社会人のための楽しい物理入門

第１章：力　学

$\mathscr{KENZOU}$

2009 年 1 月 28 日

< abstract >

第１章「**力学**」は，ニュートンの運動法則から等加速度運動，放物運動，等速円運動，単振動，単振り子，仕事とエネルギー，力学的エネルギー保存則，運動量保存則，角運動量保存則，中心力による運動（万有引力，ケプラーの法則），剛体の力学を予定しています。

さて，最初に「力とはなに？」からはじめます。力というのは目に見えず，ものが動いてはじめてそこに力の作用を感じとることができます。力そのものを目に見える形で示すことはできないので，よく考えると実に捉えにくい概念とは思いますが，日常的には“ 力 ”のお世話になっているので，格段気にも留めずにすんでいます。

モノを押すと，押した方向に動きます。斜めに押せば斜めに動くし，力いっぱい押せば速く動く。このあたりから力というのは“ 大きさ ”と“ 向き ”をもっていると直感できるわけですが，このように大きさと向きを持つ物理量を**ベクトル量**と呼んでいます。速度もベクトル量ですね。例えば台風が東北東に時速 50km で進んでいるということは，台風の速さ（速度の大きさ）と向きを示していることになります。ということで力をベクトルで表すことを学習し，ベクトルは合成と分解ができる，いわゆるベクトルの**合成則・分解則**を学んでいきます。一つのモノを２人で押せば一人の場合よりも軽く押せますね。つまりモノに２人分の力が加わったことになるわけですが，これが**力の合成**といわれるものです。しかも２人が同じ方向に押したほうが互いに違う方向を押す場合よりスムーズに動きますが，これがベクトル合力の体感的な理解ですね。この合成則・分解則を活用して力の釣り合いの問題を考えていきます。そして，摩擦力について少し触れます。

次に質点の運動に進みます。運動している質点はニュートンが発見した第１から第３までの運動法則に従って運動します。そして運動法則を適用した事例として等加速度直線運動，放物体の運動，等速円運動，単振動等の運動を調べていきます。そして力学的エネルギー保存の法則を学習します。つづいて，中心力による運動に進み，有名なケプラーの法則やそれをベースに導かれたニュートンの万有引力の法則を学習し，中心力の運動では角運動量が保存されることを学びます。この辺でいわゆる質点系の力学を終了し，次ぎに剛体の力学について学習していきます。剛体はある大きさを持つので，その運動は並進運動に加え回転運動がでてきます。回転のしにくさを表す量として慣性モーメントを定義し，回転運動の方程式を導出します。あせらずにゆっくり取り組んでいただけばと思います。それではははじめましょうか。

目 次

第 1 章　力学 4

1.1　力とはなに？ 4
■重さと質量 4
1.1.1　作用と反作用 5
1.1.2　力のつりあい 6
1.1.3　力の合成と分解 7
■ベクトルの表し方 7
■ベクトルの大きさと成分 8
■ベクトルの合成則 8
■ベクトルの分解則 9
■力の釣り合い・・・再び 9
1.1.4　静止摩擦 11
1.2　質点の運動 12
1.2.1　位置ベクトルと変位ベクトル 12
■位置ベクトル 12
■変位ベクトル 12
1.2.2　速度とベクトル 13
1.2.3　速度の合成と分解 14
1.2.4　相対速度 15
1.2.5　ニュートンの運動法則 16
■ニュートンの運動第 1 法則 16
■ニュートンの運動第 2 法則 16
■ニュートンの運動第 3 法則（作用・反作用の法則） 17
1.3　等加速度直線運動 18
1.3.1　平均速度と瞬間の速度 18
1.3.2　等加速度直線運動 18
■加速度の微分表示 19
1.3.3　重力による鉛直の運動 20
1.4　放物体の運動（等加速度運動） 22
1.5　等速円運動（等加速度運動） 25
1.5.1　角速度 26
■角速度の定義 26
■等速円運動の周期・速度と角速度の関係 26
1.5.2　等速円運動の加速度 27
1.5.3　向心力 28
1.6　単振動 30
1.6.1　最大速度と最大加速度 30
1.6.2　初期位相とは 31
1.6.3　等速円運動と単振動の対応関係 31
1.6.4　単振動の運動方程式 32

1.7 単振り子 35
1.7.1 単振り子の運動方程式と振り子の等時性 35
1.8 仕事とエネルギー 37
1.8.1 仕事とは何？ 37
1.8.2 バネの仕事 38
1.8.3 保存力とは 38
1.9 力学的エネルギー保存の法則 39
1.9.1 エネルギーとはなに 39
1.9.2 重力による位置エネルギー 39
1.9.3 運動エネルギー 40
1.9.4 力学的エネルギー保存の法則 42
1.10 運動量と力積 43
1.10.1 運動量とは 43
1.10.2 運動量と力積 43
■撃力について 44
1.10.3 運動量保存の法則 44
1.11 運動量保存則と力学的エネルギー保存則 45
1.11.1 完全弾性衝突 45
1.11.2 非完全弾性衝突 46
1.11.3 反発係数 46
1.12 中心力による運動 46
1.12.1 ケプラーの法則 46
1.12.2 万有引力の法則 47
1.12.3 万有引力による位置エネルギー 48
1.12.4 人工衛星 49
1.12.5 角運動量 51
1.12.6 角運動量保存の法則（面積速度一定の法則） 52
1.13 剛体の力学 53
1.13.1 剛体とはなに？ 53
1.13.2 剛体に働く力 54
■剛体における平行２力の合力 54
1.13.3 力のモーメント 55
1.13.4 剛体の釣り合い 55
1.13.5 剛体の重心 56
1.14 剛体の運動 57
1.14.1 剛体の運動方程式 57
1.14.2 回転の運動方程式と慣性モーメント 58
■種々の剛体の慣性モーメント 59
1.14.3 平行軸，直交軸の定理 61
1.14.4 回転運動のエネルギーとエネルギー保存則 62
■回転運動のエネルギー 62
■力学的エネルギー保存則 63
1.15 滑車 65
1.15.1 定滑車と動滑車 65

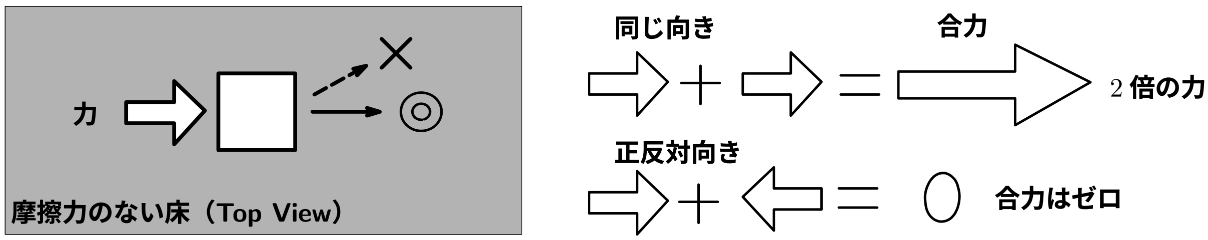
第1章　力学

1.1　力とはなに？

力とは何でしょうか。例えば，じっと止まっているトロッコを後ろからエイッと押すとトロッコは前方に動きだしますね。これは“ 力 ”がトロッコに作用し，その結果トロッコが動いたと考えられます。そして力強く押すとトロッコは勢いよく動き始める。このようなことから「**力とは物体の運動を変化させる作用である**」と考えられます。また，摩擦力のない水平な床の上に置かれた物体を水平に押すと，押した方向に物体は動き，その方向と異なった方向には進まないことから，力には“ **大きさ** ”に加え，“ **向き** ”があり[1]，一方の向きを「正の向き」とすると他方は「負の向き」となります。そして，同じ方向に作用する力の大きさは足し算で表すことができます。

