第 4 話　直接法

4.1 直接法

- K 氏：いままで汎関数 $I[y] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')dx$ の停留関数 $y(x)$ を求めるのに両端固定の境界条件の下で EL 方程式（微分方程式）$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0$ を解いてその解を求めきた。しかし、微分方程式が解析的に解けるケースはごく限られていて、大抵はコンピュータを駆使した数値計算で解かれるのが普通だ。

  一方、EL 方程式を解く代わりに、求めるべき関数 $y(x)$ に対して適当なパラメータ（**変分パラメータ**と呼ぶ）を含んだもっともらしい近似関数 (**試行関数**：$trial\ function$) をとり、汎関数 $I[y]$ が停留値（極値) をとるようにパラメータを決めていくやり方がある。これを**直接法**という。その中で、近似関数を多項式

$$y(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n \tag{4.1.1}$$

  で表したり、適当な関数系 $\{\phi_i(x)\}$ の 1 次結合

$$y(x) = c_0\phi_0(x) + c_1\phi_1(x) + \cdots + c_n\phi_n(x) \tag{4.1.2}$$

  で表し、その係数を変分パラメータする方法を**リッツの方法**と呼んでいる。

- コニー：直接法というのは境界条件の下で EL の式を解いていくというのではなく、いきなり汎関数を極値にする $y(x)$ を定めるという方法ね。付加条件がついている場合にも適用できるのかしら。

- K 氏：うん、試行関数が付加条件を満たすようにしておけばよい。さて、リッツの方法は後で紹介するとして、次の非線型方程式の解を直接法で求めてみよう[1]。ε は十分小さいとしておく。$\varepsilon = 0$ とすれば調和振動子の微分方程式だね。

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \varepsilon x^3 = 0 \tag{4.1.3}$$

  この微分方程式を EL の式と見做すとラグランジアンは

$$L = \frac{1}{2}\left(\dot{x}^2 - \omega_0^2 x^2\right) - \frac{\varepsilon}{4}x^4 \tag{4.1.4}$$

  となる。求める解（停留関数）は作用積分[2]

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L dt \longrightarrow \delta I = 0 \tag{4.1.5}$$

---

[1] この非線形微分方程式は $Duffing$ 方程式と呼ばれる。詳細はレポート「対話・非線形振動（その 1）」を参照されたし。

[2] $\int_{t_1}^{t_2} L(x, \dot{x}, t)dt$ を作用積分という。

が停留値をとるものだ。いま ε が十分小さいので試行関数として A と ω をパラメータとする調和振動子の解を考える。すなわち

$$x(t) = A\sin\omega t \tag{4.1.6}$$

と置くとラグランジアンは

$$L = \frac{1}{2}(A^2\omega^2\cos^2\omega t - A^2\omega_0^2\sin^2\omega t) - \frac{\varepsilon}{4}A^4\sin^4\omega t \tag{4.1.7}$$

となる。境界条件は両端固定で $\delta x(t_1) = \delta x(t_2) = 0$ なので、任意の時刻 t_1, t_2 の区間を 1 周期 $(t_1 = 0, t_2 = 2\pi/\omega)$ と設定する。そうすると $\delta x(0) = \delta x(2\pi/\omega) = 0$ となるので境界条件を満たす。こうして

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi/\omega} Ldt = \int_0^{2\pi/\omega}\left\{\frac{1}{2}(A^2\omega^2\cos^2\omega t - A^2\omega_0^2\sin^2\omega t) - \frac{\varepsilon}{4}A^4\sin^4\omega t\right\}dt \\ &= \frac{1}{2}A^2\frac{\pi}{\omega}(\omega^2-\omega_0^2) - \frac{\varepsilon}{4}\frac{3}{4}\frac{\pi}{\omega}A^4 \end{aligned} \tag{4.1.8}$$

となる。汎関数 I はパラメータ A^2 の単なる関数となるので、I が極値をとる条件として

$$\frac{\partial I}{\partial A^2} = \frac{1}{2}\frac{\pi}{\omega}\left(\omega^2 - \omega_0^2 - \varepsilon\frac{3}{4}A^2\right) = 0$$

