特殊相対性理論（その５）

●ミンコフスキーの時空図

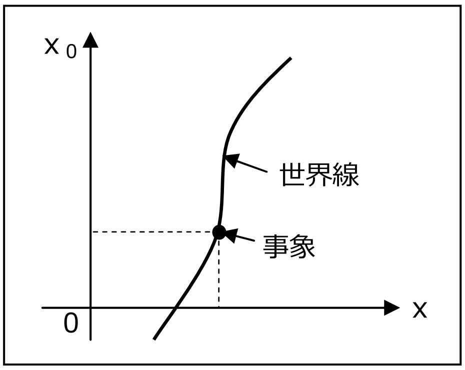
・**A：**さて、ミンコフスキー時空とは何ぞやということだけど、われわれの住んでいる空間は縦・横・高さの 3 つを指定すればモノの位置を決められるいわゆる x,y,z 軸で構成される三次元空間だね。時間はそれらを超越して別にコツコツと流れている。しかし、特殊相対論では時間も ct 軸として x,y,z 軸の仲間に加えた **4 次元時空**というモノを考える。時間と空間を同じ仲間とするから“**時空**”というわけだね。

・**B 子：**4 次元時空というのはアインシュタインのチューリッヒ工科大学時代の恩師ヘルマン・ミンコフスキー(1864-1909)が考えたのね。世界を 4 次元の時空としてとらえると、場所や観測者によって時間の経過が異なるという特殊相対性理論の帰結が分かりやすいものになり、創始者のアインシュタインも大いに助かったと何かで読んだことがあるわ。

・**A：**うん、ミンコフスキーは学生のアインシュタインをよく思わなかったらしいね。両者の仲はむしろ悪かった。しかし、ミンコフスキーのアイデアのおかげで特殊相対論が理解しやすくなり、普及したとは皮肉なものだね。特殊相対性理論が発表された 2 年後の 1907 年にミンコフスキー時空のアイデアを発表している。虫垂炎で急逝する 2 年前のことだ。

さて、時々刻々位置を変える質点の運動の道筋（軌跡）を 4 次元時空内でとらえると、等速運動では直線、それ以外では曲線で表されことになるけど、この道筋を**世界線（world line）**と呼んでいる。4 次元時空は図に描けないので、x 軸と時間軸 ct をもつ 2 次元の時空間を考えると図のようになる。ここで、時間軸を ct としたのは、c は光速で距離÷時間の単位をもつので、ct は光速に時間の単位を掛けたものだから x と同じ距離の単位となる。つまり、x も ct も同じ仲間にしたということだ。そこで ct を x_0 と書くことにする。

・**B 子：**世界線って少し大げさないい方ね。それは兎も角、世界線上の 1 点は、質点がある時刻 t にそこにいたという出来事を表すので、この点を**事象**とか**出来事**、**事件**などというのね。相変わらず大げさな言い回しのように感じるけど、このような言葉に慣れておく必要があるわね。



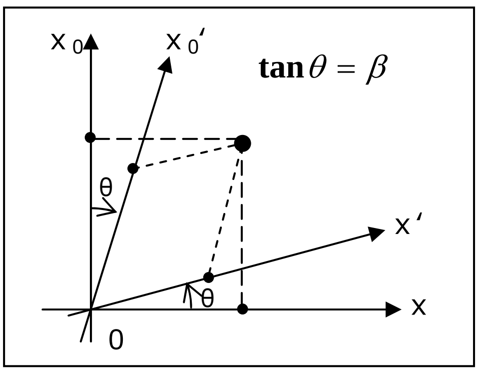
・**A：**そうだね。さて、いよいよ本論に入るけど、慣性系 S に対してx軸方向に速度Vで等速直線運動している慣性系を S‘とすると、2次元時空図でのローレンツ変換の式は、Coffee Breakの記事を参照して、次のようになる。

$$x_0{}' = \frac{x_0 - \beta x}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad x' = \frac{x - \beta x_0}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad y' = y, \qquad z' = z, \qquad x_0 = ct, \quad \beta = V/c$$