物体は力の作用する方向 (向き) に動く

$\Longrightarrow$ **力は“ 大きさ ”と“ 向き ”を持っている**

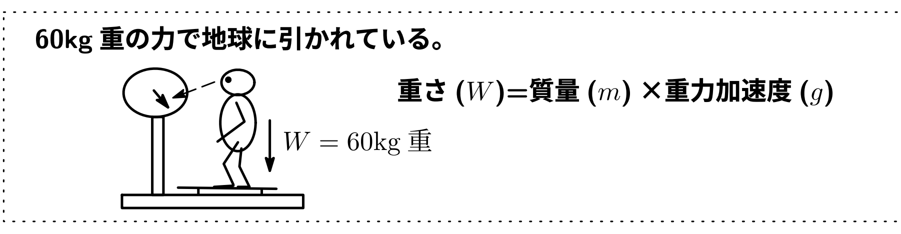


■重さと質量

健康診断で体重を測ると例えば 60 キロとかでますが，60 キロの**重さ**とは地球が人間を引く力の大きさ（重力／万有引力）のことです。力は，先ほどのトロッコの話のように加速度を生みますが，地球がモノを引っぱる力，重力が生みだす加速度は特に**「重力加速度」**と呼ばれ，通常 g と書かれます[2]（$g = 9.8\mathrm{m/s^2}$）。体重 60 キロを正確に表現すれば，“ 体重は 60kg 重である ”ということになります。ここで，kg 重という新たな表現がでてきましたが， 1 kg 重というのは**質量** 1 kg の物体を地球が引く力の大きさ を意味します。したがって Wkg 重の重さというのは，その質量を m とすると次のように表されることになります。

$$W = mg \tag{1.1.1}$$

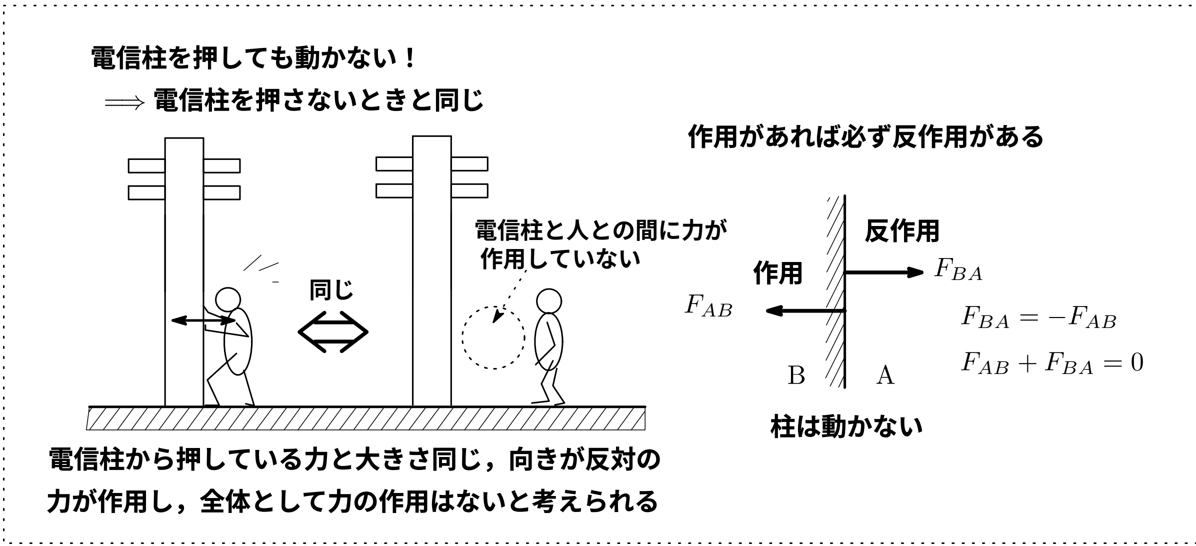
つまり，重さは W は質量 m に比例し，その比例定数は g であるということになります。よく，重さと質量を混乱する人もいますが，**“ 重さ ”は力**で，**“ 質量 ”は物体の持つ物質の分量**で，単位は“ kg ”あるいは“ g ”です。重さでもって物質の量を言い表すときの質量を特に**重力質量**といいます[3]。



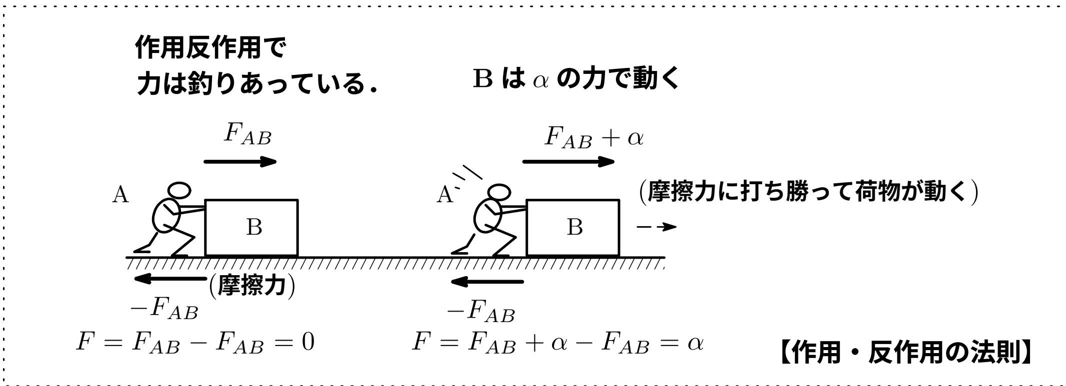
[1] このような量をベクトル量といいますが，ベクトルについては後で勉強します。
[2] 重力加速度の g は重力 $gravity$ の g からきている。
[3] 力と加速度は $F = ma$ で表されますが，$a = F/m$ で m が大きい物体では同じ力でも加速度は小さく，速さが変化しにくい。これを慣性が大きいといいますが，この意味で m を慣性質量といいます。

1.1.1　作用と反作用

電信柱を思いっきり押してもピクリとも動きません。逆に押したほうが押し返されるように感じます。“ **力とは物体の運動を変化させる作用** ”なので，電信柱がピクリともしないということは，実質的に力が作用していないことになります。また，押している人間も動かない，つまり電信柱と人間が押し合いっこして力のバランスが取れているということですね。電信柱を押している力（作用）の大きさを F_{AB} とし，この向きを<u>正の向き</u>とすると，電信柱は，F_{BA} の大きさの力で逆の方向に押し返す（反作用）。この結果，電信柱と人との間に働いている力は $F_{AB} - F_{BA} = 0$ とゼロになり（大きさは同じで向きは正反対），結局互いに力が作用していないことと同じになります。



それではざらざらした床の上の重い荷物を押す場合はどうでしょうか。力 F_{AB} で最初押しても（作用）荷物はびくともしないとします。つまり，荷物からは反対方向に大きさ同じの摩擦力 $-F_{AB}$（反作用）が働くため，これらの力の合力がゼロとなって動かないのですね。そこでもう少し力を入れ，$F_{AB} + \alpha$ の力で押すと，荷物は α の力を受けて動き始めます。押す力が最大摩擦力[4]に打ち勝ち，その差し引きした力（$F = \alpha$）が荷物を動かすのですね。



以上のように,「**物体 A から物体 B に及ぼす力と物体 B が物体 A に及ぼす力は，向きが反対で大きさが等しい**」という経験則を「**作用・反作用の法則**」（ニュートンの運動第 3 法則）といいます。

《Coffee Break》
例えば相撲で巨漢小錦と小柄な舞の海がぶつかり合い，押し合い相撲で両者じっとしているとき，体の大きい小

[4] 摩擦力は物体の重さに比例します。そして荷物が動き始める寸前の摩擦力を最大摩擦力といいます。

鍋と小柄な舞の海に働く力の大きさは同じ（向きは反対）ですね。相撲取りは体重を重くすることに努力していますが，体重が重いからといって大きな力をだせるというものでもありません。それではなぜ体重を重くするのかというと，脚注に書いたように $a = F/m$ でぶつかったとき F は同じでも m（慣性質量）がちがうため，m の大きな小錦の a（加速度）は小さく，つまり簡単には飛ばされないということになります。

