 t^3 + C_2 t \right) dt = -\frac{\lambda_1}{12} - \frac{\lambda_2}{48} + \frac{C_2}{2} = 0 \quad (3.2.27)$$

$$\int_0^1 x t dt = \int_0^1 \left(-\frac{1}{4}\lambda_1 t^2 - \frac{1}{12}\lambda_2 t^3 + C_2 t \right) t dt = -\frac{\lambda_1}{16} - \frac{\lambda_2}{60} + \frac{C_2}{3} = 1$$

$\lambda_1, \lambda_2, C_2$ は (3.2.26) と (3.2.27) の連立方程式を解いて

$$\lambda_1 = -720, \quad \lambda_2 = 1440, \quad C_2 = -60$$

よって

$$x = -120t^3 + 180t^2 - 60t, \quad \int_0^1 \dot{x}^2 dt \text{ の極小値は } 720 \text{ となる。}$$

3.3 代数形の付加条件

• K氏 : 代数形の付加条件は一般的に

$$g_k(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y'_1, y'_2, \dots, y'_n) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, m) \quad (3.3.1)$$

という形で表される。この付加条件のもとで汎関数

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y'_1, y'_2, \dots, y'_n) dx \quad (3.3.2)$$

の変分問題は、 λ_k を未定定数として

$$\mathcal{F} = F - \sum_{k=1}^m \lambda_k g_k, \quad (3.3.3)$$

とおき、付加条件のない次の変分問題と等価になる。

$$\delta \int_{x_1}^{x_2} \mathcal{F} dx = 0 \longrightarrow \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y_k} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y'_k} \right) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (3.3.4)$$

• **Ex-9** : $x^2 + y^2 = 1$ の条件のもとで $\int_0^1 (x^2 + y^2 + 1)^{1/2} dt$ を極小にする曲線を求めよ。

• **ans-9** :

$$\mathcal{F} = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 1)^{1/2} - \lambda(x^2 + y^2 - 1) \quad (3.3.5)$$

\mathcal{F} に対する EL の式は

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{x}} \right) = 0 &\longrightarrow 2\lambda x + \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 1}} \right) = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{y}} \right) = 0 &\longrightarrow 2\lambda y + \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 1}} \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

ここで $x = \cos \theta, y = \sin \theta$ と変数変換すると $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{\theta}^2 = 1$ となるので上式は

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{\theta} \sin \theta}{\sqrt{1 + \dot{\theta}^2}} \right) = -2\lambda \cos \theta, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{\theta} \cos \theta}{\sqrt{1 + \dot{\theta}^2}} \right) = 2\lambda \sin \theta$$

となる。第1式の両辺に $\sin \theta$ を掛け、第2式の両辺に $\cos \theta$ を掛けて足しあわすと

$$\sin \theta \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{\theta} \sin \theta}{\sqrt{1 + \dot{\theta}^2}} \right) + \cos \theta \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{\theta} \cos \theta}{\sqrt{1 + \dot{\theta}^2}} \right) = \frac{\ddot{\theta}}{(1 + \dot{\theta}^2)^{3/2}} = 0, \quad \therefore \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{\theta}}{\sqrt{1 + \dot{\theta}^2}} \right) = 0$$

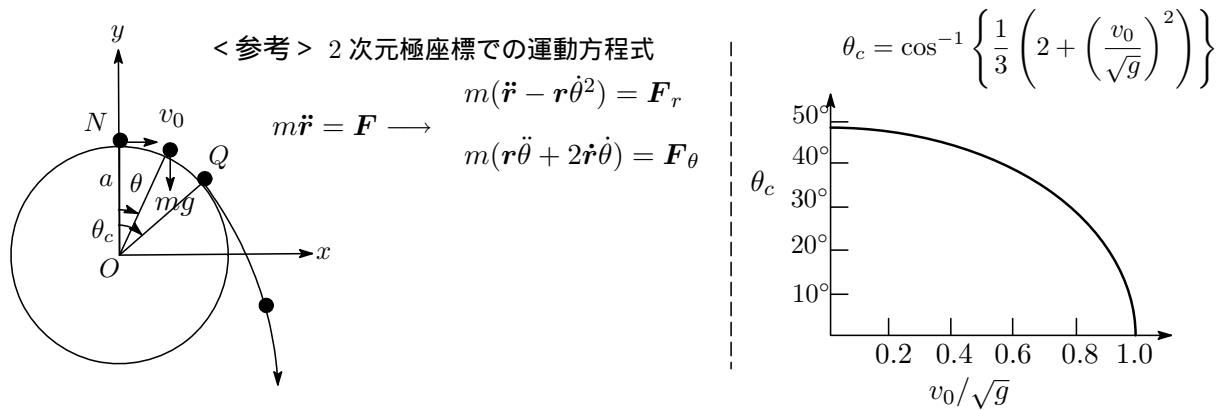
これから $\dot{\theta} = A$ (一定) とおくと $\theta = At + B$ (B : 一定)。したがって求める曲線は

