2015.06.05~

特殊相対性理論（その１）

●等速度で動いている人の時計は、静止している人の時計に比べてゆっくり進む！？

・速度Ｖで走っている電車があります。電車の高さLの天井から光が発射され、床下の鏡に反射されて元の位置まで戻ってくる実験をしました。光の速さをｃとします。(ｃ=30万km/秒)

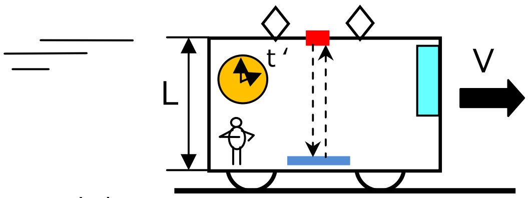
・電車に乗っているA君がストップウォッチで光が往復する時間を測りました。また地上で静止しているB子も同じようにストウォッチで光が往復する時間を測りました。

・この実験の終了後、A君とB子は互いのストップウォッチを見せ合いました。その瞬間、、、**『ギヤァ～!!』**という驚きの悲鳴が。。。なんと、２人のストップウォッチが示す時刻は異なっていました．．．！？　一体何が起こったのか、2人の頭は真っ白。

・しばらくして冷静さを取り戻した2人は、実験結果を落ち着いて考えてみようということにしました。

++++++++++++++++++++++++++++++++++++

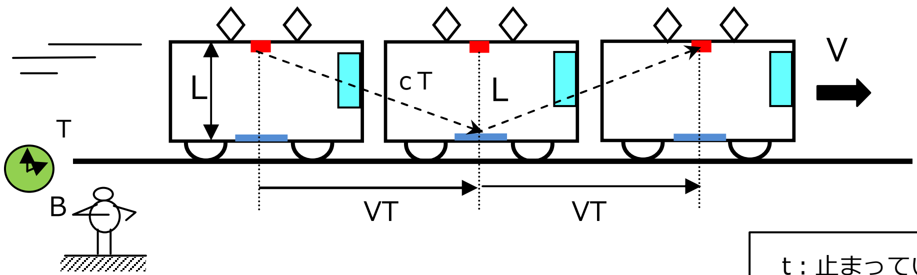
・**A**：天井から発射された光が床の鏡に反射し元の位置の戻るまでに進む距離は往復２Lだね。この間の時間はボクのストップウォッチで t′ 秒となったから



$$t' = \frac{2L}{c}$$

だよね。

・**B子：**そうね。ところでワタシは地上にいて実験を観察していたわ。
電車は速度Vで走っているので、光が床の鏡に達するまでの時間をTとすると、この間に電車はVTの距離進むわね。光は天井から発射されて床の鏡に達するまでに光速×時間＝ｃTの距離進むわ。絵を描くと



t：止まっているものの時間
t ′：動いているものの時間

$$t = \frac{1}{\sqrt{1-(V/c)^2}}t'$$

$$t' = \sqrt{1-(V/c)^2} \bullet t$$

といった感じね。天井の高さはLだから、ピタゴラスの定理からTを求めると

$$(cT)^2 = L^2 + (VT)^2, \quad \therefore \quad T = \frac{L}{\sqrt{c^2 - V^2}}$$

が得られるわ。片道の所要時間はTなので、往復では2Tよね。だから

$$2T = \frac{2L}{\sqrt{c^2 - V^2}} = \frac{(2L/c)}{\sqrt{1-(V/c)^2}}$$

となる。え～っと、ワタシの時計はｔ秒を示していたので、Ａ君の時計の時刻ｔ′とは

$$t = 2T = \frac{1}{\sqrt{1-(V/c)^2}}t' \qquad \left(t' = \frac{2L}{c}\right)$$

という関係になるのね！　つまり、電車に乗っているA君の時計は、地上で静止している私からみると

$$1\Big/\sqrt{1-(V/c)^2}$$

倍、ゆっくりと時間を刻んでいることになるんだわ！　実験では、電車はV=0.６cの速さで走っていたわね。だから $t = 1\Big/\sqrt{1-0.6^2}\ t'$ ＝１.25t′ となって、A君の時計の1.25秒が私の時計の1秒になるのよ。いいかえるとワタシの時計の10秒はA君の時計では8秒(=10÷1.25)を指しているということね。

・**A：**なるほど、さっきの実験結果とぴったり一致するね！　日常ではVは光速に比べて圧倒的に遅いのでV/c≒０となり、ｔ＝ｔ′となって時計の時を刻む速さは、動いていようと静止していようと同じになるわけだ。

・**B子：**そういうことね。日常生活では電波時計で時刻を合わせておきさえすれば、自宅にいようが新幹線の中

にいようが時間の刻み方は変わらず全く同じね。しかし、光速に近い速さで動くと事態は一変する。動いているものの時計は止まっているものの時計に比べて遅れるのね。

・**A：**高速で動く電車に乗っている人からすれば、自分は静止していて外の人が動いて見える。だから電車の中の人は外の人の時計が遅れて見えるんだ。

・**B子：**「本当はどっちが遅れているの？」と質問したい気になるけど、その質問自体意味がないのね。静止している人、動いている人それぞれが独自の時間の基準をもっていて、**「誰が見ても同じ進み方に見えるような絶対的な時間というものはない」**ということなのね。

≪絶対時間とは≫

絶対時間は、全宇宙のどの場所でも、どのように動いている星の上でも、地球上どの場所でも、どんな乗り物の上でも、永遠に同じ時を刻み続けている時間である。したがって同時刻に起こる2つの出来事は、動いていようと止まっていようと、何処にいようと同時刻であるという同時刻という同時刻の絶対性という特徴がある。

$$\text{動いているものの時間}\ (t') = \text{止まっているものの時間}\ (t) \times \sqrt{1 - \left(\frac{\text{動いているものの速さ}\mathbf{V}}{\text{光速度}\mathbf{c}}\right)^2}$$

$$\textbf{(1)}\ \mathbf{t' = t \times \sqrt{1-(V/c)^2}} \quad \Leftrightarrow \quad \textbf{(2)}\ \mathbf{t = t' \times \frac{1}{\sqrt{1-(V/c)^2}}}$$

Coffee Break

●宇宙旅行で若さが保たれる！？

超高速ロケットに乗って地球から宇宙の旅に出発すると、ロケットに乗っている人の時計は地球上の人から見れば地球の時計よりゆっくり時を刻みます。ロケットの速度がV=0.8cならロケットの中の人の時計の進み具合は、

$$t' = t \times \sqrt{1-0.8^2} = 0.6t$$

となり、地上の0.6になるので、地上での50年はロケットでは30年（＝0.6×50）にあたります。逆に、ロケットの人から地上を見れば

$$\mathbf{t = t' \times \frac{1}{\sqrt{1-0.8^2}}} \approx 1.7t'$$

で、ロケットの1年は地上での1.7年の長い時間に相当し、ロケットの50年は地上では30年(=50÷1.7)になります。時の進み具合のズレは**一方から相手を見た場合**であって、それはそれで正しく、正しい相手の時間の見方をしています。止まっている人、動いている人、それぞれが独自の時間の基準（これを**固有時**といいます）をもっていて、自分からすれば相手は確かに遅れており、また、相手もそう思っています。これが**時間の相対性**ということです。