1.1.2　力のつりあい

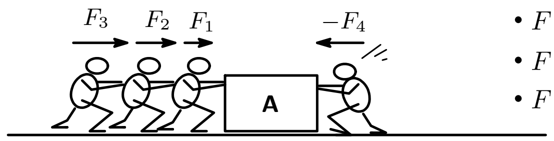
さて,「作用する力」と「反作用する力」の 2 つの力の**合力**を考えましたが，一般に，同じ直線上に働く大きさ $F_1, F_2, F_3, \cdots, F_n$ の n 個の力の合力を考えます。ある向きを正，それと反対の向き負とし，n 個の力の合力はそれぞれの力を足し合わせたものになります。合力を F とすると

$$F = F_1 + F_2 + F_3 + \cdots + F_n = \sum_{i=1}^{n} F_i \tag{1.1.2}$$

ということですね。

A に作用する合力 (右向きを正とする）

$F = F_1 + F_2 + F_3 - F_4$



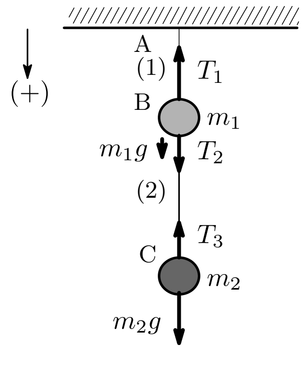
【一直線上の力の合力】

- $F > 0 \cdots$ **A は右に動く**
- $F = 0 \cdots$ **A は静止**
- $F < 0 \cdots$ **A は左に動く**

上図で，物体 A は摩擦のない床の上におかれているとします。A は左から $F_1 + F_2 + F_3$ の力を受け，右から $-F_4$ の力を受けたとします。このとき A には $F = F_1 + F_2 + F_3 - F_4$ の合力が働き，$F > 0$ であれば A は右に動き，$F = 0$ では力が釣り合い静止，$F < 0$ となれば A は左に動くことになります。

【問題１】質量 m_1, m_2 の重りが図のように (1), (2) に吊るしてある。(1) および (2) の糸の張力を求めよ。ただし糸の重さは無視する。

【答】重りの釣り下がった糸は切れていないので系全体の力は釣り合っています。



合力 (F) はゼロ

$(a)\, F = m_2 g + m_1 g + T_2 - (T_1 + T_3) = 0$

B の釣り合い

$(b)\, m_1 g + T_2 - T_1 = 0$

C の釣り合い

$(c)\, m_2 g - T_3 = 0$

糸 (2) の釣り合い

$(d)\, T_2 - T_3 = 0$

糸鉛直下方を正の向きとります。糸の張力を T_1, T_2, T_3，合力を F とすると

$$F = m_2 g + m_1 g + T_2 - (T_1 + T_3) = 0$$

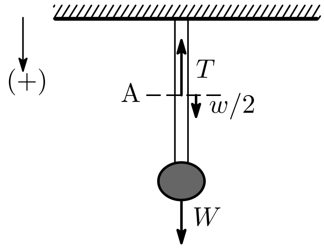
力の釣り合いの式は

$$\begin{cases} \text{重り B} & : \quad m_1 g + T_2 - T_1 = 0 \\ \text{重り C} & : \quad m_2 g - T_3 = 0 \\ \text{糸 (2)} & : \quad T_2 - T_3 = 0 \end{cases} \tag{1.1.3}$$

これらの式から糸の張力を求めると

$$T_1 = (m_1 + m_2)g, \quad T_2 = m_2 g$$

【問題２】天井から垂れた重さ w の糸に重さ W の重りを吊るした。このとき，糸の真ん中の点 A における張力 T を求めよ。



A 点における合力：F

$$F = W + \frac{w}{2} - T = 0$$

T**：A 点での糸の張力**
$w/2$**：半分の糸の重さ**
W**：錘の重さ**

【答】糸の中央 A 点に働く力は鉛直下方に重りの重さ W と糸の半分の重さ $w/2$ に加え，鉛直上方に糸の張力 T が働いています。点 A で糸は切れずにいるので，A 点の作用する合力はゼロでなければなりません。合力を F とすると

$$F = W + \frac{w}{2} - T = 0$$

求める張力は $T = W + w/2$ となります。

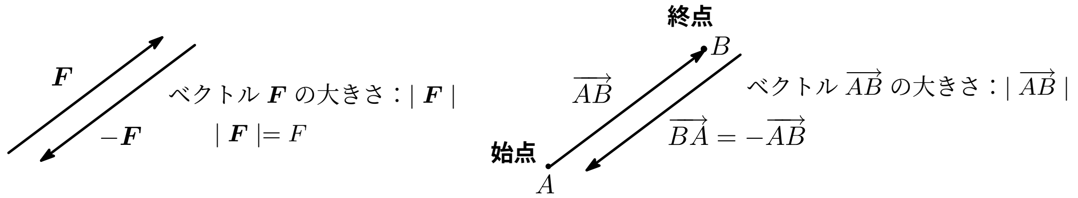
1.1.3　力の合成と分解

力は「向き」と「大きさ」をもった量で，このような量を**ベクトル量**あるいは単に**ベクトル**といいます[5]。ベクトルは $\vec{F}$ と頭に矢印をつけたり，あるいは太文字で $\boldsymbol{F}$ のように書き表します。ベクトルは力だけでなく，速度や加速度などもベクトルです。一方，時間や温度など，大きさだけをもち，向きをもたない量を**スカラー量**あるいは単に**スカラー**といっています。

■ベクトルの表し方

ベクトルは，文字で表す場合，太文字で$\boldsymbol{F}$と表す場合と，始点と終点を明示した $\overrightarrow{AB}$ との 2 通りの表し方がありますが，ここでは主に太字で表していくことにします。また，ベクトルを図形で表す場合，ベクトルの向きを示す矢印を描き，ベクトルの大きさは，文字では $|\,\boldsymbol{F}\,|$ と絶対値の記号をつけるか，細字の F で表し，図形では矢印の長さで示します。大きさが同じで向きが反対のベクトルはマイナスの符号をつけます。

《ベクトルの 2 通りの表しかた》

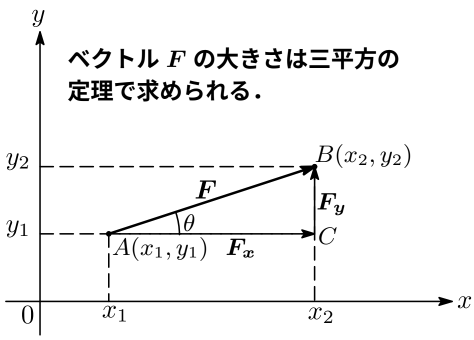


[5] ベクトルはラテン語からきており，運び手とか配達人といった意味です。

■ベクトルの大きさと成分

2 次元平面上にベクトル $\boldsymbol{F}$ を描くと図のようになります。

ベクトル F の大きさは三平方の定理で求められる．



ベクトルの合成

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F_x} + \boldsymbol{F_y} \Longleftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA}$$

ベクトルの大きさ＝線分 $\overline{AB}$ の長さ

$$\begin{aligned} |\,\boldsymbol{F}\,| &= \sqrt{|\,\boldsymbol{F_x}\,|^2 + |\,\boldsymbol{F_y}\,|^2} \\ &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \end{aligned}$$

$$\tan\theta = \frac{\boldsymbol{F_y}}{\boldsymbol{F_x}}$$

ベクトル $\boldsymbol{F}$ の大きさ $|\,\boldsymbol{F}\,|$ は線分で $\overline{AB}$ の長さで，これは三平方の定理を使って求められます。

$$|\,\boldsymbol{F}\,| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \tag{1.1.4}$$

