社会人のための楽しい物理入門

第０章：速習・微分積分入門

－簡単な微分方程式の解法を含む-

𝒦 ℰ 𝒩 𝒵 𝒪 𝒰

2008 年 12 月 20 日

新企画として「社会人のための楽しい物理入門」を始めることにしました。会社の仕事は物理とは特に何の関係もないが，物理への興味はある。しかし，テキストを見てもよくワカラン。特に数式のオンパレードには辟易する，という社会人の方も多いと思います。専門的な内容はともかく，高等学校レベルの物理の内容は知りたい，シカシ数式は苦手，なんとかならないかなぁ… とお悩みの方々を頭に思い浮かべ，この企画を立てることにしました。とまぁ，えらそうなことを言っていますが，私自身，高等学校の物理（その内容は力学，光・波動，電磁気，熱学，原子・原子核とほぼ物理の全般にわたっている）を一度総復習してみたいと思っていたことも確かです。内容をいかに噛み砕いてわかりやすく説明できるか，ある意味ささやかな挑戦にとりくむという次第です。

しかし，物理の学習にはある程度の我慢・辛抱が必要なことも確かです。一つには，やはり数学を武器として使いますので，数式が目に飛び込んだ瞬間「ヤーメタ」とはならずに，腹をくくって“ お付き合いしようじゃないの！”という気概も必要ではないかと思います。特に μ とか ν など普段見慣れないギリシャ文字やいろんな記号がどっさりでてきた暁には，物理よりも文字そのものが気になり，“ ワカラナ〜イ！”とブルーな気持ちになるかもしれません。シカシ，こんなものは慣れで，踏み越えていきましょう！苦手意識を押し込んで理解できたときには，頭にアドレナリンが一杯噴出し気分爽快になること請け合いです。また，物理的な考え方というのがあるわけで，これがもう一つの障壁になっていると思います。これは各自各様にとりくんで乗り越えていかなければ，傍(はた)からいくらあーだ，こーだと言ってもそんな急にわかるようなことではないですね。このレポートを含め，傍からのいうことを自分なりに聞きとめ（読みとめ）て，自分にあった方法，やり方で理解を深めていくことしかないのではないでしょうか。焦りは禁物で，わからなければわからないで放っておき，暫くして以前わからなかったことを見直すとアッサリとわかった，ということは，物理に限らず他の分野でも経験されたことがあると思います。そのような次第でゆっくり取り組まれればいいのではないかと，老婆心ながら愚考します。

さて，本レポートでは，敢て微分・積分を使って進めていこうと思います。この方が素直に物理現象を理解できると判断したからです。といっても微積の使用は最小限度に留めるつもりです。ということで，第０章をもうけ，そこで微積と簡単な微分方程式の解法を速習することにしました。少し退屈な話が続くと思いますが，必要な時にまた読み返すというスタンスで適当に読んでいただければと思います。第１章からはホームページに記載したメニュー「１．力学，２．物性・熱，３．波動・音波・光波，４．電磁気，５．原子・原子核」をこなしていきたいと思います。

本レポートの構成と内容は渡辺久夫「親切な物理（上)(下）」を参考にしました。ここで取り上げた問題も大半はそこから引用しています。この本は小生が高校生の頃にはまだ一冊の分厚い本で，友人がもっていたのを見せてもらい「えらい勉強しんならんなぁ…」と思ったことを思い出します。結局，本の厚みに物怖じし買いませんでしたが，それから幾星霜経たいまごろ入手することになりました（笑い)。

このレポートを読んでみようと思われた方は，その感想を寄せていただければありがたい。“ 難しい ”とか“ わかりにくい ”とか簡潔・簡単な感想で OK です。感想は書き進める上で大きな励みとなりますので，ひとつよろしくご理解ご協力のほどお願いします。

前書きが長くなりました。それではそろそろ第０章に進むことにします。

目 次

第0章　速習・微分積分入門

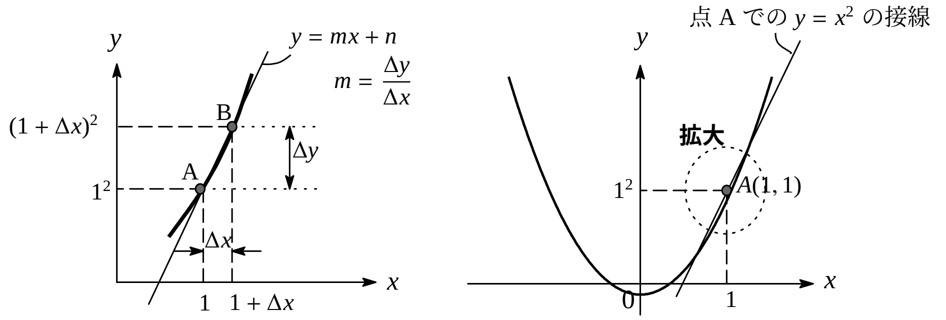
0.1　速習・微分法入門

0.1.1　微分のコンセプト

微分の定義は後ほど触れるとして，ここではまず具体的な関数の微分のイメージを掴まえるところから始めます。2 次曲線 $y = x^2$ という 2 次曲線[1]を考えます。曲線上の点 点 $A(x, y) = (1, 1)$ において，x の値を $x = 1$ から $x = 1 + \Delta x$ だけ“ **わずかに** ”変化させると，それに対応して y の値は $y = 1^2$ から $y = (1 + \Delta x)^2$ へと変化します。x の変化分 Δx に対応した y の変化分 Δy は $(1 + \Delta x)^2 - 1^2$ となるので，この変化の割合 $\Delta y/\Delta x$ は

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(1 + \Delta x)^2 - 1^2}{\Delta x} \tag{0.1.1}$$

と表せます。この値は 2 点 $A(1, 1^2)$, $B(1 + \Delta x, (1 + \Delta x)^2)$ を通る直線を $y = mx + n$ とすると，直線の傾き m ですね。



・2 点 A,B を通る直線の傾き

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(1 + \Delta x)^2}{\Delta x}$$

・点 A における接線の傾き

$$\lim_{\Delta x \to 0} m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2$$

（0.1.1）を展開すると

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(1 + \Delta x)^2 - 1}{\Delta x} = \frac{1 + 2\Delta x + (\Delta x)^2 - 1}{\Delta x} = 2 + \Delta x$$

となり，これが直線の傾き m に等しいので

$$m = 2 + \Delta x \tag{0.1.2}$$

ここで x の変化分 Δx を非常に小さく，0 にまで近づけていく（これを $\lim\limits_{\Delta x \to 0}$ と表します) と点 B は限りなく点 A に近づくので，2 点 A, B を通る直線は最後に点 A における接線となります。つまり，直線の傾きは $m = 2 + \Delta x$ で，接線の傾きは

$$\lim_{\Delta x \to 0} m = \lim_{\Delta x \to 0} (2 + \Delta x) = 2$$

となります。記号 lim はリミットといいます。

次ぎに 3 次曲線 $y = x^3$ を考えましょう。曲線上の 2 点 $A(1, 1)$, B $(1 + \Delta x, (1 + \Delta x)^3))$ を通る直線の傾きを m とすると，