ロケットの中の人が**自分の時計**を見れば、いつも通りと変わらず動いているので、普段通り年をとっていきます。

（つづく）

特殊相対性理論（その２）

●等速度で動いている棒は、静止している人からみれば縮んで見える！？

・**A**：時計の遅れの実験結果をうまく説明できてホットしたところだが、またまたギョッと驚く実験結果があるようなんだ。これを**ローレンツ収縮**と呼んでいるらしい。

・**B子：**どういうこと。ヒョットして「動いている棒は静止している人から見ると縮んで見える」というヤツ？

・**A**：そっ、そうなんだ！　光速に近い速度で動く棒は、べつに押し潰しも何もしないんだが、静止している観測者には縮んで見えるというんだね。そんなバカなことがと思うんだけど、例の時計の遅れの一件もあったように、光速に近い速さで動くと何やら不思議なことがおこるんだね。

・**B子：**そうね。。。だけど不思議がってばかりもいてられないわ。一緒に考えてみましょう。

～ということで、2人は次のような実験をやることに～

電車の外で静止している観察者Xは、速度Ｖで走っている電車の片壁から光が発射され、時間 t_1 後に対向する壁に設置された鏡に達し、反射された光は時間 t_2 後に元に戻ってくることを観測した。観察者Xから見た電車の全長はLであった。電車に乗っている観察者Yからすれば電車は静止して見える。観察者Yから見た電車の全長はL′であった。果たしてLとL′は同じなのか、異なってしまうのか？

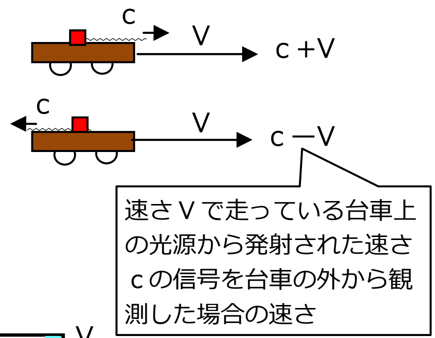
・**A：**え～っと、静止している観測者Xの立場から考えるよ。Xから見た電車の全長はLだね。さて、光が発射されて向こうの壁に達するまでの所要時間が t_1、光源は電車の速度Vで走っているのだから光が進んだ距離は（c+V）t_1 となるね。この間の電車の移動距離は Vt_1 だから

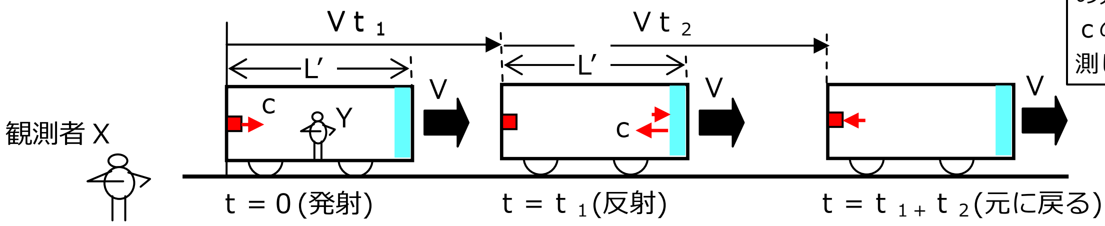
$$(c+V)t_1 = L' + Vt_1 \quad これから \quad t_1 = L'/c$$

同じように考えて、反射された光が元の位置に戻る時間を t_2 とすると

$$(c-V)t_2 = L' - Vt_2 \quad これから \quad t_2 = L'/c$$

と求められるね。絵を描くと下の図のようになる。





さて、これから先どう考えればばいいのかなぁ～

・**B子：**そうねぇ、特殊相対性理論の「**光速は光源の運動状態にかかわらず常に一定のｃとなる**」という特殊相対性理論が主張する『**光速度不変の原理**』を使えばいいのじゃない。つまり、上の式のｃ＋Vもｃ－Vも光速度ｃに置き換えるのよ。

・**A**：Oh! そうか。。。そうすると

$$ct_1 = L' + Vt_1 \quad より \quad t_1 = L'/(c-V)$$

$$ct_2 = L' - Vt_2 \quad より \quad t_2 = L'/(c+V)$$

となるね。光の往復に要した時間をｔとするとこれらの和だから

$$t = t_1 + t_2 = \frac{L'}{c-V} + \frac{L'}{c+V} = \frac{2cL'}{c^2 - V^2} = \frac{2L'/c}{1-(V/c)^2}$$

となった(^^);。

・**B子：**そうね。次は電車の同乗している観測者Yの立場から考えましょう。まずYは電車の全長をLとしているわね。光が往復の要した時間をｔ‘とすると、光が進んだ距離は往復で２Lだから

$$t' = \frac{2L}{c}$$

となるわ。次に、この関係式を使ってA君が導いた先ほどの式を変形していくと

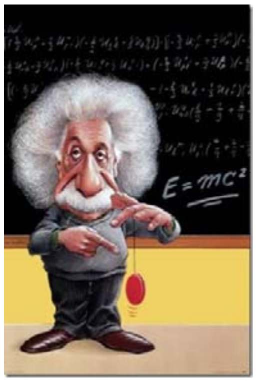
$$t = t_1 + t_2 = \frac{2L'/c}{1-(V/c)^2} = \frac{L'}{L} \bullet \frac{t'}{1-(V/c)^2}, \quad \therefore \quad \frac{t}{t'} = \frac{L'}{L} \bullet \frac{1}{1-(V/c)^2}$$

が得られるわね。

・**A**：うん、なにやら山場に差し掛かってきたみたいだね。

・**B子：** そうね。さて、走っている時計は止まっている時計よりゆっくりと時を刻んだわね。つまり、

$$\frac{t}{t'} = \frac{1}{\sqrt{1-(V/c)^2}}$$



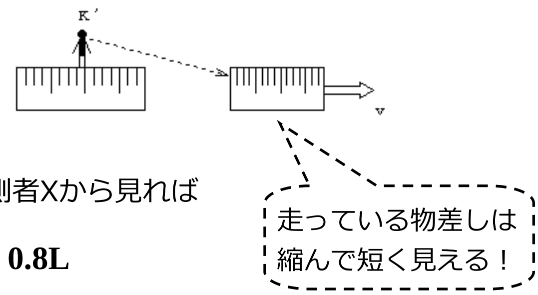
という関係を使いましょう。そうすると

$$\frac{t}{t'} = \frac{L'}{L} \bullet \frac{1}{1-(V/c)^2} = \frac{1}{\sqrt{1-(V/c)^2}}$$