ベクトル $\boldsymbol{F}$ を x 軸への射影したものをベクトル$\boldsymbol{F}$の x 成分（$\boldsymbol{F}_x$），y 軸へ射影した $\boldsymbol{F}$ の y 成分（$\boldsymbol{F}_y$）といいます。

■ベクトルの合成則

ベクトルは始点と終点をもち，その長さがベクトルの大きさを表しました。多数のベクトルの足し算（ベクトルの合成といいます）は，最初のベクトルの始点を“ 始点 ”とし，最終のベクトルの終点を“ 終点 ”とするベクトルで表されます（下図を参照ください）。

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \cdots + \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{AQ}$$

各ベクトルの x 成分，y 成分の足し算は，合成ベクトル（$\overrightarrow{AQ}$）の x 成分，y 成分と等しくなります。

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB_x} + \overrightarrow{BC_x} + \overrightarrow{CD_x} + \cdots + \overrightarrow{QP_x} = \overrightarrow{AQ_x} \\ \overrightarrow{AB_y} + \overrightarrow{BC_y} + \overrightarrow{CD_y} + \cdots + \overrightarrow{QP_y} = \overrightarrow{AQ_y} \end{cases}$$

となります。

ベクトルの足し算結果は始点と終点を結ぶベクトルで表せる．

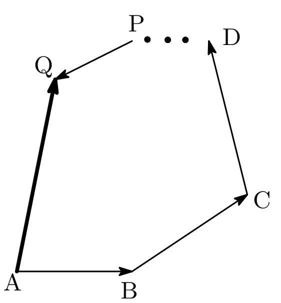
$$\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \cdots + \overrightarrow{QP}$$

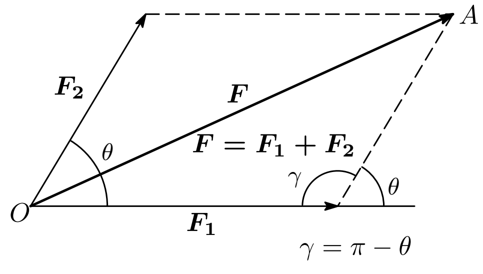
力の平行四辺形

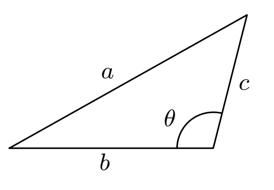
$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F_1} + \boldsymbol{F_2} \qquad \begin{aligned} \boldsymbol{F_x} &= \boldsymbol{F_{1x}} + \boldsymbol{F_{2x}} \\ \boldsymbol{F_y} &= \boldsymbol{F_{1y}} + \boldsymbol{F_{2y}} \end{aligned}$$

第 2 余弦定理

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\theta$$







《力の平行四辺形》

上の真ん中の図に注目ください。1 点 O に作用している 2 つの力 $\boldsymbol{F_1}$ と $\boldsymbol{F_2}$ の合力は，平行四辺形の対角

線 $\overrightarrow{OA}$ というベクトルで表される力 $\boldsymbol{F}$ となります。これを**力の平行四辺形**と呼んでいます。ベクトル $\boldsymbol{F}$ の大きさは F は，第 2 余弦定理より

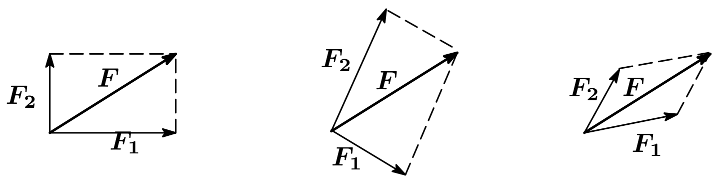
$$F^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2\cos\gamma$$

と求めることができます。例えば，3kg 重と 2kg 重の力が 60 °の角をなして 1 点に働くときの合力 $\boldsymbol{F}$ の大きさは $F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2\cos\theta} = \sqrt{3^2 + 2^2 - 2\times3\times2\cos(\pi - 60)} = 4.36$ (kg 重）となります。

■ベクトルの分解則

ベクトル合成の逆がベクトルの分解になります。分解されたベクトルを**分ベクトル**といいますが，分ベクトルはいろいろ取れます。このあたりの事情は下図を見てください（**力の平行四辺形の原理**が活かされています)。

ベクトルF はいろいろな分ベクトルに分解できる (力の平行四辺形)



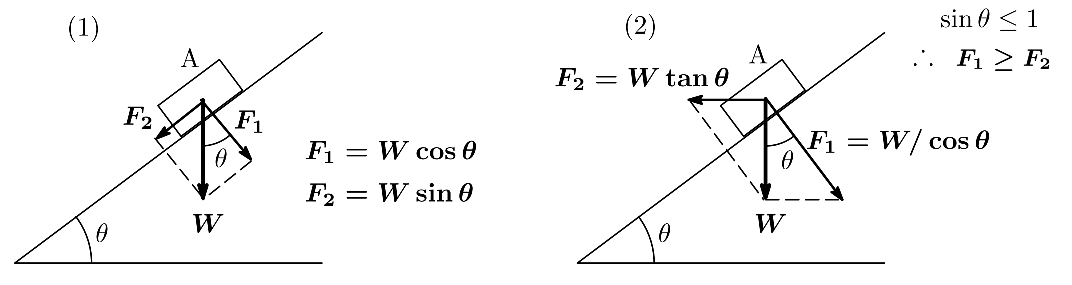
ベクトルの分解は力学問題でどのように活用されるのか，問題をとおして理解を深めることにします。

【問題３】 水平と角 θ をなす斜面上の物体 A に働く重力 $\boldsymbol{W}$ を

(1) 斜面に平行な力と斜面に垂直な力とに分解せよ。

(2) 水平な力と斜面に垂直な力との分解せよ。

【答】重力$\boldsymbol{W}$は，力の平行四辺形の関係を使って下図に示すように分解できます。



ところで物体が斜面をすべり落ちるのは，重力 $\boldsymbol{W}$ の分力 $\boldsymbol{F_2}$ が働くからということになります。分力 $\boldsymbol{F_1}$ は A を斜面に押し付ける力となりますね。一方，A に働く重力 $\boldsymbol{W}$ を (2) のように分解した場合，A は分力$\boldsymbol{F_2}$により斜面を離れて水平に飛行するのかと思われますが，斜面に押し付ける分力$\boldsymbol{F_1}$と比較すると

$$\boldsymbol{F_1} = \frac{\boldsymbol{W}}{\cos\theta}, \quad \boldsymbol{F}_2 = \boldsymbol{W}\tan\theta = \boldsymbol{W}\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \boldsymbol{F}_1\sin\theta \quad \because \boldsymbol{F_2} \leqq \boldsymbol{F_1}$$

なので，A は斜面に押し付けられて斜面上をすべることになります[6]。

■力の釣り合い・・・再び

力の釣り合いのセクションでは一直線上に力が作用している場合を考えました。力の合成・分解を勉強しましたので，ここでは一般的な力の釣り合い条件を求めていきます。いま，原点におかれた物体 A に

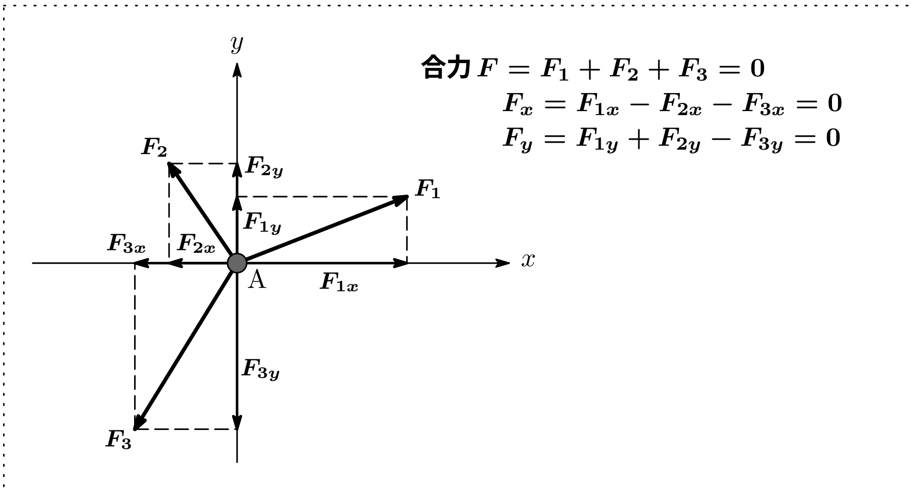
[6] $F_1 = F_2$ になるのは $\theta = 90$ °の時で，このときには F_1 も F_2 も W 一本となりますね。