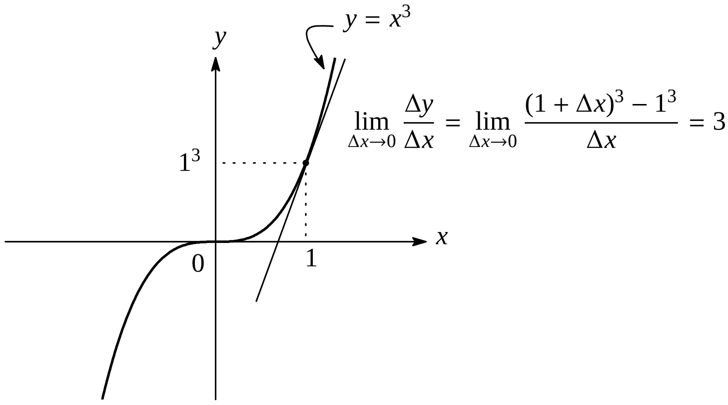
$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(1 + \Delta x)^3}{\Delta x} = \frac{1 + 3\Delta x + 3(\Delta x)^2 - 1}{\Delta x} = 3 + 3\Delta x$$

[1] $y = x^n$ を一般に x の n 次曲線といいます。

で，点 A における接線の傾きは，上の場合と同様にして

$$\lim_{\Delta x \to 0} m = \lim_{\Delta x \to 0}(3 + 3\Delta x) = 3 \tag{0.1.3}$$

となります。



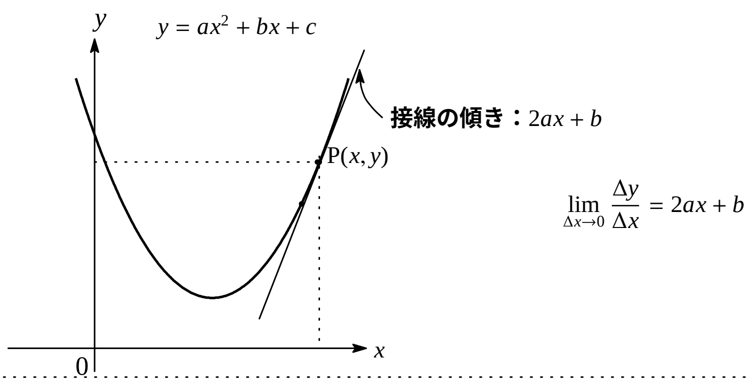
さて，いままでは決まった点における接線の傾きを求めてきました。次ぎに，一般の点 $\mathrm{P}(x, y)$ で接線の傾きを求めていくことにします。一般的な 2 次曲線 $y = ax^2 + bx + c$（a, b, c：定数）を考えます。点 P と点 $Q(x + \Delta x, (x + \Delta x)^2)$ を通る直線の傾きは

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a(x+\Delta x)^2 + b(x+\Delta x) + c - (ax^2 + bx + c)}{\Delta x} = \frac{a(2x\Delta x + (\Delta x)^2) + b\Delta x}{\Delta x} = a(2x + \Delta x) + b$$

となるので，点 $\mathrm{P}(x, y)$ における接線の傾きは

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} a(2x + \Delta x) + b = 2ax + b$$

と得られます。



全く同様にして，3 次曲線 $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$（a, b, c, d：定数）の場合も点 $\mathrm{P}(x, y)$ における接線の傾きは

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 3ax^2 + 2bx + c$$

と得られます。

0.1.2　微分の定義

さて，いよいよ微分の定義に入ります。一般的な関数 $y = f(x)$ の微分は

$$\boxed{y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}} \tag{0.1.4}$$

と定義されます。この定義は式の真ん中の式は既に接線の傾きを求めるときにでてきました。接線の傾きを求めるということは微分することと同じことだったのです。ということでいままで得られた結果を整理すると次のルールが成り立つことがわかります。

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c & \to \quad \dfrac{dy}{dx} = \displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2ax + b \\ y = ax^3 + bx^2 + cx + d & \to \quad \dfrac{dy}{dx} = \displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 3ax^2 + 2bx + c \\ & \vdots \\ y = ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \cdots + k & \to \quad \dfrac{dy}{dx} = \displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = nax^{n-1} + (n-1)bx^{n-2} + (n-2)cx^{n-3} + \cdots \end{cases}$$

さて，微分の定義を使って少し複雑な関数 $y = 3x^2 + 2x + 5$ を微分してみましょう。

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3(x+\Delta x)^2 + 2(x+\Delta x) + 5 - 3x^2 - 2x - 5}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} (6x + 3\Delta x + 2) = 6x + 2 \end{aligned} \tag{0.1.5}$$

となります。簡単な関数の微分であれば兎も角，このような少し複雑な関数をいちいち定義式に入れて微分するのも大変ですね。実は $3x^2$, $2x$, 5 を個別に微分してその結果を足せばよいのです。上のルールを使うと

$$\begin{cases} (3x^2)' &= 6x \\ (2x)' &= 2 \\ (5)' &= 0 \end{cases} \longrightarrow (3x^2 + 2x + 5)' = 6x + 2 \tag{0.1.6}$$

と簡単に得られます。
ここで用語を含めたまとめを載せておきます。

※まとめ

- **微分**というのは曲線の接線の傾きを求めることである。　$y' = f'(x) = \dfrac{dy}{dx} = \displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$
- **微係数**というのは $x = a$ における微分の値である定数値をとる。　$f'(a)$
- **導関数**というのは x 軸の任意の点 x における微分であり，これは関数となる。　$f'(x)$
- 関数 $y = ax^n$ の微分は $y' = nax^{n-1}$ となる。　a：定数

[演習問題] 次の関数を x で微分せよ。

$$\begin{cases} y = x^5 - 3x^3 + 2 & \longrightarrow \quad y' = 5x^4 - 9x^2 \\ y = 2x^3 + 5 & \longrightarrow \quad y' = 6x^2 \\ y = 3x + \sqrt{x} + 2 & \longrightarrow \quad y' = 3 + \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{x}} \quad (\sqrt{x} = x^{1/2},\ 1/\sqrt{x} = x^{-(1/2)}) \end{cases}$$

0.1.3　微分と導関数の関係

$y = f(x)$ 導関数を $f'(x)$ とすると

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = f'(x) \longrightarrow dy = f'(x)dx} \tag{0.1.7}$$