となって、これから

$$L' = \sqrt{1-(V/c)^2}\,L$$

が得られるわ。Lは電車の中の観測者Yが測った電車の全長、いいかえると電車が静止しているときの全長ね。一方、L′は静止している観測者Xから見た動いている電車の全長なので、動いている電車の全長は静止している観測者Xからみて電車の動いている方向に



$$\sqrt{1-(V/c)^2}$$

だけ縮んで見えることになるわけね！

・**A：** なるほど、V=0. 6 cで走っている電車の全長を静止している観測者Xから見れば

$$L' = \sqrt{1-(V/c)^2}\,L = \sqrt{1-0.6^2}\,L = 0.8L$$

となって、確かに縮んで見える！！

・**B子：** これでめでたしめでたしね。ところで、ここで注意しておかなければならない点があるわ。

・**A：** どういうことだい？

・**B子：** それば動いている電車に乗っているYからすれば、電車の外にいるXの方が動いているということよ。つまり今まで観測者Xを中心に考えてきて、Yの時計が遅れているとか、Yが見た電車の全長が縮んだとしてきたけど、観測者Yからすれば同じようなことがXについていえるということね。つまり、時間の遅れとか、長さが縮むということは見る立場によって異なるでしょう。つまり相対的なのよ。

・**A：** そうだね。あいつの時計は絶対的に遅れているとか、あいつの持っている棒は絶対的に縮んでいるといっても、言われた相手からすれば、言っている方の時計が遅れているし、縮んでいることになるわけだ。つまり、世の中「絶対」というモノはないということがアインシュタインの相対性理論の骨子なんだね。

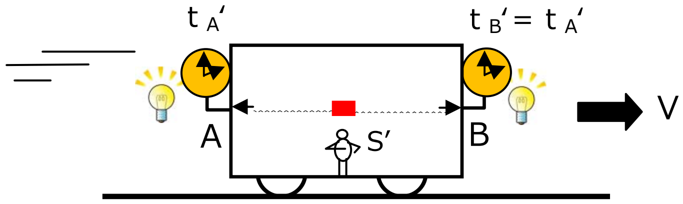
・**B子：** そういうことね。アインシュタインが偉いのは、光源がどんな速さで動いていようと、光の速さは常に一定ということを洞察したところにあると思うわ。

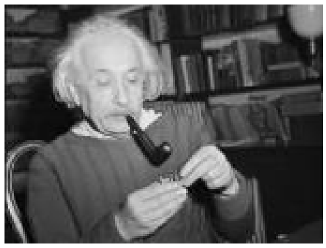
・**A：** すごいね！

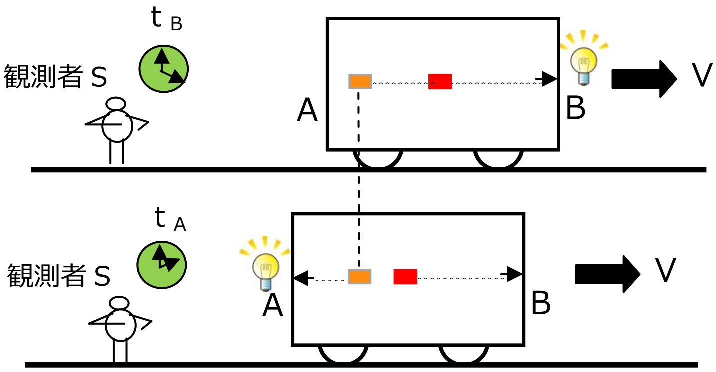
（つづく）

特殊相対性理論（その３）

●同時刻は見る立場で同時刻でない！？







・**A**：まやまた頭を錯乱させるようなことがあるらしい。それは何かと言うと、自分にとって二つのことが同時に起こっても、他人から見るとそれは同時ではないということらしいんだ。

・**B子：**二つの出来事が同時かどうかは、観測する人の相対的な動きによって決まるという、いわゆる「**同時刻の相対性]**というものね。

・**A：**エッ！知っているの！？

・**B子：**ワタシも聞き齧（かじ）りヨ。詳しいことは知らないけど、**「光速度不変の原理」**が関係しているとのことだわ。

・**A：光速度不変の原理**って、動いている棒は静止している人から見れば短く見えるというローレンツ収縮のところで登場したアレかい？

・**B子：**そうね、光源が動いていようと静止していようと**光の速さは一定**というモノね。そのことは兎も角として、折角だから同時刻の相対性を一緒に考えてみましょう。

・**A：**了解。電車の中央に光源があって、ある瞬間にパッと光ったとしよう。壁A、Bには受光器がセットされていて、光が到達した時点でランプA、Bが光るようになっている。光は左右の壁に向かって進む。さて、電車の中の観測者S′は、壁A,Bのランプが同時に光ったことを観測し、壁A、壁Bの光った時刻をそれぞれ t_A'、t_B'として $t_B'= t_A'$と記録した。

一方、電車の外から観測していた観測者Sは壁A、Bへの光の到達時刻をどのように記録したかということだが。。。

・**B子：**そうね。。。まず、到達時刻を t_A、t_Bとしておきましょう。さて、t_A時間の間に壁Aは電車の進行方向にVt_A（=電車の速さ×時間）進んでいるわね。いま、観測者Sから見た電車の全長を２Lとすると、光源から出た光が壁Aに到達するまでに飛んだ距離は、電車の移動距離分短くなるので

$$L - Vt_A$$

となるわね。ところで光の速さは電車の移動速**度**に関係なく一定（光速度不変の原理）なので、光が壁Aに到達する時刻 t_Aは、光の飛んだ距離を光の速さで割ればいいので

$$t_A = \frac{L - Vt_A}{c}, \quad \therefore\ t_A = \frac{L}{c+V}$$

と求められるわね。

・**A：**なるほど、そうだね。そうすると光が壁Bに到達する時刻t_Bはというと、壁Bは速さVで遠ざかっているので、その分余計に距離が長くなる。つまり

$$L + Vt_B$$

となるね。そうすると光が壁Bに到達する時刻t_Bは、先ほどB子がやったように光の飛んだ距離を光の速さで割ればいいので

$$t_B = \frac{L + Vt_B}{c}, \quad \therefore\ t_B = \frac{L}{c-V}$$

となる。

・**B子：**そうね。t_Aとt_Bの値が異なっているわ。つまりランプAとランプBの光る時刻は異なって観測されるのよ。2つの時間の差をとってみればどうなるかしら。

・**A：**OK！　やってみよう。$t_B - t_A$を計算すると

$$t_B - t_A = \frac{L}{c-V} - \frac{L}{c+V} = \frac{2LV}{c^2 - V^2} = \frac{2L}{c} \bullet \frac{V/c}{1-(V/c)^2} > 0$$

となった。ということは

$$t_B > t_A$$

だね。

・**B子：**そう、ランプAが光った時はまだランプBは光っていないのよ。ランプBは遅れて光るのね。

・**A：**わ、そうなんだ！！　電車の乗っている観測者S′はランプAとランプBが**同時**に光ったことを観測したけど、電車の外で静止している観測者Sはそれぞれ**ランプA、Bは異なる時刻で光った**と観測したわけだね。