力 $\boldsymbol{F_1}, \boldsymbol{F_2}, \boldsymbol{F_3}, \cdots, \boldsymbol{F_n}$ が働き釣り合っているとします (←図では 3 つの力しか描いていませんが ;;)。
A は動かない のでAにかかる合力$\boldsymbol{F}$は 0 ということになります。

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F_1} + \boldsymbol{F_2} + \boldsymbol{F_3} + \cdots + \boldsymbol{F_n} = \boldsymbol{0}$$

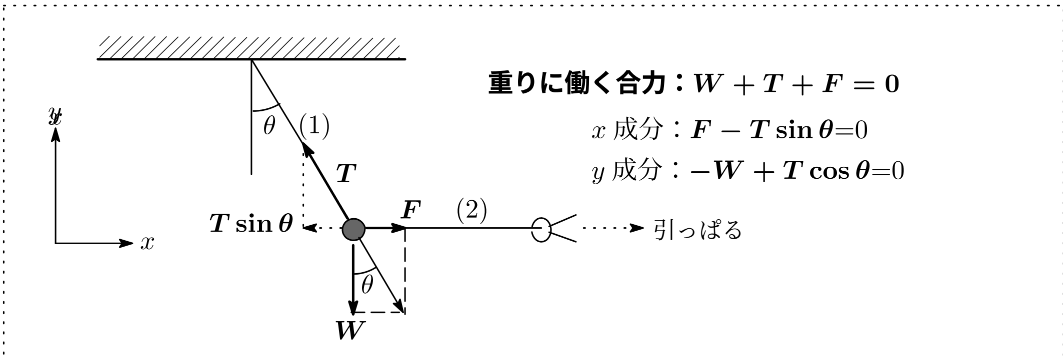
図の場合は 3 つの力が釣り合っているので，力の合力ベクトルとその成分表示は次のようになります。

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F_1} + \boldsymbol{F_2} + \boldsymbol{F_3} = \boldsymbol{0}$$
$$\begin{cases} \boldsymbol{F_x} = \boldsymbol{F_{1x}} - \boldsymbol{F_{2x}} - \boldsymbol{F_{3x}} = \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{F_y} = \boldsymbol{F_{1y}} + \boldsymbol{F_{2y}} - \boldsymbol{F_{3y}} = \boldsymbol{0} \end{cases}$$



【問題４】 一端を天井に固定した糸 (1) に 100g の物体を吊るし，これに糸 (2) をつけて水平に引き，糸 (1) が鉛直と 30 °の角になるようにした。糸 (1)(2) の張力はいくらか。

【答】 重りに働く 3 つの力（重力と 2 つの糸の張力）を図示すると下図のようになります。



重りは動かず，釣り合っているので重りに働く 3 つの力の合力は 0 となります。

$$\boldsymbol{W} + \boldsymbol{T} + \boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$$

合力の x 成分，y 成分は 0 なのでベクトルの向きに注意して合力ベクトルを成分表示で書くと

$$\begin{cases} x \text{ 成分：} & \boldsymbol{F} - \boldsymbol{T}\sin\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{0} \\ y \text{ 成分：} & -\boldsymbol{W} + \boldsymbol{T}\cos\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{0} \end{cases}$$

これから求める張力は $\boldsymbol{T} = \dfrac{\boldsymbol{W}}{\cos\theta}$ となります。

1.1.4 静止摩擦

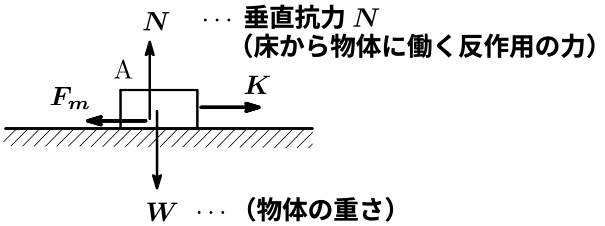
セクション 1.1.2「作用・反作用」のところで**摩擦力**について少し触れましたが，**摩擦力**は物体の動きを妨げる力ですね。摩擦力は通常静止している物体にのみ働くと考えがちですが，斜面をすべる物体にも摩擦力は働きます。静止している物体を動かすときに働く摩擦力を「**静止摩擦力**」といい，運動している物体に働く摩擦力を「**動摩擦力**」といいます。物体が動き始めるぎりぎりのときの摩擦力を**最大静止摩擦力**といい， 最大静止摩擦力を $\boldsymbol{F_m}$ すると，$\boldsymbol{F_m}$ は垂直抗力 $\boldsymbol{N}$ に比例します。

$$\boldsymbol{F_m} = \mu \boldsymbol{N} \tag{1.1.5}$$

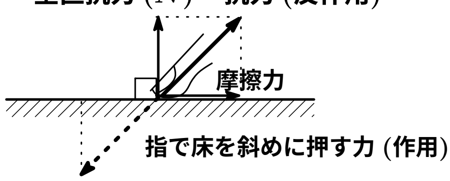
垂直抗力 $\boldsymbol{N}$ は，床の上に置かれた物体の重さ（重力）に対する床からの反作用の力です。

《物体 A が動き始める瞬間》
右に押す力K と最大摩擦力F_m は大きさ同じで向きが反対．
少しでもK がF_m より大きくなれば A は右に動く．

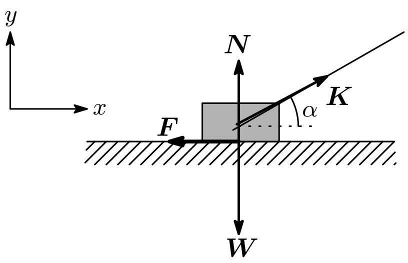
$\boldsymbol{F_m} = \mu \boldsymbol{N}$



《抗力と垂直抗力》



【問題５】 粗い水平な面上にある重さ W の物体を水平と角 α をなす方向へ引いて，物体を水平に動かすにはどれくらいの力を要するか。ただし，物体の静止摩擦係数を μ とする。



《動く寸前の力の釣り合い》
x 成分：$\boldsymbol{K}\cos\alpha - \boldsymbol{F_x} = 0$
y 成分：$\boldsymbol{N} + \boldsymbol{K}\sin\alpha - \boldsymbol{W} = 0$
最大摩擦力：$\boldsymbol{F_m} = \boldsymbol{F_x} = \mu\boldsymbol{N}$

【答】 水平と角 α をなす方向へ物体を引っぱり，動き出す直前の引っ張り力を $\boldsymbol{K}$ とします。物体に働く合力はこのときゼロなので，力の釣り合いを成分で表すと

$$\begin{cases} x \text{ 成分：} & \boldsymbol{K}\cos\alpha - \boldsymbol{F_x} = 0 \\ y \text{ 成分：} & \boldsymbol{N} + \boldsymbol{K}\sin\alpha - \boldsymbol{W} = 0 \end{cases}$$

y 成分の力の釣り合いは物体が床にめり込まない（あるいは床から浮かない）ための条件ですね。$\boldsymbol{F_x}$ は最大静止摩擦力となるので，垂直抗力 $\boldsymbol{N}$ より

$$\boldsymbol{F_x} = \mu\boldsymbol{N}$$

これらの条件式より

$$\begin{cases} \boldsymbol{K}\cos\alpha = \mu\boldsymbol{N} \\ \boldsymbol{K}\sin\alpha = \boldsymbol{W} - \boldsymbol{N} \end{cases}$$