と表すことができます。この関係式は物理でよく使いますのでマークしておいてください。
例えば $y = x^3 - 2x + 3$ の導関数は $y' = 3x^2 - 2$ ですから，

$$dy = (3x^2 - 2)dx$$

となります。

0.1.4　代表的な関数の微分

それでは，分数関数，三角関数，対数関数，指数関数等，代表的な関数の微分をみていくことにします。

(1) 分数関数の微分

分数関数の一番簡単な関数は $y = 1/x$ です。この微分をやってみましょう。微分の定義式より

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{1}{x+\Delta x} - \frac{1}{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-1}{x(x+\Delta x)} = -\frac{1}{x^2}$$

となります。同様に $y = 1/x^2$ を微分すると

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{x^3} \tag{0.1.8}$$

となりますが，これは各自で定義式に当てはめて確認して下さい。

一般に $y = 1/x^n$ を微分すると

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = y' = -\frac{nx^{n-1}}{(x^n)^2} = -\frac{n}{x^{n+1}}} \tag{0.1.9}$$

となります。

次に少し複雑な分数関数 $y = 3x/(2x+1)$ を微分してみます。定義式に当てはめると

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{3(x+\Delta x)}{2(x+\Delta x)+1} - \frac{3x}{2x+1}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{3\Delta x}{(2x+1)(\{2(x+\Delta x)+1\})}}{\Delta x} = \frac{3}{(2x+1)^2}$$

が得られます。ところで一般の分数関数 $y = g(x)/f(x)$ をいちいち定義式にはめてやっていると日が暮れますので，次の公式を使います。

＜分数関数の微分公式＞ (0.1.10)

$$\boxed{y' = \left(\frac{g(x)}{f(x)}\right)' = \frac{g'(x)f(x) - g(x)f'(x)}{f(x)^2}} \tag{0.1.11}$$

先ほどの関数 $y = 3x/(2x+1)$ を $f(x) = 2x+1, g(x) = 3x$ とし，$f'(x) = 2, g'(x) = 3$ に注意してこの公式に当てはめて確認下さい。

(2) 三角関数の微分

まず $y = \cos x$ から。微分の定義式に当てはめて

$$\frac{dy}{dx} = (\cos x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x+\Delta x) - \cos x}{\Delta x} \tag{0.1.12}$$

ここで三角関数の加法定理の公式

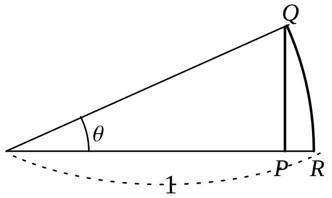
$$\cos A - \cos B = -2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

を使うと

$$\frac{dy}{dx} = (\cos x)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos(x+\Delta x)-\cos x}{\Delta x} = -\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$$

$$= -\lim_{\Delta x\to 0}\left\{\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\frac{\sin\Delta x/2}{\Delta x/2}\right\} = -\sin x \quad \left(\because \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\Delta x/2}{\Delta x/2} = 1\right)$$

となります。最後の式を導くときに下図に示す公式を使いました。ということで，$\underline{\cos x\text{ の微分は }-\sin x}$ となります。



円弧 $\widehat{RQ} = 1\cdot\theta = \theta$

線分 $\overline{PQ} = 1\cdot\sin\theta = \sin\theta$

$\theta\to 0$ で $\widehat{RQ} = \overline{PQ}$ となるので

$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}\to 1$ となる.

次に $y = \sin x$ を微分します。微分の定義式より

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x} \tag{0.1.13}$$

再び三角関数の加法定理の公式

$$\sin A - \sin B = 2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

を使うと

$$\frac{dy}{dx} = (\sin x)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x} = -\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\left\{\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\frac{\sin\Delta x/2}{\Delta x/2}\right\} = \cos x$$

で，$\underline{\sin x\text{ の微分は }\cos x}$ となります。

次に $y = \tan x$ を微分します。$\tan x = \sin x/\cos x$ なので，これを微分の定義式にいれて ⋯ と考えるとゾッとしますが，先ほどの分数関数の微分公式（0.1.11）を使うと簡単にできます。
$f(x) = \cos x,\ g(x) = \sin x$ とおいて，公式 $\cos^2 A + \sin^2 A = 1$ を利用し

$$\frac{dy}{dx} = (\tan x)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

となり，$\underline{\tan x\text{ の微分は }\sec^2 x}$ となります。以上の結果をまとめると

《三角関数の微分公式》

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\tan x)' = \sec^2 x$$

(3) 対数関数・指数関数の微分

対数関数 $y=\log_a x$ を微分します。a は“ 底 ”といわれます[2]。対数関数の微分も微分の定義式より[3]

$$\frac{dy}{dx}=(\log_a x)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log(x+\Delta x)-\log x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\log_a\left(\frac{x+\Delta x}{\Delta x}\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\log_a\left(1+\frac{x}{\Delta x}\right)$$

となります。ここで $\Delta x/x=t$ と置いてやると，$\Delta x\to 0$ のとき $t\to 0$ なので，$\Delta x\to 0$ の極限操作を $t\to 0$ の極限操作に置き換えることができます。したがって，

$$\frac{dy}{dx}=(\log_a x)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\log_a\left(1+\frac{x}{\Delta x}\right)=\lim_{t\to 0}\frac{1}{xt}\log_a(1+t)=\frac{1}{x}\lim_{t\to 0}\log_a(1+t)^{1/t}$$

が得られます。ここで天下り的ですが，指数 e の定義式

$$e=\lim_{t\to 0}(1+t)^{1/t} \tag{0.1.14}$$

を使うと，上式は

$$\frac{dy}{dx}=(\log_a x)'=\frac{1}{x}\lim_{t\to 0}\log_a(1+t)^{1/t}=\frac{1}{x}\log_a e$$

となり，物理では通常，底が e の自然対数[4]がでてくるので，a を e に置き換えると，自然対数の微分は

$$(\log x)'=\frac{1}{x}\log_e e=\frac{1}{x}\left\{\frac{\log e}{\log e}\right\}=\frac{1}{x} \tag{0.1.15}$$

となります。

次に指数関数 $y=a^x$ を微分します。これも微分の定義式より

$$\frac{dy}{dx}=(a^x)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{x+\Delta x}-a^x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}a^x(a^{\Delta x}-1)=a^x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x} \tag{0.1.16}$$

ここで少し技巧的ですが，$a^{\Delta x}-1=t$ とおいてやります。$\Delta x\to 0$ のとき $t\to 0$ となるので，$\Delta x\to 0$ の極限操作を $t\to 0$ の極限操作に置き換えます。Δx を t で表すと

$$a^{\Delta x}-1=t\Longleftrightarrow a^{\Delta x}=t+1\Longleftrightarrow \Delta x\log a=\log(t+1)\Longrightarrow \Delta x=\frac{\log(t+1)}{\log a}$$