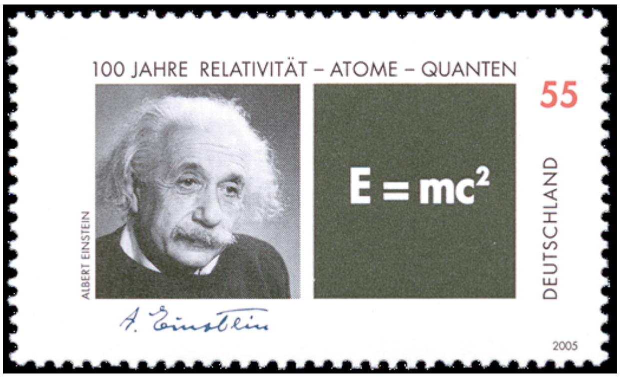
・**B子：**そういうことね。つまり、**同時刻というのは見る立場によって異なり、絶対的なものじゃない**ということね。

・**A：**これが**「同時刻の相対性」**というやつか。

・**B子：**ふ～、おつかれさま～。

・**A：**　さぁ、気晴らしにCoffeeでも飲みに行こうか。最近いいお店を見つけたんだ。

・**B子：**そう、それはいいわね。さっそく行きましょう！！



（つづく）

少し長い CoffeeBreak となってしまいましたが、寛ぎながら一読いただければ＾＾）

特殊相対性理論（Coffee Break）

◆動く物体の質量は増える！？

◆ローレンツ変換とは？

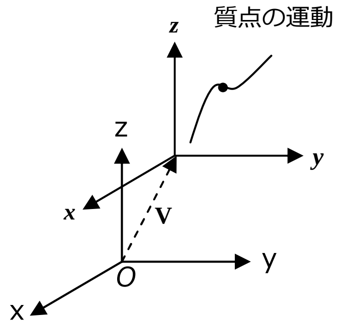
・**A：**特殊相対性理論というのは、最も基本的な仮定としてたった 2 つの原理をもとに構築されているんだね。

・**B 子：**2 つの原理は「**Einstein の相対性原理**」と「**光速度不変の原理**」というモノね。改めて書いておくと

(1) **Einstein の相対性原理：**物理学の基本法則は、すべての慣性系で全く同じ形で表される。

(2) **光速度不変の原理：**すべての慣性系で、光の真空中における速度は、光源の運動状態によらず一定値の値をとる。

・**A：**慣性系ということだけど、力学で質点の運動を考えるとき、まず xyz 座標を設定し、その空間での質点の位置(x,y,z)がどのように時間変化していくか、運動方程式を立てて調べていく。このとき。質点の入っている器というか、空間そのものが動いているとかじっと静止しているとか、という ことは特別に意識していないよね。



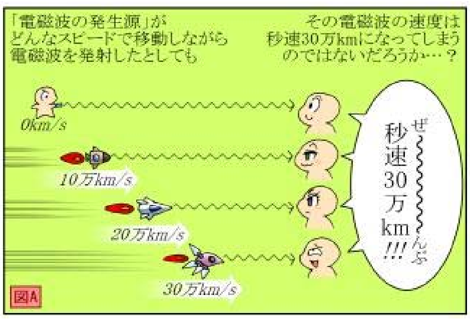
慣性座標系とは
絶対座標系(*x,y,z*)に対して等速度 *V* で動いている座標系。
質点の運動状態には何の影響も及ぼさない！

・**B 子：**そうね。慣性系とかガリレイ系といわれるけど、これはニュートンの運動の第 1 法則「**慣性の法則**」が成立する座標系ね。慣性の法則というのは、運動する物体に力が働かないとき、その物体は運動状態を変えずにいつまでも等速直線運動を続けるというモノね。早い話、慣性系というのは xyz 空間の器自体がある絶対的な基準に対して**等速直線運動**している座標系ということね。仮に直線でなく曲線運動すれば速度が変化するので等速にはならないわね。それは兎も角として、座標系が等速運動していても質点に力は一切及ぼさないから、質点の運動には何の影響もないのよ。

・**A：**うん、そうだね。ところで慣性系は 1 つとは限らないわけだ。ある慣性系に対して、等速度直線運動する座標系もまた慣性系ということになるね。

・**B 子：**そうね。Einstein の相対性原理は、いろいろな慣性系が考えられるけど、特別な慣性系というモノはない。**物理法則はすべての慣性系でまったく同じように書き表される**ということを主張しているわけね。

・**A：**よく、特殊相対性理論は加速度運動する物体は取り扱えないといったことを聞いた入りするけど、これは誤解だね、慣性座標系の中で加速度運動する物体は特殊相対性力学でキチンと記述できる。誤解のポイントは慣性座標系が加速度運動をする場合だ。これはもはや慣性座標系とは言えないので、特殊相対性理論の適用外となる。このような場合は**一般相対性理論**が必要になるんだね。



・**B 子：**その通りよ。よく勉強しているわね。

・**A：**それほどでもないけど、大事なポイントだからね。ところで、(2)番目の原理なんだけど、通常、速度 V で走っている電車に乗車している人が速度 v で電車の走行方向にボールを投げたら、電車の外にいる人が見れば V+v の速度でボールが飛んでいくことが観測されるし、逆に電車の走行方向と逆方向に投げれば V−v の速度でボールがとんでいくことが観測される。いわゆる速度の加法則というモノで、ニュートン力学での話。**特殊相対性理論での速度の加法則**はどうなっているんだい。

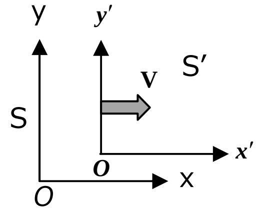
・**B 子：** そうね、特殊相対性理論では電車の外から見たボールの速度をｗとすると

$$\boldsymbol{w} = \frac{\boldsymbol{V} \pm \boldsymbol{v}}{1 + \dfrac{\boldsymbol{V} \times \boldsymbol{v}}{\boldsymbol{c}^2}}$$

となる。±の符号は順方向か逆方向を意味しているのね。

・**A：**ちょっとまってよ~、ボールの速度 v を光速 c とすると…オッと、たしかに w = c になるね。ついでに電車の速度も V = c と光速にすると、、、これも w = c となる。なるほど、光速を超えることはないんだ！

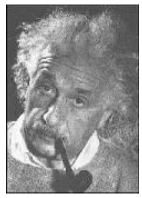
・**B 子：**私達の日常では電車の速度もボールの速度も光速度よりはるかに小さいでしょう。だから先ほど出てきた式の分母のところは 1 になってしまい、w＝V ± v というよく見慣れた式になるのね。つまり、ニュートン力学の速度の加法則は厳密な式ではなく近似式ということね。



・**A：**そういうことなんだ、どんなものでも光速を超えることができないことは B 子の説明で式的にはわかったけど、なぜだろうかという疑問が残っちゃう。。。

・**B 子：**もっともだわ。特殊相対性理論では速度 v で運動する物体のエネルギー E は

$$\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{m}_0 \boldsymbol{c}^2}{\sqrt{1-(\boldsymbol{v}/\boldsymbol{c})^2}}$$