2 番目の式に μ を掛けて一番目の式と足しあわすと $\boldsymbol{K}(\cos\alpha + \mu\sin\alpha) = \mu\boldsymbol{W}$ が得られるのでこれから

$$\boldsymbol{K} = \frac{\mu\boldsymbol{W}}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}$$

が得られます。

1.2 質点の運動

物体は色や光沢などいろいろな性質を持ちますが，物体の運動（力学）を考える場合は，例えば色や光沢などは運動に関係しませんね。運動の記述に必要なものは，物体の**質量**と位置つまり**座標**$(x,\,y)$ ですが，現実の物体には大きさがあるので位置座標 $(x,\,y)$ だけでは足りず，物体の向きを表す変数，例えば回転角なども必要になってきます。このような運動を記述する方程式は当然ややこしくなります。そこで，物体を大きさのない“ 点 ”として捉えると，その運動の記述は容易になり，また力学の骨格もつかめやすくなります。この点のことを**質点**と呼び，以下では質点の力学[7]を調べていくことにします。

1.2.1 位置ベクトルと変位ベクトル

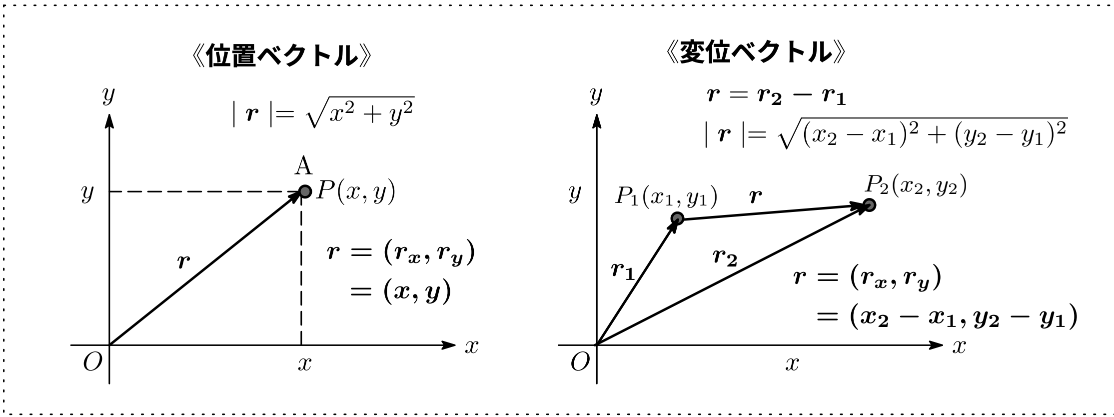
■位置ベクトル

セクション 1.12.6 の「力の合成と分解」のところでベクトルを学習しました。ベクトルというのは“ 大きさ ”と“ 向き ”をもった量と定義され，ベクトルの大きさはその線分の“ 長さ ”であらわしました。いま質点 A が 2 次元 $x-y$ 座標上の任意の 1 点 $P(x,y)$ にあるとします。原点 O から点 P に向かう矢印の線分を点 P の**位置ベクトル**と呼びます。位置ベクトルを太字の $\boldsymbol{r}$ で表すと，位置ベクトルの大きさは三平方の定理（ピタゴラスの定理）より

$$|\ \boldsymbol{r}\ | = \sqrt{x^2 + y^2}$$

となります。位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ の x, y 成分はそれぞれ $\boldsymbol{r_x} = x$, $\boldsymbol{r_y} = y$ で，これを次のように書くこともあります。

$$\boldsymbol{r} = (r_x, r_y) = (x, y)$$



■変位ベクトル

次ぎに質点 A が $x-y$ 平面上で P_1 から P_2 まで移動したとします。P_1，P_2 の位置ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{r}_1$，$\boldsymbol{r}_2$ とし，P_1 から P_2 へ向かう線分をを**変位ベクトル**といいます。変位ベクトル $\boldsymbol{r}$ は従って

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$$

[7] 理化学辞典には「質点とは 1 点に集中した質量。ニュートン力学は質点に対する運動法則を基本とし，拡がりをもつ一般の物体もこれを質点系からの極限として扱う。」と書かれています。

で，その大きさは

$$| \boldsymbol{r} |= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

で与えられます。

1.2.2　速度とベクトル

速度は“ 速さ ”と“ 向き（方向）”をもつベクトル量です。速さは移動距離を所要時間で割ったものですね。

$$\text{速さ} \ (v) = \text{移動距離} \ (x) \div \text{時間} \ (t)$$

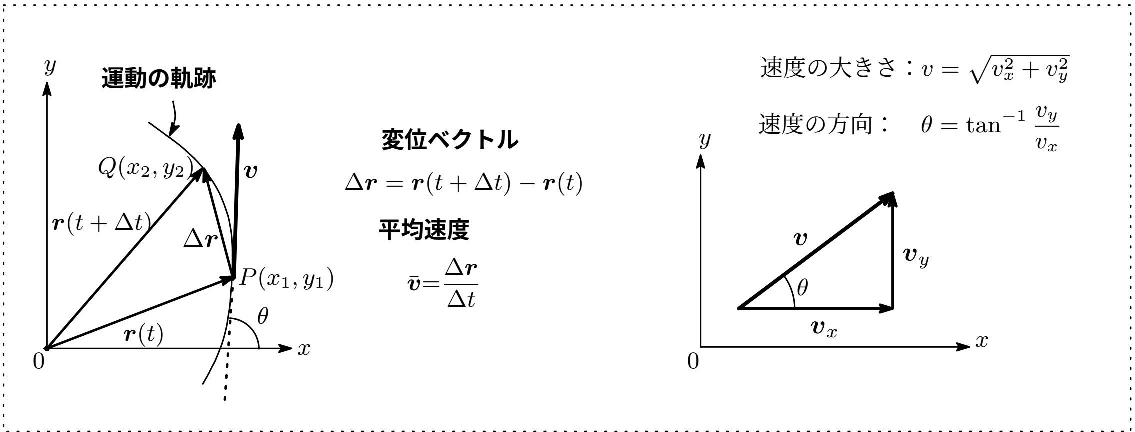
さて，ある時刻 t での質点の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}(t)$ とし，それから Δt だけ時刻が経過したときの質点の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}(t+\Delta t)$ とします。変位ベクトルを $\Delta \boldsymbol{r}$ とすると

$$\Delta \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t+\Delta t) - \boldsymbol{r}(t)$$

時間 Δt での質点の平均速度を $\bar{\boldsymbol{v}}$ とすると[8]，これは変位ベクトル $\boldsymbol{\Delta r} = \boldsymbol{r}(t+\Delta t) - \boldsymbol{r}(t)$ を Δt で割った値なので，

$$\bar{\boldsymbol{v}} = \frac{\boldsymbol{\Delta r}}{\Delta t}$$

で与えられます。



経過時間 Δt を非常に短くしていくと，上で求めた平均速度は点 P における質点の瞬間の速度に限りなく近づいていきます。その瞬間の速度を $\boldsymbol{v}(t)$ とすると

$$\boldsymbol{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$$

で与えられます。速度 $\boldsymbol{v}$ の分速度は

$$\begin{cases} x \ \text{成分：} \quad v_x = \dfrac{dr_x}{dt} = \dfrac{dx}{dt} \\ y \ \text{成分：} \quad v_y = \dfrac{dr_y}{dt} = \dfrac{dy}{dt} \end{cases}$$

速さと方向は

$$\text{速さ：} v(t) = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}, \quad \text{方向：} \theta = \tan^{-1} \frac{v_y}{v_x}$$