となり，これを (0.1.16) に入れると

$$\frac{dy}{dx}=a^x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}=a^x\left\{\lim_{t\to 0}\frac{t}{\frac{\log(t+1)}{\log a}}\right\}=a^x\log a\left\{\lim_{t\to 0}\frac{t}{\log(t+1)}\right\}=a^x\log a\left\{\frac{1}{\lim_{t\to 0}\frac{\log(t+1)}{t}}\right\} \tag{0.1.17}$$

が得られます。右辺の分母の形をよく見ると指数 e の定義式 (0.1.14) の対数をとったものの形をしていますね。すなわち

$$\log e=\log\lim_{t\to 0}(1+t)^{1/t}=\lim_{t\to 0}\log(1+t)^{1/t}=\lim_{t\to 0}\frac{log(1+t)}{t}=1$$

となるので，(0.1.17) は結局

$$\frac{dy}{dx}=(a^x)'=a^x\log a \tag{0.1.18}$$

となります。このように，指数関数の微分は関数の形が変わらないという大きな特長があります。

$$(e^x)'=e^x \tag{0.1.19}$$

《対数関数・指数の微分公式》

$$(\log x)'=\frac{1}{x}$$

$$(a^x)'=a^x\log a$$

$$(e^x)'=e^x$$

[2] $\log_a x$ で $a=10$ を常用対数，$a=e$ を自然対数といい，自然対数は $\ln x$ とも書かれます。

[3] Thank's omi さん。omi さんより誤記の指摘がありました（09.12.11）。修正と同時に導出の詳細を手を抜かずに書いておきます（ ^^) ; 。

[4] $\log_e e=1$

0.1.5　関数の積の微分

関数 $f(x)$ と $g(x)$ の積で与えられる関数 $y = f(x)g(x)$ を微分します。微分の定義より

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x} \tag{0.1.20}$$

右辺の分母を

$$\begin{aligned} f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x) &= f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x+\Delta x) + f(x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x) \\ &= \{f(x+\Delta x) - f(x)\}g(x+\Delta x) + f(x)\{g(x+\Delta x) - g(x)\} \end{aligned}$$

として，これを（0.1.20）に入れると

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \to 0} \left\{ \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} g(x+\Delta x) + f(x) \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right\} \\ &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \end{aligned}$$

が得られます[5]。つまり関数の積の微分は順番に微分したものを足せばよいということになります。3 つの関数の積の微分は以下の通りです，

$$\begin{aligned} \{f(x)g(x)h(x)\}' = f'(x)\{g(x)h(x)\} + f(x)\{g(x)h(x)\}' &= f'(x)g(x)h(x) + f(x)\{g'(x)h(x) + g(x)h'(x)\} \\ &= f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x) \end{aligned}$$

いままでの結果を整理すると次の**微分の基本公式**が得られます。この公式はあとで**積分**を学習するときに役立ちます。

表 1: 微分の基本公式

関数	導関数	関数	導関数
x^n	nx^{n-1}	$\log x$	$1/x$
$1/x$	$-(1/x^2)$	a^x	$a^x \log a$
$g(x)/f(x)$	$\{g'(x)f(x) - g(x)f'(x)\}/f^2(x)$	e^x	e^x
$\cos x$	$-\sin x$	$f(x)g(x)$	$f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
$\sin x$	$\cos x$	$f(x) \pm g(x)$	$f'(x) \pm g'(x)$
$\tan x$	$\sec^2 x$	$kf(x)$	$kf'(x)$　（k：定数）

0.1.6　合成関数の微分

合成関数とは一体なんだ，という声が聞こえてきそうですが，難しく考える必要はありません。例えば $y = (x^3 + 2x)^2$ という関数を考えると，これは

$$\begin{cases} y = g^2 \\ g = x^3 + 2x \end{cases}$$

の 2 つの関数を合成したものと考えることができます。このように 1 つの関数を 2 つの関数の合成とみなすと 微分計算が非常に楽 になります。例えば上の関数を $(x^3 + 2x)^2$ を微分する場合，普通，べき乗を展開してから個別に微分し ⋯ となりますが，合成関数の微分法はこれらの手間を大幅に省くことができます。そのわけは一つの微分を 2 つの微分の積に分解してやることにあります。つまり

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dg} \times \frac{dg}{dx} \tag{0.1.21}$$

[5] 3 つの関数の積 $(f(x)g(x)h(x))'$ の微分は後で述べる合成関数の微分法を使うと容易にできます。

と 2 つの微分の積で表します。具体的に $y = (x^3 + 2x)^2$ を合成関数の微分法で微分しましょう。$y = g^2$, $g = x^3 + 2x$ とおくと

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{dy}{dg} = 2g \\ \dfrac{dg}{dx} = 3x^2 + 2 \end{array}\right. \longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dg} \times \frac{dg}{dx} = 2g \times (3x^2 + 2) = 2(x^3 + 2x)(3x^2 + 2) \tag{0.1.22}$$

とあっさり求めることができますね。さっそく，2,3 演習問題をやって慣れることにします。

[演習問題] 次の関数を微分せよ。

(1) $y = 1/(3x + 1)$

(2) $y = (3x - 2)^2(x + 1)$

(3) $y = e^{3x}$

(4) $y = \sqrt{x^2 + 2x + 3}$

[答]

(1) $g = 3x + 1$ とおくと $y = 1/g$,　$dy/dg = -1/g^2$, $dg/dx = 3$ となるから

$$dy/dx = (dy/dg)\,(dg/dx) = -3/(3x + 1)^2$$

(2) $f = (3x - 2)^2$, $g = x + 1$ とおくと与式は $y = f \cdot g$ と関数の積であらわされます。積の微分公式より

$$(f\,g)' = f'\,g + f\,g'$$

で，まず $g' = 1$ ですね。$f = (3x - 2)^2$ は合成関数の微分法を使います。$p = 3x - 2$ とおくと $f = p^2$ となるので

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dp}\,\frac{dp}{dx} = 2p \times 3 = 6(3x - 2)$$

(3) $t = 3x$ とおくと $y = e^t$ となるので

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\,\frac{dt}{dx} = e^t \times 3 = 3e^{3x}$$

(4) $f = x^2 + 2x + 3$ とおきます。そうすると $y = \sqrt{f}$ となるので

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{df}\,\frac{df}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{f}} \times 2(x + 1) = \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x + 3}}$$

0.1.7　2 階微分

いままでやってきた微分 $y' = f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$ は 1 階微分と呼ばれます。1 階があれば 2 階，3 階，一般に n 階微分という高階微分もあるわけですが，ここでは 2 階微分を学習します。