で与えられ、v/c が非常に小さい場合、右辺を展開して整理すると

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{m}_0\boldsymbol{c}^2\left(1-\frac{\boldsymbol{v}^2}{\boldsymbol{c}^2}\right)^{-1/2} = \boldsymbol{m}_0\boldsymbol{c}^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{m}_0\boldsymbol{v}^2 + \frac{3}{8}\boldsymbol{m}_0\boldsymbol{v}^2\left(\frac{\boldsymbol{v}^2}{\boldsymbol{c}^2}\right) + \cdots \approx \boldsymbol{m}_0\boldsymbol{c}^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{m}_0\boldsymbol{v}^2$$

となる。m_0 は静止質量と呼ばれる。右辺の第 1 項は v=0 でも質量 m_0 の物体は $E=m_0c^2$ のエネルギーをもつことを示し、m_0c^2 を**静止エネルギー**と呼んでいる。これは**質量とエネルギーは同等である**という画期的な発見になったの。第 2 項はニュートン力学の運動エネルギーで、相対論的エネルギーE から静止エネルギーを差し引いたものに相当し、速度が小さい時の近似だわね。

そのことは兎も角として、（慣性）質量に光速 c の 2 乗を掛けたものがエネルギーと同等だとすると、運動している物体の質量はエネルギーE を光速 c の 2 乗で割ったもの（E/c^2）と考えることもできる。そうすると、運動する物体の質量 E/c^2 は、速さが大きくなればなるほど増大することになるわね。運動する物体の質量を M、静止しているときの質量を m_0 として、この 2 つの関係を式で表すと、

$$\boldsymbol{M} = \frac{1}{\sqrt{1-(\boldsymbol{v}/\boldsymbol{c})^2}}\boldsymbol{m}_0$$

となることが導かれる。M をとくに**相対論的質量**と呼んでいるわ。v が光速に近づけば M は無限大に大きくなっていくわね。そこで、ロケットが推進力をドンドンあげてスピードを増していく場合を考えましょう。スピードの増加とともにロケットの質量はドンドン増加し、その結果、次第に速く動くことができなくなってくるわね。ロケットが光速に達すると質量は無限大になるので、それ以上ロケットのスピードが上がらなくなるでしょう。このようなことが、どんなものでも光速 c を超えることはできないという理由なのね。

・**A：**う~ん、質量とエネルギーは同等という発見はすごいね。僕の疑問も氷解したよ。

ちょっとここらで、特殊相対性理論の基本となる公式をまとめておこう。慣性系 S (x、y、z)に対して x 軸方向に速度 V で等速直線運動している慣性系を S‘(x′,y′,z′)とする。そうすると各慣性座標系への変換公式（**ローレンツ変換**）をまとめておくと次のようになる。

$$\boldsymbol{x}' = \frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{V}\boldsymbol{t}}{\sqrt{1-(\boldsymbol{V}/\boldsymbol{c})^2}}, \qquad \boldsymbol{y}' = \boldsymbol{y}, \qquad \boldsymbol{z}' = \boldsymbol{z}$$

$$\boldsymbol{t}' = \frac{\boldsymbol{t}-\boldsymbol{V}\boldsymbol{x}/\boldsymbol{c}^2}{\sqrt{1-(\boldsymbol{V}/\boldsymbol{c})^2}}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\boldsymbol{x} = \frac{\boldsymbol{x}'+\boldsymbol{V}\boldsymbol{t}'}{\sqrt{1-(\boldsymbol{V}/\boldsymbol{c})^2}}, \qquad \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}', \qquad \boldsymbol{z} = \boldsymbol{z}$$

$$\boldsymbol{t} = \frac{\boldsymbol{t}'+\boldsymbol{V}\boldsymbol{x}'/\boldsymbol{c}^2}{\sqrt{1-(\boldsymbol{V}/\boldsymbol{c})^2}}$$

左表の V を－V
にしたもの

ニュートン力学のように時間 t を特別扱いしていない。時間も位置座標と同じように変換されるという点が特殊相対性理論のいろいろな結論を導き出す大きなキーとなっているんだね。

・**B 子：**そういうことね。ニュートン力学では x,y,z の位置空間だけを設定し、時間はパラメーターというか特別扱いしていたわね。ところが特殊種相対性理論では時間に光速 c を掛けた c t を第 4 番目の座標軸とする 4 次元時空間という座標系を考えるわけね。4 番目の座標軸の目盛として時間 t に光速 c を掛けるのは x,y,z と同じ長さの次元（[t]×[L]/[T]=[L]）とするためね。

・**A：**いわゆるミンコウスキー空間という奴だね。オッと Coffee が冷めないうちにどうぞ。

・**B 子：**ここの Coffee はなかなかいけるわね！　ところで先ほど A 君がまとめてくれたローレンツ変換の公式を使って少し今までの復習をしてみましょう、まだ時間はあることだし。。。

・**A：**うん、それはいいだけど、どういうことだい？

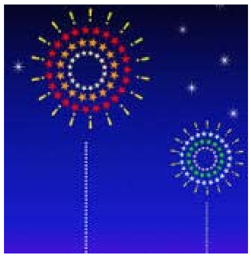
・**B 子：**そうね、その 3 で「同時刻は見る立場で同時刻でない」というのを見てきたでしょう。このことをローレンツ変換を使って復習しようということよ。たとえば爆発だとか光が発射されるという事件が起こったとしましょう。その事件がいつ、どこで起こったかを指定するのに 1 つの慣性系 S を考え、事件が起こった場所を x 、時刻を t とするわね。同じ事件を慣性系 S に対して x 軸方向に速度 V で走っている別の慣性系 S′の人が見て、事件は場所 x' 、時刻 t' 起こったと主張する。 2 人の時計は S,S'の座標原点が一致したときに、時計も一致していたとする。この S,S′の 2 人が指し示す場所と時間の間の関係式が**ローレンツ変換**と呼ばれるものね。

$$x' = (x - Vt)\Big/\sqrt{1-\beta^2}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \left(t - Vx/c^2\right)\Big/\sqrt{1-\beta^2} \qquad (\beta = V/c)$$

さて、まったく勝手な 2 つの事件 A、B を考えましょう。事件 A に対しても事件 B に対しても

$$x_A' = (x_A - Vt_A)\Big/\sqrt{1-\beta^2}, \quad t_A' = \left(t_A - Vx_A/c^2\right)\Big/\sqrt{1-\beta^2}$$

$$x_B' = (x_B - Vt_B)\Big/\sqrt{1-\beta^2}, \quad t_B' = \left(t_B - Vx_B/c^2\right)\Big/\sqrt{1-\beta^2}$$



が成り立つわね。ここから問題よ。

（1）慣性系 S で事件 A、B が**「同じ場所」**で**「異なる時間」**に起こったとき、つまり $x_A = x_B$ かつ $t_A \neq t_B$ の場合、慣性系 S′の人からすると

$$t_B' - t_A' = (t_B - t_A)\Big/\sqrt{1-\beta^2}, \quad x_B' - x_A' = -V\,(t_B - t_A)\Big/\sqrt{1-\beta^2}$$