$$x = \cos(At + B), \quad y = \sin(At + B) \quad (3.3.7)$$

極値は

$$\int_0^1 (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 1)^{1/2} dt = \int_0^1 (1 + A^2)^{1/2} dt = (1 + A^2)^{1/2} \quad (3.3.8)$$

• **Ex-10** : 一様な重力の下に固定され半径 a の滑らかな球面上の北極点 N から初速度 v_0 で質点が滑り落ち、球面上の点 Q で球面から離れて落下した。このとき、 $\angle NOQ$ は $\cos^{-1}(2/3)$ を超えないことを示せ。



<参考> 2次元極座標での運動方程式

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} \rightarrow \begin{cases} m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = F_r \\ m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = F_\theta \end{cases}$$

• ans-10 : $x = r \sin \theta, y = r \cos \theta$ とすると質点の運動エネルギー T 、位置エネルギー V は

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2), \quad V = mgr \cos \theta \quad (3.3.9)$$

ラグランジアン L は

$$L = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - mgr \cos \theta \quad (3.3.10)$$

束縛条件は

$$f = r - a = 0 \quad (3.3.11)$$

新たなラグランジアンを $\mathcal{L} = L - \lambda f$ とすると EL の式は

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 + g \cos \theta) - \lambda = 0 \quad (3.3.12)$$

$$\therefore m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 + g \cos \theta) = \lambda$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = m(r^2\ddot{\theta} + 2r\dot{r}\dot{\theta} - gr \sin \theta) = 0 \quad (3.3.13)$$

$$\therefore r^2\ddot{\theta} + 2r\dot{r}\dot{\theta} - gr \sin \theta = 0$$

(3.3.12) より λ は動径方向に働く束縛力を表し、 θ の関数となることが分かる⁴。束縛条件より $r = a$ なので、上式は

$$-ma\dot{\theta}^2 + mg \cos \theta = \lambda(\theta) \quad (3.3.14)$$

$$a\ddot{\theta} - g \sin \theta = 0 \quad (3.3.15)$$

となる。(3.3.15) に $\dot{\theta}$ を掛けて整理すると

$$a\dot{\theta}\ddot{\theta} - g \sin \theta \dot{\theta} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}a\dot{\theta}^2 + g \cos \theta \right) = 0, \quad \therefore \frac{1}{2}a\dot{\theta}^2 + g \cos \theta = C \quad (C: \text{定数}) \quad (3.3.16)$$

この式はエネルギー保存則を表している⁵。積分定数 C は初期条件 $\theta = 0 : a\dot{\theta} = v_0$ より $C = v_0^2/2a + g$ となるので

$$a\dot{\theta}^2 = 2g(1 - \cos \theta) + \frac{v_0^2}{a} \quad (3.3.17)$$

⁴ 図中の <参考> を参照されたい。

⁵ $\frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2 + mga \cos \theta = \text{一定}$

これを (3.3.14) に入れると

$$\lambda = -m \left\{ g(2 - 3 \cos \theta) + \frac{v_0^2}{a} \right\} \quad (3.3.18)$$

v_0 があまり大きくなければ

$$\lambda \simeq -mg(2 - 3 \cos \theta) \quad (3.3.19)$$

とおける。 $\cos \theta_c = 2/3$ で $\lambda = 0$ となるので、 $\theta_c = \cos^{-1}(2/3)$ なる点で質点は球面を離れる。束縛力 $\lambda > 0$ なので

$$2 - 3 \cos \theta_c < 0, \quad \therefore \theta_c < \cos^{-1}(2/3) \quad (3.3.20)$$

- K氏：以上で第3話を終了する。第4話は直接法について説明する予定。