関数 $y = f(x)$ の微分の定義を再掲すると

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \equiv f'(x) \tag{0.1.23}$$

2 階微分は $f'(x)$ をもう 1 回 x で微分することで，2 階微分の記法は

$$y'' = f''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2} \tag{0.1.24}$$

となります。一般に n 階微分は $y^{(n)} = f^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n}$ と書かれます。2 階微分の定義は 1 階微分の $f(x)$ の代わりに $f'(x)$ を入れればいいので

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x + \Delta x) - f'(x)}{\Delta x} \tag{0.1.25}$$

となります。$f'(x)$ の定義式を入れると

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+2\Delta x) - f(x+\Delta x) - \{f(x+\Delta x) - f(x)\}}{(\Delta x)^2} \tag{0.1.26}$$

となります。ここで Δx の刻み幅を $x + 2\Delta x$ とするかわりに，x を中心として $-\Delta x$ と Δx の両サイドに刻んでみると（→下図を参照下さい）上の式は

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x) - \{f(x) - f(x-\Delta x)\}}{(\Delta x)^2} \tag{0.1.27}$$

と表すこともできますね。2 階微分の具体的な計算では，定義にはめて計算するということは殆どしません，1 階微分がわかるとそれをもう 1 回微分すればよいだけなので無駄な手間が省けるわけですね。

それでは少し演習問題をやりましょう。

[演習問題] 次の関数を 2 階微分せよ。

(1) $y = x^3$

(2) $y = 1/x$

(3) $y = e^{3x}$

(4) $y = \sin(3x)$

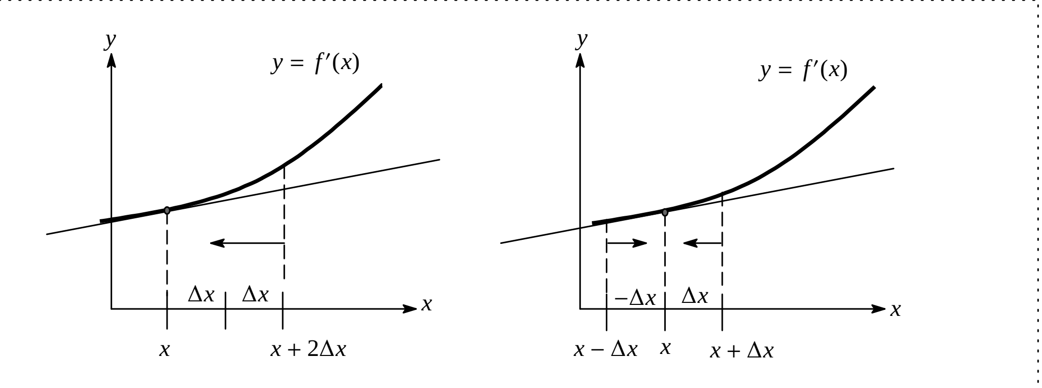
[答]

(1) $y' = 3x^2 \longrightarrow y'' = 6x$

(2) $y' = -1/x^2 \longrightarrow y'' = 2/x^3$

(3) $y' = 3e^{3x} \longrightarrow y'' = 9e^{3x}$

(4) $y' = 3\cos 3x \longrightarrow y'' = -9\sin 3x \cdots$ 合成関数の微分法を使います.

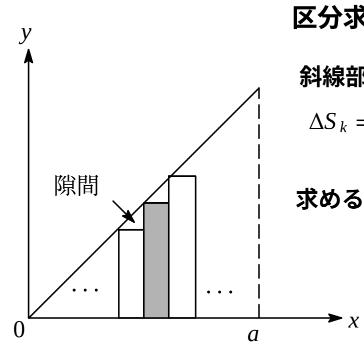


0.2 速習・積分法入門

0.2.1 区分求積法

積分というのは 面積を求めることだ，ということを聞かれたことがあると思います。例えば $y = x$ という直線の $x = 0$ から $x = a$ までの領域に囲まれた面積を求めてみましょう。

区分求積法



$\frac{a}{n}$ に分割する.

斜線部の面積

$$\Delta S_k = \frac{a}{n} \times k \cdot \frac{a}{n} \quad (k = 0, 1, 2, \cdots n-1)$$

求める面積 S $\quad S = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} S_k = \frac{1}{2}a^2$

この場合は三角形の面積なので，面積を S とすると S = 底辺×高さ÷ 2 = $\frac{1}{2}a^2$ ですぐ面積はわかりますが，ここでは求める面積を図に示すように細かな短冊に分割して，この短冊をすべて足し合わせることで面積を求めてみます。このようなやり方を**区分求積法**といいます。

まず $x = 0$ から $x = a$ の線分を n 分割し，分割幅 Δx を $\frac{a}{n}$ とします。次に高さは短冊の左辺の高さをとります。そうすると k 枚目の短冊の高さ h は $h = k \cdot \frac{a}{n}$ で，k 枚目の短冊の面積を ΔS_k とすると

$$\Delta S_k = \frac{a}{n} \times k \cdot \frac{a}{n} = k \cdot \frac{a^2}{n^2} \tag{0.2.1}$$

となります。ここで k は $k = 0, 1, 2, \cdots n-1$ となることに注意して下さい（←短冊の左肩を高さにとっているから）。求める面積 S はこれら n 枚の短冊の面積を足し合わせたもので

$$S = 0 \cdot \frac{a^2}{n^2} + 1 \cdot \frac{a^2}{n^2} + 2 \cdot \frac{a^2}{n^2} + \cdots + (n-1) \cdot \frac{a^2}{n^2} = \sum_{k=0}^{n-1} k \cdot \frac{a^2}{n^2}$$

となります。右辺の $\sum$ は $k = 0$ から $k = n-1$ までの足し算を簡略化して表す記号で，足し算は等差級数の和の公式を使って

$$S = \{0 + 1 + 2 + \cdots + (n-1)\} \cdot \frac{a^2}{n^2} = \frac{1}{2}n(n-1) \cdot \frac{a^2}{n^2} = \frac{1}{2}a^2\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

となります。n を大ききしていけば直線 $y = x$ と短冊との間にできる隙間（図を参照）が 0 に近づき，求める面積に近づくことになります。そこで n 無限大の極限をとると

$$S = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}a^2\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}a^2 \tag{0.2.2}$$

となって，三角形の面積から算出した値と一致します。

$y = x^2$ のグラフと x 軸との間の面積を区分求積法で求めてみましょう。やり方は上と全く同様です。短冊の左肩の高さが $\left(k \cdot \frac{a}{n}\right)^2$ になることに注意して ΔS_k を求めると

$$\Delta S_k = \left(k \cdot \frac{a}{n}\right)^2 \cdot \frac{a}{n} = k \cdot \frac{a^3}{n^3} \quad (k = 0, 1, 2, \cdots, n-1)$$