これから

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \varepsilon\frac{3}{4}A^2 = \omega_0^2\left(1+\frac{3\varepsilon}{4\omega_0^2}A^2\right), \quad \therefore\ \omega = \omega_0\left(1+\frac{3\varepsilon}{4\omega_0^2}A^2\right)^{1/2} \tag{4.1.9}$$

したがって近似解として

$$x(t) = A\sin\omega_0\left(1+\frac{3\varepsilon}{4\omega_0^2}A^2\right)^{1/2}t \simeq A\sin\omega_0\left(1+\frac{3\varepsilon}{8\omega_0^2}A^2\right)t \tag{4.1.10}$$

を得る。ところで (4.1.3) の厳密解は実は見出されていて

$$\frac{2\pi}{\omega} = \frac{4}{\omega_0}\int_0^{\pi/2}\left\{1+\varepsilon\frac{A^2}{\omega_0^2}\left(1-\frac{1}{2}\cos^2\theta\right)\right\}^{-\frac{1}{2}}d\theta \tag{4.1.11}$$

で与えられる。ε が十分小さいとして (4.1.11) の被積分項を展開して積分を実行すると

$$\frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega_0}\left(1-\frac{3\varepsilon}{8\omega_0^2}A^2+\cdots\right) \tag{4.1.12}$$

を得る。一方、(4.1.9) を展開し ε の 1 次の項までとると

$$\frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega_0}\left(1+\frac{3\varepsilon}{4\omega_0^2}A^2\right)^{-\frac{1}{2}} \simeq \frac{2\pi}{\omega_0}\left(1-\frac{3\varepsilon}{8\omega_0^2}A^2\right) \tag{4.1.13}$$

これは (4.1.12) と ε の 1 次の項で一致する。この例はうまい試行関数をとったから厳密解との一致精度が良かったわけだね。うまい試行関数を見つけるのこれといって決まった方法があるわけでなく、問題に応じて考えてやる必要があり、うまい選び方ができれば近似がよくなるが、そうでないときは当然精度が落ちる。

- コニー：変分法を使う場合、常にその辺りのことを留意しておく必要があるわね。
- K 氏：そうだね。次にリッツの方法を取り上げよう。

4.2　*Ritz* の方法

- K氏：近似関数を多項式か適当な関数系 $\{\phi_i(x)\}$ の 1 次結合で表す[3]。

$$\begin{cases} y(c) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} c_i x^i \\ y(x) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} c_i \phi_i(x) \end{cases} \tag{4.2.1}$$

係数 c_i を変分パラメータとすると、汎関数 $I[y]$ は c_i の単なる関数となるので

$$\frac{\partial I}{\partial c_1} = 0, \quad \frac{\partial I}{\partial c_2} = 0, \cdots, \frac{\partial I}{\partial c_n} = 0 \tag{4.2.2}$$

の連立方程式を解いて $c_1, c_2, \cdots, c_n$ を決める。 早速例題をやってみよう。

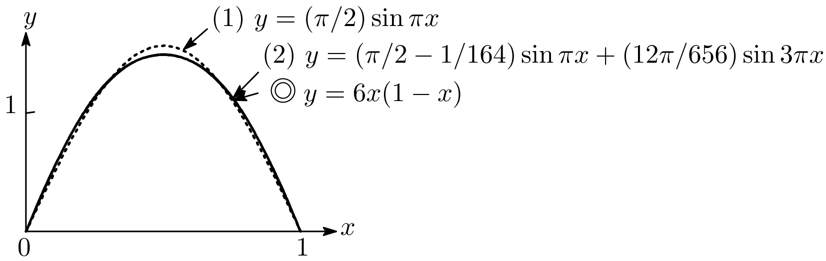
『境界条件 $y(0) = y(1) = 0$ と付加条件 $\displaystyle\int_0^1 y dx = 1$ の下で $I = \displaystyle\int_0^1 y'^2 dx$ を最小にする関数 $y(x)$ を直接法で求めよ。』