となるわね。この式をよく見ると $t_A \neq t_B$ なので $x_B' \neq x_A'$ となって、慣性系 S′では**2 つの事件 A、B は同じ場所で起こっていない！**　また、2 つの事件は慣性系 S では $t_B - t_A$ の時間間隔で起こったけど、慣性系 S′では**それよりも長い時間間隔 $t_B' - t_A'$ で起こった！**ことになるわね。S と S′では時計の時刻の刻み方が異なるのね！

（2）慣性系 S で事件 A、B が**「同じ時間（同時）」**に**「異なる場所」**で起こったとき、つまり $t_A = t_B$ かつ $x_A \neq x_B$ の場合、慣性系 S′の人からすると

$$t_B' - t_A' = -V\,(x_B - x_A)\Big/c^2\sqrt{1-\beta^2}, \quad x_B' - x_A' = (x_B - x_A)\Big/\sqrt{1-\beta^2}$$

となるわね。2 番目の式からは。慣性系 S′においても 2 つの事件は異なる場所で起こっている。このことは特にどうっていうこともないけど、1 番目の式を見て頂戴。慣性系 S′では**2 つの事件 A、B は同時には起こっていない！**わね。

・**A：** う~ン、同時というのは慣性系によって異なるということはその３で見てきたけど、ローレンツ変換の式を使うとアッサリとでてくるわけだね。その２で「動いている棒は縮んで見える」というのを見てきたけど、ローレンツ変換の公式をつかえばこれまたアッサリとでてくるんだね。

・**B 子：** そうね、折角だから TRY してみる？

・**A：** OK! やってみよう。まず、"長さ"というモノは、ある慣性系で、**棒の両端の位置を同時に測らなければならなかった**。いま、棒は慣性系 S′で静止しているとする。慣性系 S から見れば速度 V で x 軸方向に動いているわけだね。S からみた棒の長さ ℓ は、同時刻 $t_A = t_B = t$ における棒の両端の位置の差 $|x_B(t) - x_A(t)|$ だから

$$\ell = |x_B(t)\text{-}x(t)|$$

と表される。S での棒の両端の位置 x_A, x_B は、S′では $t_A = t_B = t$ としてローレンツ変換により

$$x_A{}' = (x_A - Vt)\Big/\sqrt{1-\beta^2}, \quad x_B{}' = (x_B - Vt)\Big/\sqrt{1-\beta^2}$$

と表されるね。。。え~っと、それから S′系での同時刻を設定しなければ。。。ウ~ん！？

・**B 子：** ちょっと待って、この式で注意すべき点は S′での時間 t' 含まれていないでしょ。つまり、S′での同時刻での棒の両端の位置ととらえればいいのじゃないの。

・**A：Oh!** そうだね、うっかりしてそこに気がつかなかった。S′で静止している棒の長さを ℓ_0 とすると、ℓ_0 は

$$\ell_{\mathbf{0}} = \left|x_B{}' - x_A{}'\right| = |x_B - x_A|\Big/\sqrt{1-\beta^2} = \ell\Big/\sqrt{1-\beta^2}$$

となる。これから

$$\ell = \ell_0\sqrt{1-\beta^2}$$

がでてくるね。

・**B 子：** まだ少し余白が残っているようなので、ちょっと次のことを考えてみようかしら。先ほど時間軸を加えた４次元時空間のことについて少し触れたわね。４次元空間での微小体積要素を dv とすると dv=dx·dy·dz·dt となる。棒の長さが縮んだり、時間が遅れたりするんだけど、４次元空間での微小体積要素はローレンツ変換に対して不変になるかどうかということ。

・**A：** そうだな、長さは x 方向だけがローレンツ変換をうけ、y と z 方向の長さは変化しないよね。つまり

$$dx' = d(x_A{}' - x_B{}') = d(x_A - x_B)\sqrt{1-\beta^2} = dx\sqrt{1-\beta^2}, \quad dy = dy', \quad dz = dz'$$

となる。３次元空間の微小体積要素はローレンツ変換で $dx'dy'dz' = dxdydz\sqrt{1-\beta^2}$ と変わるが、時間

$$dt' = dt\Big/\sqrt{1-\beta^2}$$

を加味すると

$$dv' = dx'dy'dz'dt' = dxdydz\sqrt{1-\beta^2} \times dt\Big/\sqrt{1-\beta^2} = dxdydzdt = dv$$

となって、４次元空間での微小体積要素はローレンツ変換に対して不変ということになるね。

・**B 子：** そうね、長さが縮む分、時間の伸びがそれを打ち消して微小体積要素は不変になるということね。さぁ、そろそろ Coffee Break を終わることにして、引き上げましょうか。

・**A：** 了解！！

（つづく）

特殊相対性理論（その４）

●ガレージのパラドックス

・自動車と車庫の静止長は同じＬとする。

・自動車がV=0.8cの速さで車庫に向かって走っている。このとき車庫にいる人から自動車を見れば、自動車はローレンツ収縮して

$$L' = \sqrt{1-(0.8)^2}L = 0.6L$$

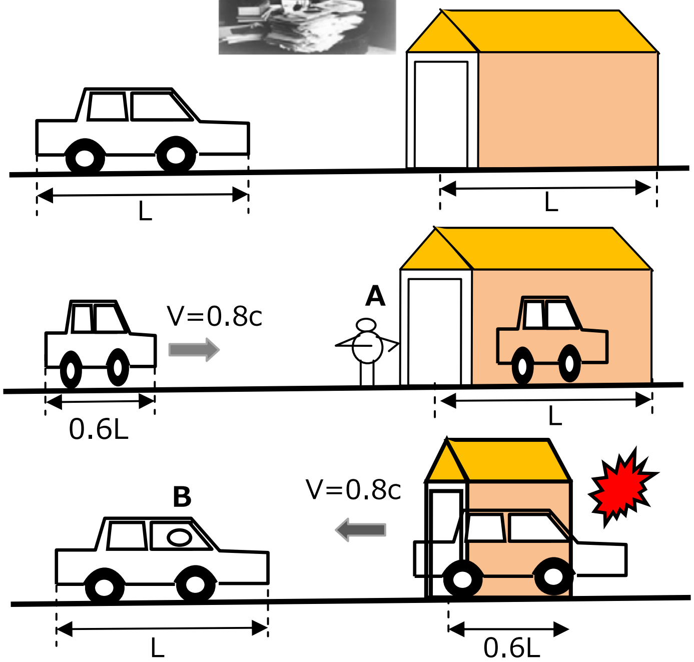
の長さになっており、すっぽり車庫に収まる。

・しかし、自動車の運転手からすれば、車庫がV=0.8cの速さでこちらに向かってくるので車庫の長さはローレンツ収縮して

$$L' = \sqrt{1-(0.8)^2}L = 0.6L$$

と自動車の全長Ｌより短くなっている。だから、自動車は車庫に入りきらない。

●う~ん、何たる矛盾！



・**A：**最近、上のようなメールがきたんだが、メールを読むと頭が混乱してきちゃって少し困っているんだ。

・**B子：**あっ、有名なガレージのパラドックスといわれるものね。一緒に考えてみましょうか。。。
え~っと、その２のローレンツ収縮のところで「走っている物差しは縮んで短く見える」ということを見てきたわね。「モノの長さ」というのは、その両端を**“同時”**に測らなければ意味がないのよ。というのは、時刻 t_A で一端の位置（x_A）を確定し、それからしばらくした時刻 t_B でもう一端の位置（x_B）を確定して、その差 $|x_B - x_A|$ がモノの長さだ言っても、途中でモノが動いてしまうこともあるので意味がない。あくまで**“同時”**でなければならないのね。