求める面積 S は $n \to \infty$ の極限値をとって

$$\begin{aligned} S &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} k \cdot \frac{a^3}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \{0^2 + 1^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2\} \frac{a^3}{n^3} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{6}n(n-1)(2n-1) \cdot \frac{a^3}{n^3} = \frac{1}{3}a^3\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{1}{2n}\right) \\ &= \frac{1}{3}a^3 \end{aligned}$$

となります[6]。

0.2.2　積分法：定積分と不定積分

■定積分

区分求積法では，面積を求めるのに微小な短冊に分割してそれらを足しあわすという計算が結構大変でした。**定積分**ではそれらの計算を大幅に楽にしてくれます。関数を $y = f(x)$ とし x の 微小刻み幅 として dx をとります。$y = f(x)$ と x 軸の $x = 0$ から $x = a$ までに囲まれた面積 S を次のように表わします。

$$S = \int_0^a f(x)dx \tag{0.2.3}$$

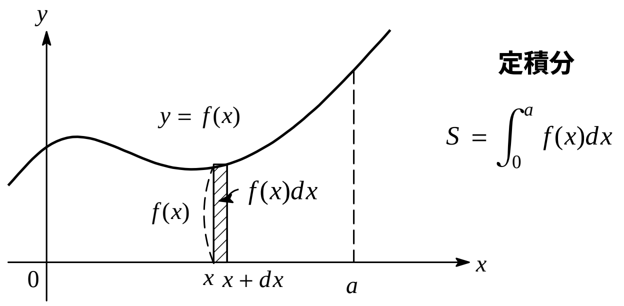
記号 $\int$ はインテグラル[7]と呼び，下についている 0 から上についている a を**積分区間**と呼び，関数 $f(x)$ を**被積分関数**といいます。$y = x,\ y = x^2$ のケースを積分すると次のようになります。

$$\begin{cases} S = \displaystyle\int_0^a x dx = \frac{1}{2}a^2 \\ S = \displaystyle\int_0^a x^2 dx = \frac{1}{3}a^3 \end{cases}$$

上の積分計算の結果から一般に $y = x^n$ のケースでは

$$\boxed{S = \int_0^a x^n = \frac{1}{n+1}a^{n+1}} \tag{0.2.4}$$

が成り立ちます。なぜこのような計算ができるのかは「定積分の定義」のところで詳しく述べます。



■不定積分

不定積分は 積分区間が明示されない積分 のことで，関数 $f(x)$ の不定積分と微分は次のような関係で結ばれています。

$$\boxed{\int f(x)dx = F(x) \Longleftrightarrow F'(x) = f(x)} \tag{0.2.5}$$

つまり，**不定積分は微分の逆計算**ということですね（←上の式だけを見ても分かりにくいですが，下の演習問題をやればすぐ分かります)。$F(x)$ のことを $f(x)$ の**原始関数**といいます。例えば x^2 の原始関数は

[6] 級数の和の公式：$0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^3 + \cdots (n-1)^2 = \frac{1}{6}n(n-1)(2n-1)$ を使いました。
[7] この記号は足し算の総和を表す $\sum$（Summation：サムメーション) の S を引き伸ばしたものといわれています。

$\int x^2 dx = x^3/3$ ですね（←原始関数 $x^3/3$ を微分すると x^2 になりますね！）。これから「**微分した関数を不定積分するともとの関数に戻る**」ということがでます[8]。

$$\boxed{\int f'(x)dx = f(x)} \tag{0.2.6}$$

定数を微分するとゼロなので，x^2 の原始関数は，C を定数とすると $\frac{x^3}{3} + C$ も原始関数となります。このことから「**$F(x)$ を $f(x)$ の原始関数の一つとすると，C を任意の定数として $f(x)$ のすべての原始関数は $F(x) + C$ の形で与えられる**」ということになります。C のことを積分定数といいます。 関数の定数倍や関数の和・差の不定積分は次の公式にまとまります。

《和と差の不定積分の公式》

・定数倍 $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx \quad k$：定数

・和と差 $\int \{f(x) \pm g(x)\}dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

それでは少し演習問題をやってみましょう。

[演習問題] 次の関数の不定積分を求めよ。

(1) $\int (x^3 + 1)dx$

(2) $\int \sin x dx$

(3) $\int \sin 2x dx$

(4) $\int \frac{1}{x} dx$

[答]

(1) $\int (x^3 + 1)dx = \int x^3 dx + \int dx = \frac{1}{3}x^3 + x + C$　(2) $\int \sin x dx = -\cos x + C$

(3) $\int \sin 2x dx = -\frac{1}{2}\cos 2x + C$　（ヒント：$(\cos 2x)' = -2\sin 2x$）　(4) $\int \frac{1}{x}dx = \log x + C$　（自然対数）

0.2.3　定積分の定義

微分と積分の関係をもう一度おさらいすると

$$\boxed{\int f(x)dx = F(x) \Longleftrightarrow F'(x) = f(x)} \tag{0.2.7}$$

で，関数 $F(x)$ のことを関数 $f(x)$ の**原始関数**と呼びました。原始関数は一つだけでなくそれに任意の定数 C を加えた $F(x) + C$ も原始関数であることも学習しました。ここで改めて**定積分の定義**をしておきます。**区間 $[a, b]$ における関数 $f(x)$ の定積分**は次の式で定義されます。

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)} \tag{0.2.8}$$

[8] $F'(x) = \frac{d}{dx}\int f(x)dx = \int \frac{df(x)}{dx}dx = \int f'(x)dx = f(x)$

真ん中の $[F(x)]_a^b$ は，定積分の計算をこのように表す“ 習わし ”となっています。具体的に，関数 $f(x)=x^2$ の区間 $[0,a]$ における定積分は

$$\int_0^a f(x)dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^a = \frac{1}{3}(a^3-0^3) = \frac{1}{3}a^3$$

となり，区分求積法で求めた面積と一致します。このように原始関数がわかれば定積分はすぐできるので原始関数を見つけるには微分（微分の基本公式）の知識が大いに役立ちます。

以下に定積分のいろいろな性質をのせておきます。

$$\begin{cases} \text{(1) \textbf{積分区間の性質}} & \displaystyle\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx \\ & \displaystyle\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx \\ & \displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \\ \text{(2) \textbf{定積分の和と差}} & \displaystyle\int_a^b \{f(x)\pm g(x)\}dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx \\ \text{(3) \textbf{定数倍}} & \displaystyle\int_a^b \{pf(x)+qg(x)\}dx = p\int_a^b f(x)dx + q\int_a^b g(x)dx \end{cases} \tag{0.2.9}$$