となります。

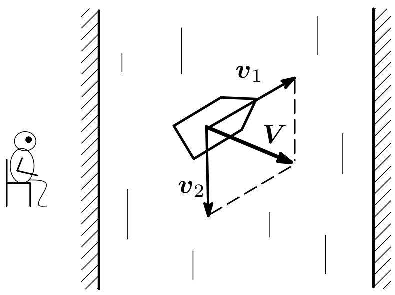
[8] 物理量 A の平均を示す場合，通常頭にバーをつけて $\bar{A}$ と表す。

1.2.3　速度の合成と分解

速度をベクトルで表すと**ベクトルの合成則・分解則**のところで学習したようにように，**速度の分解と合成**ができます。2 つの速度を $\boldsymbol{v_1}$,$\boldsymbol{v_2}$ とし，**合成ベクトル**を$\boldsymbol{V}$とすると

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{v_1} + \boldsymbol{v_2} \tag{1.2.1}$$

で，例えば下図に示すように，速度 $\boldsymbol{v_2}$ で流れている河を速度 $\boldsymbol{v_1}$ で船が横切る場合，岡から見た船の速度はこれらの速度を合成した $\boldsymbol{V}$ となります。これが**速度の合成**です。



速度の合成

$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{v_1} + \boldsymbol{v_2}$

舟は河の流れに沿って速度 $\boldsymbol{v_2}$ で動くと同時に静水に対する速度 $\boldsymbol{v_1}$ で動く。結果的には舟は岸から見て速度 $\boldsymbol{V}$ で動くことになる。

上の図で $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ を速度 $\boldsymbol{V}$ の分速度といいます。また，速度$\boldsymbol{V}$を分速度 $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ に分解することを**速度の分解**といいます。

【問題６】 静水を $V_1 = 0.5$m/s で進む舟が，$V_2 = 0.3$m/s の速さで流れている幅 80m の河を渡るとき

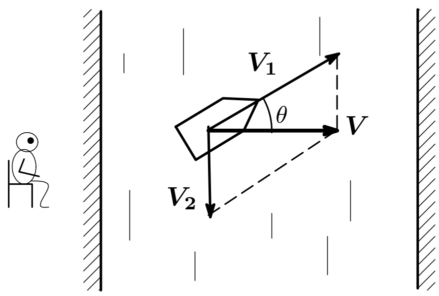
(1) 河に直角に渡るには，舟をどちらに向けるべきか，また何秒で渡れるか。

(2) 最小時間に渡るには，舟をどちらに向けるべきか，その時間はいくらか。

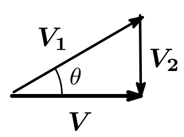
【答】

(1) 河を直角に渡る速度を $\boldsymbol{V}$ とすると，これは $\boldsymbol{V}_2$ と $\boldsymbol{V}_1$ の合成速度で表されますね。

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}_1 + \boldsymbol{V}_2$$



《ベクトルの合成》



$V = V_1 \cos\theta$

$\sin\theta = \boldsymbol{V_2}/\boldsymbol{V_1} = 0.3/0.5 = 0.6$

$V = \sqrt{V_1^2 - V_2^2} = 0.4\ (m/s)$

$\boldsymbol{V}_1$ と $\boldsymbol{V}$ のなす角を θ とすると (下記細字はベクトルの大きさを表します)

$$\sin\theta = \frac{V_2}{V_1} = \frac{0.3}{0.5} = 0.6 \longrightarrow \theta = 36.9\ ^\circ$$

速さ V は

$$V = \sqrt{V_1^2 - V_2^2} = \sqrt{0.5^2 - 0.3^2} = 0.4\ (m/s)$$

河を渡る所要時間は河幅 80m を速さ V で割ればよいので $80 \div 0.4 = 200\,(\mathrm{s})$ となります。

(2) 上図より

$$V = V_1 \cos\theta$$

河幅を L とすると舟が渡る時間 T は

$$T = \frac{L}{V} = \frac{L}{V_1 \cos\theta} \quad (-1 \leq \cos\theta \leq 1)$$

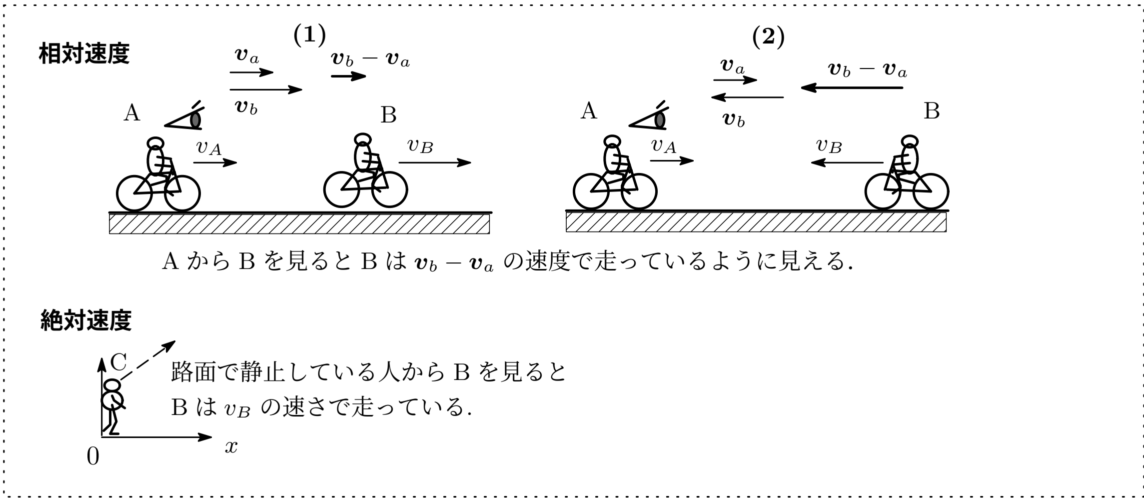
T が最小になるのは $\theta = 0\,°$ のときですね（$\cos 0\,° = 1$)。つまり，舟を川岸に直下に向ければよいことになります。所要時間 T はしたがって

$$T = \frac{L}{V_1} = \frac{80}{0.5} = 160\,(s) \tag{1.2.2}$$

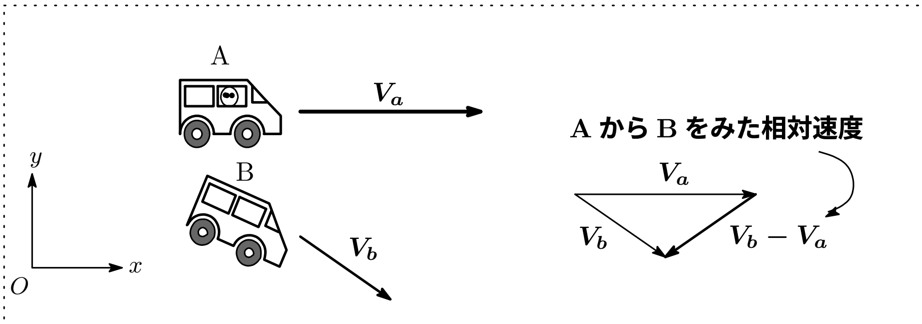
となります。

1.2.4 相対速度

同じ方向に自転車 AB が走っているとします。A が 15km/h，B が 20km/h で走っているとき A から B をみた場合 50km/h で走っているように見えますね。また，逆に A と B が対向して走っている場合，A が 15km/h，B が 20km/h とすると，A から B をみた場合，B は 35km/h の速さで A に向かってくるように見えます[9]。このように運動している 2 つの物体の一方からみた他方の速度を**相対速度**といいます。これに対して地上に静止した C から見た速度を絶対速度といいます[10]。