・**A：**ローレンツ収縮で縮むということと「走っている自動車の写真を撮ったら縮んで見えた」ということとは違う。つまり、ローレンツ収縮の意味するところは、あくまでも自動車の先端と後端を**“同時”**に測定してその差をとれば縮んでいたということなんだね。なにやらこの**“同時性”**が矛盾を解く鍵となるようだな。

・**B子：**ガレージのそばに立っている**A**さんは、V=0.8cの速さで向かってくる車の全長はローレンツ 収縮して0.6Lの長さと観測するでしょう。これは**A**さんが車の前端・後端を“**同時（Aさんの同時）”**に測って得た結果ね。したがって、**A**さんは**「車の後端がガレージの入口に差し掛かった瞬間と同時刻に車の先端はガレージの中にある」**と主張する。
片や車に乗っている**B**さんにとっては、ガレージの全長はローレンツ収縮により0.6L（**Bさんの同時**）と観測するわね。だから**「車の前端がガレージの奥の壁にぶつかった瞬間と同時刻に車の一部（L－0.6L=0.4L）はまだガレージの外にある」**と主張する。

・**A：A**さんの主張と**B**さんの主張はどちらも一理あるね。

・**B子：**「**B**さんの同時」は**A**さんにとって同時ではないし、「**A**さんの同時」は**B**さんにとって同時ではない、互いに立ち位置が違うのだから。**B**さんが、走っている車の全長は0.6Lだと主張しても、自動車に乗っている**A**さんからすれば「**B**さんは車の両端を同時に測ったのではなく、車の先端の位置を測りそれから少し遅れて後端の位置を測った」ということになるのね。

・**A：**つまり、**A**さんには「**A**さんの同時」があり、**B**さんには「**B**さんの同時」があって、それぞれの主張は正しい。矛盾と感じるのは、この２つの同時をごっちゃにするからなんだね。

・**B子：**そういうことのようね。

（つづく）

特殊相対性理論（その５）

●ミンコフスキーの時空図

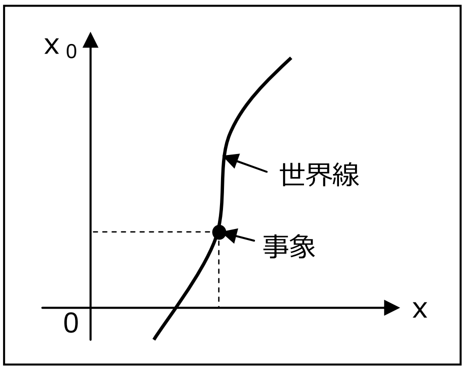
・**A：** さて、ミンコフスキー時空とは何ぞやということだけど、われわれの住んでいる空間は縦・横・高さの３つを指定すればモノの位置を決められるいわゆる x,y,z 軸で構成される三次元空間だね。時間はそれらを超越して別にコツコツと流れている。しかし、特殊相対論では時間も ct 軸として x,y,z 軸の仲間に加えた **4 次元時空**というモノを考える。時間と空間を同じ仲間とするから“**時空**”というわけだね。

・**B 子：** 4 次元時空というのはアインシュタインのチューリッヒ工科大学時代の恩師ヘルマン・ミンコフスキー(1864-1909)が考えたのね。世界を４次元の時空としてとらえると、場所や観測者によって時間の経過が異なるという特殊相対性理論の帰結が分かりやすいものになり、創始者のアインシュタインも大いに助かったと何かで読んだことがあるわ。

・**A：** うん、ミンコフスキーは学生のアインシュタインをよく思わなかったらしいね。両者の仲はむしろ悪かった。しかし、ミンコフスキーのアイデアのおかげで特殊相対論が理解しやすくなり、普及したとは皮肉なものだね。特殊相対性理論が発表された 2 年後の 1907 年にミンコフスキー時空のアイデアを発表している。虫垂炎で急逝する 2 年前のことだ。

さて、時々刻々位置を変える質点の運動の道筋（軌跡）を 4 次元時空内でとらえると、等速運動では直線、それ以外では曲線で表されことになるけど、この道筋を**世界線（world line）**と呼んでいる。4 次元時空は図に描けないので、x 軸と時間軸 ct をもつ２次元の時空間を考えると図のようになる。ここで、時間軸を ct としたのは、c は光速で距離÷時間の単位をもつので、ct は光速に時間の単位を掛けたものだから x と同じ距離の単位となる。つまり、x も ct も同じ仲間にしたということだ。そこで ct を x_0 と書くことにする。

・**B 子：** 世界線って少し大げさないい方ね。それは兎も角、世界線上の１点は、質点がある時刻 t にそこにいたという出来事を表すので、この点を**事象**とか**出来事**、**事件**などというのね。相変わらず大げさな言い回しのように感じるけど、このような言葉に慣れておく必要があるわね。



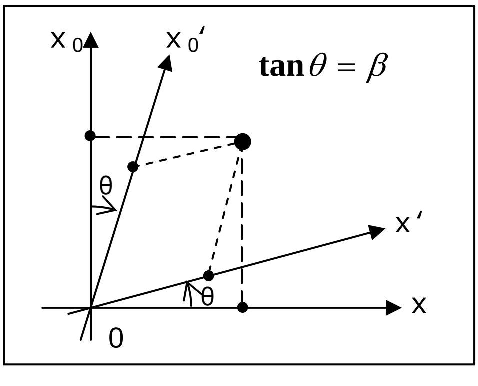
・**A：** そうだね。さて、いよいよ本論に入るけど、慣性系 S に対してx軸方向に速度Vで等速直線運動している慣性系を S‘とすると、2次元時空図でのローレンツ変換の式は、Coffee Breakの記事を参照して、次のようになる。

$$x_0{}' = \frac{x_0 - \beta x}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \qquad x' = \frac{x - \beta x_0}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad y' = y, \qquad z' = z, \qquad x_0 = ct, \quad \beta = V/c$$

慣性系 S‘の２次元時空図を描いてみよう。$x_0{}'$軸を決めるために $x'=0$、x'軸を決めるのに $x_0{}'=0$ とおくと、それぞれの軸は

$$x_0' \text{軸}：x = \beta x_0, \qquad x' \text{軸}：x' \text{軸}：x_0 = \beta x$$

という直線に相当することが分かる。右図のようだね。

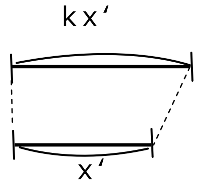


・**B 子：** x_0‘, x′の両軸は，粒子の速度 v の大きさによってちょうど扇子が開いたり閉じたりするようなイメージね。この S′系の x‘ x_0‘座標系は x′軸と x_0‘が斜めに交わるので**斜交座標**と呼んでいるのね。