上の性質で,「積分区間の性質」の 2 つ目は 積分区間をひっくり返すと符号が反転する ことに注意下さい。面積がマイナスに！とびっくりされるかもしれませんが，これはそのように約束します。3 つ目は区間 $[a,b]$ の間に c をとったとき，c を中継ぎにできるということで，例えば積分区間 $[2,5]$ を $[2,3]$ と $[3,5]$ の 2 つに分割し，それぞれの定積分を足しあわすと

$$\int_2^5 x^2dx = \frac{1}{3}\left[x^3\right]_2^5 = \frac{117}{3}, \quad \int_2^3 x^2dx + \int_3^5 x^2dx = \frac{1}{3}[x^3]_2^3 + \frac{1}{3}[x^3]_3^5 = \frac{117}{3}$$

と一致します。

さて，定積分の定義式（0.2.8）を導出してみましょう（←興味がなければ読みとばし OK）。図のように関数 $y=f(x)$ があって，$x+\Delta x$ の幅を持つ短冊を考えます。短冊は塗りつぶした部分（面積：$f(x)\Delta x$）とそうでない大きな短冊（面積：$f(x+\Delta x)\Delta x$）の 2 つが取れます。そして，求める面積は斜線部の面積 $\Delta S(x)$ です。これら 3 つの面積の関係は

$$f(x)\Delta x < \Delta S(x) < f(x+\Delta x)\Delta x$$

となり，これを Δx で割って $\Delta x \to 0$ の極限をとると

$$\lim_{\Delta x\to 0} f(x) \le \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta S(x)}{\Delta x} \le \lim_{\Delta x\to 0} f(x+\Delta x)$$

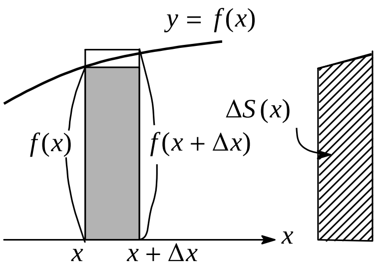
が得られます。$\displaystyle\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta S(x)}{\Delta x}$ は $S(x)$ の微分で $S'(x)$。右端の項は $f(x)$ に限りなく近づくので，結局 $\Delta x \to 0$ の極限では

$$S'(x) = f(x)$$

ということになります。ということで不定積分と原始関数の関係式

$$\int f(x)dx = S(x) \Longleftrightarrow S'(x) = f(x)$$

がでてきました。



$$\int f(x)dx = S(x) \Longleftrightarrow S'(x) = f(x)$$

$$f(x)\Delta x < \Delta S < f(x+\Delta x)\Delta x$$

$$f(x) < \frac{\Delta S}{\Delta x} < f(x+\Delta x)$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x) \le \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta x} \le \lim_{\Delta x \to 0} f(x+\Delta x)$$

$$f(x) \le \frac{dS}{dx} \le f(x) \Longrightarrow S'(x) = f(x)$$

次に，$f(x)$ の原始関数の一つを $F(x)$ とすると

$$S(x) = F(x) + C \tag{0.2.10}$$

とおけます。$x = a$ での面積はゼロとなるので（←ただの棒ですから）

$$0 = F(a) + C \quad \longrightarrow C = -F(a)$$

これを（0.2.10）にいれると

$$S(x) = F(x) - F(a)$$

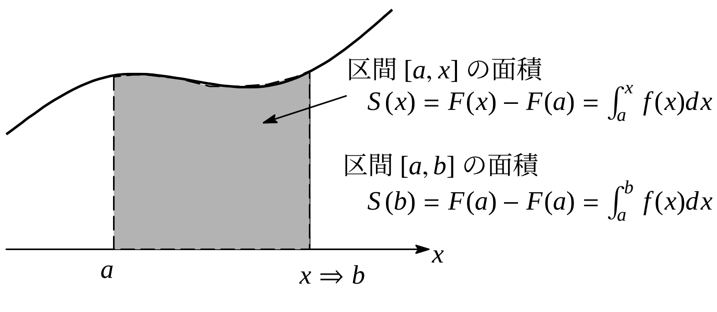
この式は，区間 $[a, x]$ における面積を表しているということですね（下図参照）。
したがって区間 $[a, b]$ における面積は x のかわりに b を入れて

$$S(b) = F(b) - F(a)$$

これが求める面積となります。これから（0.2.8）の定義式

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

がでてくることになります。



0.2.4 部分積分

関数の積の微分は

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

でした。これを積分してやると

$$\int (f(x)g(x))'dx = f(x)g(x) = \int \{f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\}dx = \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx$$

となり，これから次式が得られます。

$$\boxed{\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx} \tag{0.2.11}$$

これが**部分積分の公式**です。無論，定積分でも成り立ちます。

$$\boxed{\int_a^b f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx} \tag{0.2.12}$$

部分積分公式の有り難味は次のような積分を計算する時に実感できます。

$$\int_0^2 xe^x dx$$

積分計算の定石によるとまず原始関数を見つけるわけですが，この場合はそう簡単に見つからないので計算が難しい。しかし，部分積分を使うと簡単に積分できます。$f'(x) = e^x$, $g(x) = x$ とすると $f(x) = e^x$, $g'(x) = 1$ となるので，上の公式（0.2.12）を使って

$$\int_0^2 xe^x dx = [xe^x]_0^2 - \int_0^2 e^x dx = 2e^2 - [e^x]_0^2 = 2e^2 - e^2 + 1 = e^2 + 1$$

と求めることができます。

0.2.5　置換積分

置換積分というのは被積分関数の一部を適当な変数に置き換えて積分計算を楽にしようというものです。一般論をやるとややこしくなるので，ここでは例題を通して学習することにします。次の積分をやってみましょう。

$$\int (1 - 3x)^5 dx$$

真っ正直にやると $(1 - 3x)^5$ を展開して. . . となりますが，展開を考えるだけでゾッとしますね。そこで $t = 1 - 3x$ と置換してやります。その代わり x の微小変位量 dx も t の微少変位量に焼きなおしてやる必要があります[9]。

$$dt = 3dx \quad \longrightarrow \quad dx = -\frac{1}{3}dt$$

これをもとの式に入れると

$$\int (1 - 3x)^5 dx \longrightarrow -\frac{1}{3}\int t^5 dt = -\frac{1}{18}t^6 + C$$

となり，最後に t のかわりにもとの x を入れてやると

$$\int (1 - 3x)^5 dx = -\frac{1}{18}(1 - 3x)^6 + C$$

となって，簡単に積分できますね！

ついでにもう一つ。

$$\int \frac{1}{(2x + 3)^2} dx$$

$t = 2x + 3$ とおくと $dt = 2dx$ となるので，上の積分計算の結果は

$$\int \frac{1}{(2x + 3)^2} dx = \frac{1}{2}\int t^{-2} dt = -\frac{1}{2}t^{-1} + C = -\frac{1}{2(2x + 3)} + C$$