慣性系 S‘の 2 次元時空図を描いてみよう。x_0'軸を決めるために x′=0、x′軸を決めるのに $x_0'=0$ とおくと、それぞれの軸は

x_0'軸：$x = \beta x_0$,　　x'軸：x'軸：$x_0 = \beta x$

という直線に相当することが分かる。右図のようだね。

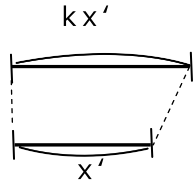


・**B 子：**x_0', x′の両軸は, 粒子の速度 v の大きさによってちょうど扇子が開いたり閉じたりするようなイメージね。この S′系の x‘ x_0‘座標系は x′軸と x_0‘が斜めに交わるので**斜交座標**と呼んでいるのね。

・**A：** ここで注意しておかねばならない点があるんだ。

・**B 子：** なに、それは？

・**A：** うん、図形を使ってローレンツ変換の計算をするとき、 x‘、 x_0’の目盛は

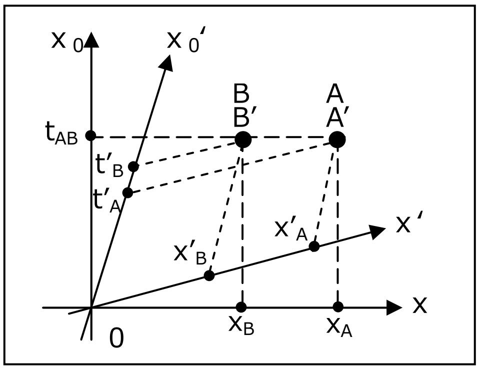


$$k = \sqrt{(1+\beta^2)\big/(1-\beta^2)}$$

だけ伸びているということなんだ（HP の相対論コーナーの「特殊相対性理論・第 2 章」参照)。このことはローレンツ収縮のところでまた触れるとして、ミンコフスキー時空を用いて「同時刻の相対性」や「ローレンツ収縮」を図形的に見ていこう。

＜同時刻の相対性＞

S 系において 2 つの事件 A, B が同時刻(t_A = t_B =t_{AB}) で起きたとする。この事件は S 系の時空図では点 A(t_{AB}; x_A), 点 B(t_{AB}; x_B) で S‘ 系では点 A′(t′$_A$; x′$_A$), B′(t′$_B$; x′$_B$) となる。S 系で同時刻に起こった 2 つの事件は、S′系に観測者にすれば A′ の起こった時刻は t′$_A$, B ′の起こった時刻は t′$_B$ となり、2 つの事件の発生時刻は t ‘$_A$≠t′$_B$ で、事件は同時刻に起こっていない！ということが図から即座にわかるね。

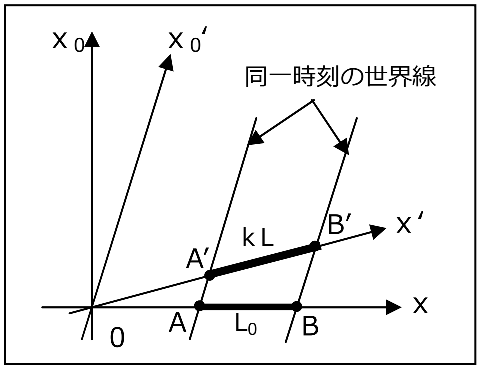


・**B 子：** たしかに。。。

・**A：** 次に動いている棒の長さを L は静止しているときの長さ L_0 より短くなるというモノねローレンツ収縮をみていこう。

＜ローレンツ収縮＞

S 系の長さ L_0 の棒があり、その両端を AB とする。S 系に対して速度 V で走っている S′系において、同時刻にある棒の両端は A′B′だね。動いている棒の長さを L とすると、先ほどの目盛の伸びを考えれば



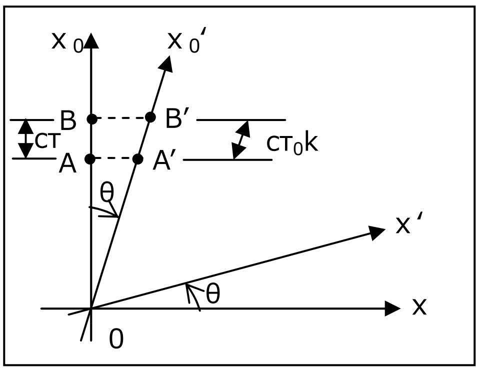
$$\overline{\mathbf{A'B'}} = \boldsymbol{kL}$$