(1) 試行関数として境界条件は満たした三角関数 $y = c \sin \pi x$ とおいてみよう。付加条件より

$$c \int_0^1 \sin \pi x dx = 1, \quad \therefore c = \frac{\pi}{2} \tag{4.2.3}$$

これから $y = (\pi/2) \sin \pi x$ で、$I = \pi^4/8 = 12.176$ とあっさり求まった。

(2) 次に、近似精度を上げるために境界条件は満たした $y = c_1 \sin \pi x + c_2 \sin 3\pi x$ と置いてみる。付加条件より



$$c_1 \int_0^1 \sin \pi x dx + c_2 \int_0^1 \sin 3\pi x dx = \frac{2}{\pi}\left(c_1 + \frac{1}{3}c_2\right) = 1, \quad \therefore c_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}c_2 \tag{4.2.4}$$

試行関数のパラメータを c_2 で表して $y = (\pi/2 - c_2/3) \sin \pi x + c_2 \sin 3\pi x$ とし、I を c_2 の関数と見做す。

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 y'^2 dx = \frac{1}{72}\pi^2(9\pi^2 - 12\pi c_2 + 328 {c_2}^2) \\ \frac{\partial I}{\partial c_2} &= 0 \longrightarrow c_2 = 12\pi/656 \end{aligned} \tag{4.2.5}$$

この結果、$y = (\pi/2 - 1/164) \sin \pi x + (12\pi/656) \sin 3\pi x$ となり、$I = \displaystyle\int_0^1 y'^2 dx = 12.0276$ が得られる。この問題の正解は $y = 6x(1-x)$ で $I = 12$ なので、(1) に較べて近似精度はよくなっていることが分かる。

[3] 多項式で表されるのが一般的だが、境界条件が単純な場合は三角関数による展開が適している場合が多い。

- **Ex-11：** 境界条件 $y(0) = y(1) = 0$ の下で $\int_0^1 (y^2 - 12xy)dx$ を最小にする関数 $y(x)$ を直接法で求めよ。

- **Ans-11：**

  (1) 試行関数を境界条件を満たす最小次数の多項式 $y(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$ とする。境界条件より $c_0 = 0,\ c_1 = -c_2$ となるので

$$y(x) = cx(1-x) \qquad (c = c_1)$$

$$I[y] = \int_0^1 (y'^2 - 12xy)dx = -c + \frac{c^2}{3}, \quad \frac{dI}{dc} = 0 \longrightarrow c = \frac{3}{2}$$

  したがって求める関数 $y(x)$ は $y(x) = (3/2)x(1-x)$ となり、I の最小値は -0.75 となる。真の最小値は -0.8 なので、まずまずの近似といえる。

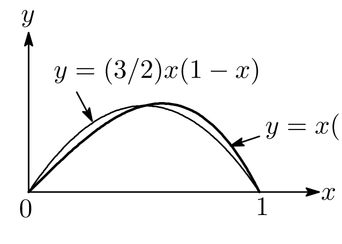
  (2) 次に 3 次の項までとり、$y(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3$ としてみよう。境界条件より $c_0 = 0,\ c_1 + c_2 + c_3 = 0$。したがって

$$y(x) = -(c_2 + c_3)x + c_2 x^2 + c_3 x^3, \quad I[y] = c_2 + c_2 c_3 + \frac{c_2^2}{3} + \frac{8}{5}c_3 + \frac{4}{5}c_3^2$$

$$\frac{\partial I}{\partial c_2} = 1 + \frac{2}{3}c_2 + c_3 = 0, \quad \frac{\partial I}{\partial c_3} = \frac{8}{5} + c_2 + \frac{8}{5}c_3 = 0$$

$$\therefore\ c_2 = 0, \quad c_3 = -1 \longrightarrow c_1 = 1$$

  したがって、近似関数は $y(x) = x - x^3$ となる。このとき I の最小値は -0.8 となり、真値と一致する。



- **Ex-12：** 境界条件 $y(0) = y(1) = 0$ をもつ常微分方程式 $y'' + x^2 y - x = 0$ をリッツの方法で解け。

- **Ans-12：** 上の微分方程式を EL 方程式とする関数 $F(x, y, y')$ は

$$F(x, y, y') = y'^2 - x^2 y^2 + 2xy \tag{4.2.6}$$

である。したがって汎関数

$$I[y] = \int_0^1 F(x, y, y')dx, \qquad y(0) = y(1) = 0 \tag{4.2.7}$$

が停留値をとる関数 $y(x)$ が与えられた微分方程式の解となる。 近似関数を多項式で展開して $y(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3$ とおく。境界条件より $c_0 = 0,\ c_1 + c_2 + c_3 = 0$ となるので