・**A：** ここで注意しておかねばならない点があるんだ。

・**B子：** なに、それは？

・**A：** うん、図形を使ってローレンツ変換の計算をするとき、 x'、 x_0'の目盛は

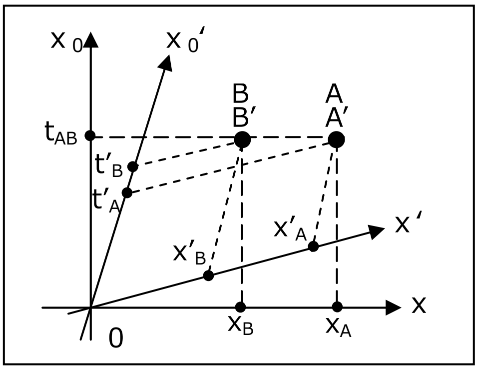


$$k = \sqrt{(1+\beta^2)\big/(1-\beta^2)}$$

だけ伸びているということなんだ（HP の相対論コーナーの「特殊相対性理論・第 2 章」参照)。このことはローレンツ収縮のところでまた触れるとして、ミンコフスキー時空を用いて「同時刻の相対性」や「ローレンツ収縮」を図形的に見ていこう。

＜同時刻の相対性＞

S 系において 2 つの事件 A，B が同時刻(t_A = t_B =t_{AB}) で起きたとする。この事件は S 系の時空図では点 A(t_{AB}; x_A)，点 B(t_{AB}; x_B) で S' 系では点 A'(t'$_A$; x'$_A$)，B'(t'$_B$; x'$_B$) となる。S 系で同時刻に起こった 2 つの事件は、S'系に観測者にすれば A' の起こった時刻は t'$_A$, B 'の起こった時刻は t'$_B$ となり、2 つの事件の発生時刻は t '$_A$≠t'$_B$ で、事件は同時刻に起こっていない！ということが図から即座にわかるね。

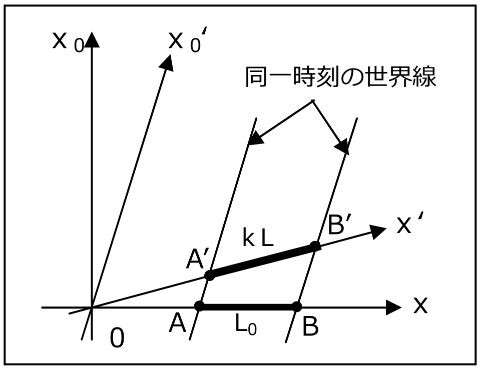


・**B子：** たしかに。。。

・**A：** 次に動いている棒の長さを L は静止しているときの長さ L_0 より短くなるというモノねローレンツ収縮をみていこう。

＜ローレンツ収縮＞

S 系の長さ L_0 の棒があり、その両端を AB とする。S 系に対して速度 V で走っている S'系において、同時刻にある棒の両端は A'B'だね。動いている棒の長さを L とすると、先ほどの目盛の伸びを考えれば



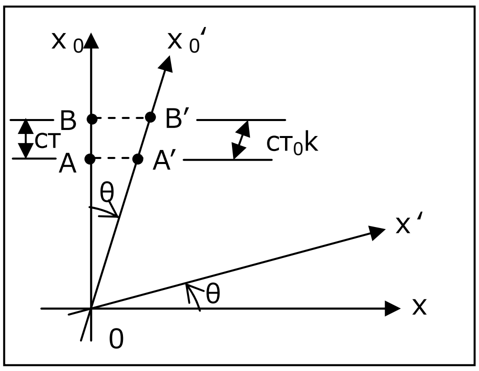
$$\overline{\mathbf{A'B'}} = kL$$

だね。これから

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{L_0}{kL} = \cos\theta, \quad \therefore L = L_0\frac{1}{k\cos\theta} = L_0\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\sqrt{1+\beta^2}}\sqrt{1+\beta^2} = L_0\sqrt{1-\beta^2}, \quad (\tan\theta = \beta)$$

となって，ローレンツ収縮の式がでてくる。

・**B子：** なるほどね。それでは慣性系 S に対してx軸方向に速度Vで等速直線運動している慣性系を S '時間は伸びるということを見ていくわ。最初に、S'系の時間軸上で2つの事件A'、B'が起こった場合を考えるわね。つまり、同じ場所で異なる時間に2つの事件が起こった場合ね。その時間間隔をτ_0とすると、目盛の伸びのことを考えて



$$\tau_0 = c\tau_0 k$$

となる。この 2 つの事件を S'系に対して速度 V で動いている S 系で測ったとき、点 A'、B'から x_0 軸上へ垂線をおろして交わった点 A、B の 2 点間の間隔が S 系での時間間隔となるので、それをτとすると

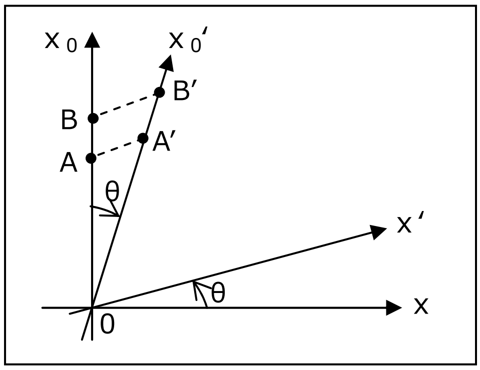
$$\overline{\mathbf{AB}} = c\tau$$

この 2 つの式から

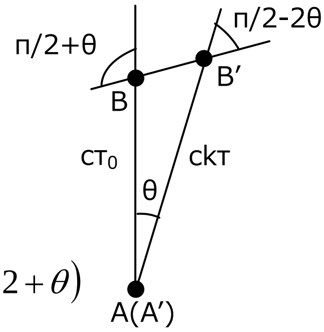
$$\tau = \tau_0 \Big/ \sqrt{1 - \beta^2}$$

が得られる。これはS′系で2つの事件が時間差τ_0で起こったけど、動いているS系から見ればそれより長い時間間隔で起こったことを意味している。つまりS′系とS系では時間の刻み方が異なっているということね。

次に、S系で2つの事件A、Bが時間間隔τ_0で起こったとして、S系に対して速度Vで動いているS′系の時間差を求めるわ。A点、B点からx′軸の平行に線を引いてしてx_0′軸上の交点をA′、B′とする。状況は右図に示す通りね。



必要なところを取り出して書くと。。。



となるわね。三角形ABB′に正弦定理を使って

$$c\tau_0 \Big/ \sin(\pi/2 - 2\theta) = ck\tau \Big/ \sin(\pi/2 + \theta)$$

これから

$$\tau = \tau_0 \Big/ \sqrt{1 - \beta^2}$$

が得られるわね。ということで時間が伸びるということも相対的なことなのね。

・**A：** あと、いろいろあるけど、少し長くなったのでこのあたりでお開きとしようか。

・**B子：** そうね。今日はクリスマスイブね。ワタシもきょうはいろいろとプライベートで忙しくなりそうなので、また機会があれば議論していきましょう。、お疲れ様でした～、バイバ～イ。

2015.12.24