だね。これから

$$\frac{\overline{\boldsymbol{AB}}}{\overline{\boldsymbol{A'B'}}} = \frac{\boldsymbol{L}_0}{\boldsymbol{kL}} = \cos\theta, \quad \therefore \boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}_0 \frac{1}{\boldsymbol{k}\cos\theta} = \boldsymbol{L}_0 \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\sqrt{1+\beta^2}} \sqrt{1+\beta^2} = \boldsymbol{L}_0 \sqrt{1-\beta^2}, \quad (\mathbf{tan}\,\theta = \beta)$$

となって，ローレンツ収縮の式がでてくる。

・**B子：** なるほどね。それでは慣性系Ｓに対してx軸方向に速度Vで等速直線運動している慣性系をＳ‘時間は伸びるということを見ていくわ。最初に、S′系の時間軸上で2つの事件A′、B′が起こった場合を考えるわね。つまり、同じ場所で異なる時間に2つの事件が起こった場合ね。その時間間隔をτ_0とすると、目盛の伸びのことを考えて



$$\boldsymbol{\tau_0} = \boldsymbol{c}\tau_0\boldsymbol{k}$$

となる。この 2 つの事件を S′系に対して速度 V で動いている S 系で測ったとき、点 A′、B′から x_0 軸上へ垂線をおろして交わった点 A、B の 2 点間の間隔が S 系での時間間隔となるので、それをτとすると

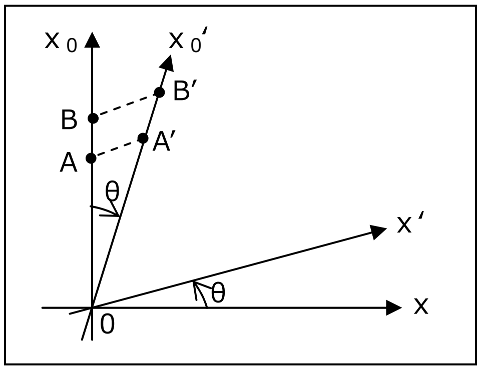
$$\overline{\mathbf{AB}} = \boldsymbol{c}\tau$$

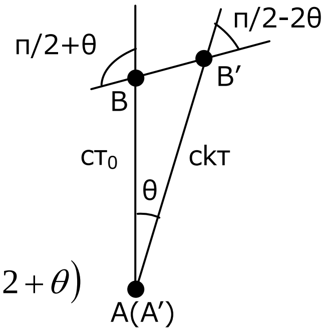
この 2 つの式から

$$\tau = \tau_0 \Big/ \sqrt{1 - \beta^2}$$

が得られる。これは S′系で 2 つの事件が時間差τ_0 で起こったけど、動いている S 系から見ればそれより長い時間間隔で起こったことを意味している。つまり S′系と S 系では時間の刻み方が異なっているということね。

次に、S 系で 2 つの事件 A、B が時間間隔τ_0 で起こったとして、S 系に対して速度 V で動いている S′系の時間差を求めるわ。A 点、B 点から x′軸の平行に線を引いてして x_0′軸上の交点を A′、B′とする。状況は右図に示す通りね。必要なところを取り出して書くと。。。





となるわね。三角形 ABB′に正弦定理を使って

$$c\tau_0 \Big/ \sin(\pi/2 - 2\theta) = ck\tau \Big/ \sin(\pi/2 + \theta)$$

これから

$$\tau = \tau_0 \Big/ \sqrt{1 - \beta^2}$$

が得られるわね。ということで時間が伸びるということも相対的なことなのね。

・**A：**あと、いろいろあるけど、少し長くなったのでこのあたりでお開きとしようか。

・**B 子：**そうね。今日はクリスマスイブね。ワタシもきょうはいろいろとプライベートで忙しくなりそうなので、また機会があれば議論していきましょう。、お疲れ様でした～、バイバ～イ。

2015.12.24