$$y(x) = -(c_2 + c_3)x + c_2 x^2 + c_3 x^3$$

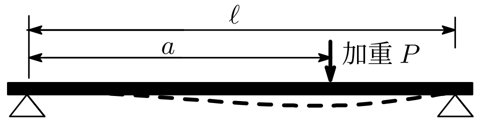
これを (4.2.7) に入れると

$$I[y] = -\frac{1}{6}c_2 + \frac{34}{105}c_2^2 + \frac{407}{420}c_2c_3 - \frac{4}{15}c_3 + \frac{488}{315}c_3 \tag{4.2.8}$$

次に $\partial I/\partial c_2 = 0,\ \partial I/\partial c_3 = 0$ の連立方程式を解いて $c_2 = -0.003294, c_3 = 0.174192$ を得る。したがって微分方程式の近似解は

$$y(x) = -0.170897x - 0.003294x^2 + 0.174192x^3$$

- **Ex-13：** 長さ ℓ の梁（はり）が $x = 0,\ x = \ell$ で支持されている。$x = 0$ から a なる点で y 方向に集中加重 P が作用したときのたわみ $y(x)$ を求めよ。ただし、$y(0) = 0,\ y(\ell) = 0$ である。



- **ans-13：** 梁のポテンシャルエネルギー V は、梁の材質のヤング率を E、断面 2 次モーメント I、曲げ剛性を EI とすると次式で与えられる。

$$V[y] = \frac{EI}{2}\int_0^{\ell}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)dx - Py(a)$$

V が停留値をとる $y(x)$ が求める解となる。境界条件を満足させるように正弦関数の線形結合を近似関数にとると

$$y(x) = c_1\sin(\pi x/\ell) + c_2\sin(2\pi x/\ell) + c_3\sin(3\pi x/\ell) + \cdots$$
$$\therefore\ y''(x) = -(\pi/\ell)^2\left\{c_1\sin(\pi x/\ell) + 2^2c_2\sin(2\pi x/\ell) + 3^2c_3\sin(3\pi x/\ell) + \cdots\right\}$$
$$V[y] = (\pi^4EI/4\ell^3)(c_1^2 + 2^4c_2^2 + 3^4c_3^2 + \cdots) - P\{c_1\sin(\pi a/\ell) + c_2\sin(2\pi a/\ell) + c_3\sin(3\pi a/\ell) + \cdots\}$$

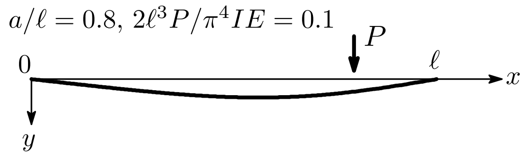
係数 $c_i\ (i = 1, 2, \cdots, n)$ は $\partial V/\partial c_i = 0\ (1 = 1, 2, \cdots, n)$ より

$$c_1 = \frac{2\ell^3P}{\pi^4IE}\sin(\pi a/\ell),\quad c_2 = \frac{2\ell^3P}{2^4\pi^4IE}\sin(2\pi a/\ell),\quad c_3 = \frac{2\ell^3P}{3^4\pi^4IE}\sin(3\pi a/\ell), \cdots,$$
$$c_n = \frac{2\ell^3P}{n^4\pi^4IE}\sin(n\pi a/\ell)$$

と求まる。したがって V に停留値を与えるたわみ関数 $y(x)$ は

$$y(x) = \frac{2\ell^3P}{\pi^4IE}\left\{\sin(\pi a/\ell)\sin(\pi x/\ell) + \frac{1}{2^4}\sin(2\pi a/\ell)\sin(2\pi x/\ell) + \cdots\right\} \tag{4.2.9}$$

ちなみに第 2 項までの近似では最大たわみ箇所が加重点よりずれている。



- K 氏：以上で第 4 話を終了する。最終回の第 5 話は変分法の応用例を取り上げる予定だ。