となります。

[9] $\frac{dt}{dx} = -3$ から $dt = -3dx$ が得られます。

0.3　簡単な微分方程式

0.3.1　加速度と速度の微分方程式

いままでは微積の数学の話ばかりで，少しうんざりされたかも知れません。このセクションでは上で学習した微積の知識を使って，物理現象を記述する簡単な微分方程式について述べます。

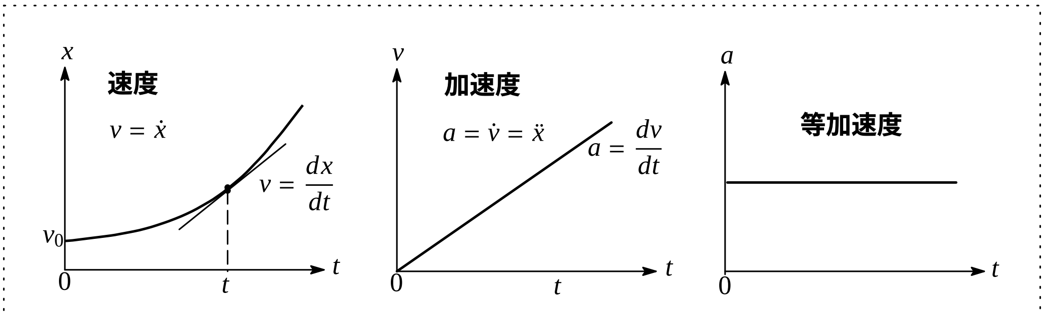
ニュートンの運動第 2 法則によれば「**力（F) ＝質量（m）×加速度（a）**」で表されます。加速度 (a) は速度（v) の時間的な変化の割合です。ある物体の時刻 t での速度を v とし刻 $t+\Delta t$ での速度を $v+\Delta v$ とすると時間間隔 Δt での速度の平均変化率は

$$\frac{\Delta v}{\Delta t}$$

となります。ここで $\Delta t \to 0$ の極限をとると，それは時刻 t における速度の変化率，つまり時刻 t での加速度となるので，加速度を a とすると

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} \tag{0.3.1}$$

となり，加速度は速度の時間微分で与えられます。



この式は微分を含む方程式なので**微分方程式**と呼ばれます。この微分方程式を解いていきます。まず，式を次のように変形します。

$$dv = adt$$

そして両辺を積分すると

$$\int dv = \int adt$$

となります。いま加速度 a は一定の値（等加速度運動）とすると，上の積分はすぐに実行できて

$$v(t) = at + C$$

が得られます。$t = 0$ のときの初速度を v_0 とすると $v_0 = C$ となるので，

$$v(t) = at + v_0 \tag{0.3.2}$$

これが求める微分方程式の解となります。次に，速度 v は進んだ距離 x の時間的な変化の割合なので，平均速度は

$$\frac{\Delta x}{\Delta t}$$

であたえられます。加速度の場合と同様に考えて $\Delta t \to 0$ の極限をとると，それは時刻 t における速度 $v(t)$ となるので

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} \tag{0.3.3}$$

この微分方程式を解くと速度と距離の関係式がでてきます。

$$dx = v(t)dt \longrightarrow \int dx = \int v(t)dt \longrightarrow x = \int v(t)dt + C \tag{0.3.4}$$

いま，等加速度運動を考えると $v = at + v_0$ なので，これを上の式に入れると

$$x = \int (at + v_0)dt + C \longrightarrow x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + C \longrightarrow x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$$

が得られます。ここで x_0 は $t = 0$ での位置ですね。

加速度は速度の時間微分であり，速度は距離の時間微分なので，加速度は距離の時間についての 2 階微分ということになります。

$$\begin{cases} a = \dfrac{dv}{dt} \\ v = \dfrac{dx}{dt} \end{cases} \longrightarrow a = \frac{d^2x}{dt^2} \tag{0.3.5}$$

（$P.S$）時間微分 d/dt のかわりに**頭にドット**をつけて表すこともあります。例えば

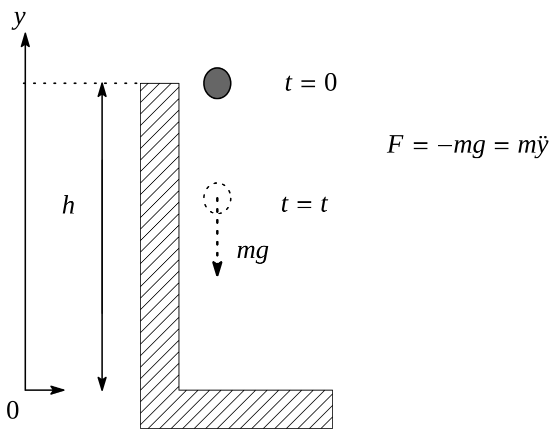
$$\begin{cases} v = \dot{x} \\ a = \dot{v} = \ddot{x} \end{cases}$$

0.3.2　ニュートンの運動方程式

ニュートンの運動方程式は力を F，質量を m，加速度を a とすると

$$F = ma = m\ddot{x}$$

で表されます。この運動方程式を使って高さ h から鉛直下方に自由落下[10]した質量 m の物体 A の運動を調べてみます。



座標軸として鉛直上方に y 軸をとります。物体 A には重力（万有引力）のみが働いており，物体の落下の加速度は重力加速度 g となります。重力は y 軸の負の方向に働いていますから $F = -mg$ で，運動方程式は次の微分方程式で与えられます。

$$-mg = m\ddot{y} \quad \longrightarrow \quad \ddot{y} = -g \tag{0.3.6}$$

[10] 自由落下なので重力以外の力の作用はありません。初速度はゼロです。

これを解いて運動を解析していくわけですが,

$$\ddot{y} = \dot{v} = \frac{dv}{dt} = -g \longrightarrow \int dv = \int gdt \longrightarrow v = -gt \quad \text{（初速度はゼロ）}$$

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = v \longrightarrow \int dy = \int vdt = \int (-gt)dt \longrightarrow y = -\frac{1}{2}gt^2 + h \text{（初期高さは } h\text{)}$$

が得られます。ということで，落下に要する時間 t は，落下点で $y = 0$ なので

$$0 = \frac{1}{2}gt^2 + h \longrightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

となります。ちなみに 50m の高さのビルからの物体の落下時間は $g = 9.8$ として

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \times 50}{9.8}} \simeq 3.2\text{秒}$$

となります。

以上で微分・積分の速習版を終わります。お疲れ様でした。これらの内容を理解すると「**社会人のための楽しい物理入門**」も楽しく（？）学習できるものと確信します（←ホンマかいな)。

※ 2009.12.11 ：*Thank's* omi さん。omi さんより指数関数の微分について誤記の指摘がありました。早速修正しておきました。

by $\mathscr{KENZOU}$

（了）