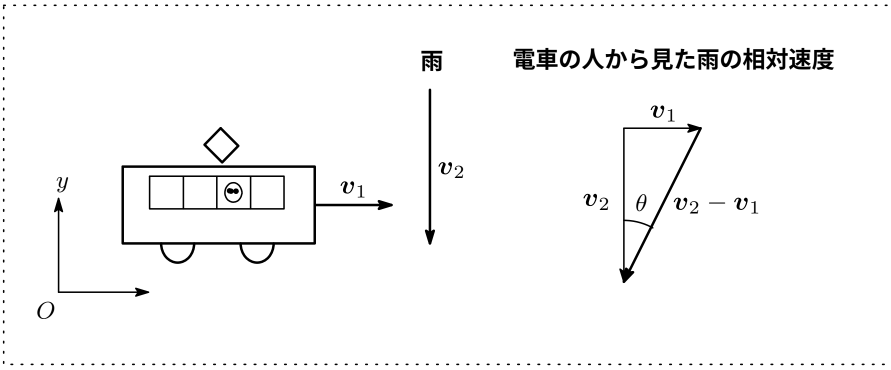
速度はベクトルで表されますので，相対速度をベクトルを使って説明します。2 台の車 A，B がそれぞれ異なる向きに走っているとします。このとき A から B をみたときの B の速度は $\boldsymbol{V}_b - \boldsymbol{V}_a$ となります。



[9] B から A をみた場合も同じです。
[10] 本当は地球も動いているので厳密には宇宙空間に静止した座標系からみた速がを**絶対速度**となります。

【問題７】 風のない雨の日，等速度 $\boldsymbol{v}_1$ で水平に走っている電車の中から速度 $\boldsymbol{v}_2$ で鉛直下方に向かって降る雨を眺めていた。このときの電車の中からみた雨の相対速度（大きさと向き）を求めよ。

【答え】 電車の人からみた雨の相対速度は $\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1$ で，速さは $|\ \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1\ |$, 向きは鉛直方向から時計回りに θ の方向に向かって降ってくるように見えます。



具体的に $v_1 = 30\text{km/h}$, $v_2 = 60\text{km/h}$ とすると $|\ \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1\ | = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = 30\text{km/h}$, $\tan\theta = v_1/v_2 = 30/80 = 0.38 \longrightarrow \theta = 20.8\ ^\circ$となります。

1.2.5 ニュートンの運動法則

1687 年，ニュートンは自著『自然哲学の数学的諸原理』(「プリンキピア」）の中で万有引力の理論をはじめ，いわゆる運動の法則を発表しました。運動の法則は 3 つの法則から成り，第 1 法則は「**慣性の法則**」，第 2 法則は「**ニュートンの運動法則**」，そして第 3 法則は「**作用・反作用の法則**」です。

■ニュートンの運動第１法則

運動の第 1 法則（慣性の法則）とは「**外から力が働かないか、あるいは力が働いていても，それらの合力がゼロであれば、静止している物体はいつまでも静止をつづけ、運動している物体はいつまでも等速直線運動（加速度をもたない運動）をつづける**」というものです。

ここで重要なキーワードである「**慣性**」ですが，これは「外力が働かなければ、物体はその運動状態を保ち続ける」という性質のことで，惰性ともいいます。また，**慣性系（惰性系）**というキーワードもでてくるのでここで説明しておくと，慣性系とは「静止または等速度運動をしている座標系」のことで，運動の第 1 法則（慣性の法則）が成立する座標系のことです。急上昇しているエレベータを座標系にとると，エレベーターは加速度運動をしているので見かけの力が働きます[11]が，このような座標系は，慣性系に対して**加速度系とか非慣性系**と呼ばれます。

■ニュートンの運動第２法則

運動第 2 法則は「**物体に力が働くとき、物体には力と同じ向きの加速度（a）が生じ，加速度の大きさは働いている力（F）の大きさに比例し，物体の質量 m に反比例する**」というものです。式で表すと

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} \tag{1.2.3}$$

となり，これを**ニュートンの運動方程式**といいます。$\boldsymbol{F}$ と $\boldsymbol{a}$ 太字で表していますが，加速度もベクトル量となります。この第 2 法則から「力とは物体に加速度を生じさせる働きである」という重要な考え方がでてきます。一定の力の作用を受けた物体の速度の変化（加速度）は質量に反比例するので，質量の大きな物体ほど慣性が大きいといいます。このように捉えた質量を「**慣性質量**」と呼びます。質量の単位は「Kg」か「g」が使われます。

[11] 高速エレベータにのると上昇時体を重く感じるし，急行下時には体が浮いたように感じますね。これは見かけの力が働くことによります。見かけの力ってなに？という疑問に対してはまた別の機会に。

《Coffee Break》
質量に似た概念に“ 重さ ”があります。重さは地球の重力のことで，単位は「kg 重」あるいは「g 重」。重力は第 2 法則により加速度を生じますが，この加速度を**重力加速度**（記号で g と書き，$g = 9.8\text{m/s}^2$）といい，重力と重力加速度との比例定数を「**重力質量**」といいました。同じ物体では慣性質量と重力質量の値は一致します。

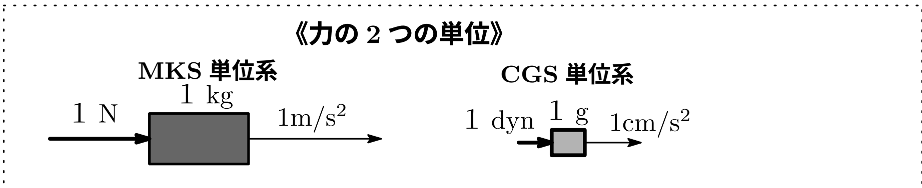
力はベクトルで，向きと大きさをもっていることは既に学習しました。力の大きさを表す単位としては，“ 質量 1kg の物体に 1m/s^2 の加速度を生じさせる力を１ N(１ニュートン）”,“ 質量 1g の物体に 1cm/s^2 の加速度を生じさせる力を１ dyn(１ダイン）”と呼び，前者を MKS 単位系（m・kg・s の頭文字）といい，後者を CGS 単位系（cm・g・s の頭文字）といっています。例えば質量１ kg の物体を地球が引く力は

$$\texttt{1kg}\ \text{重} = \texttt{1kg} \times 9.8\texttt{m/s}^2 = 9.8\texttt{N} \quad (\texttt{MKS}\ \text{単位系})$$

となるし，質量１ g の物体を地球が引く力は

$$\texttt{1g}\ \text{重} = \texttt{1g} \times 980\texttt{cm/s}^2 = 9.8\texttt{dyn} \quad (\texttt{CGS}\ \text{単位系})$$

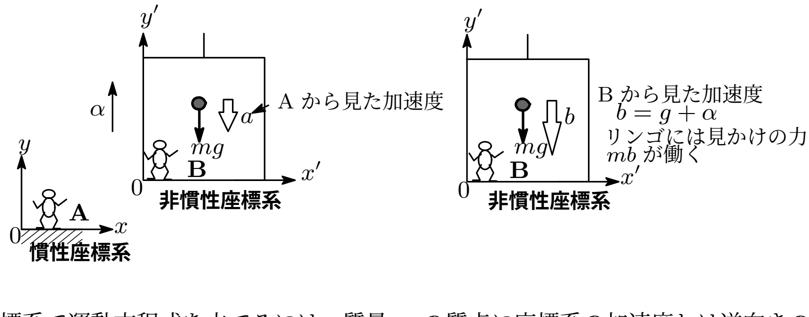
となります。尚，MKS 単位系を拡張したものに SI 単位系というのもあることを付け加えておきます。



■ニュートンの運動第３法則（作用・反作用の法則）

第 3 法則は「**A，B2 つの物体があって，A が B に及ぼす力を作用というならば，B が A に及ぼす力，反作用が必ずある。その大きさは等しく，向きは一直線上で反対向きである**」というものです[12]。注意すべきは，この法則は静止状態，運動状態の如何にかかわらず常に成立するという点です。具体的な例をあげると，道を歩く時、足は地面を押し、地面は足を押し返すから前進歩行できます。また，水泳は腕で水を押し、水は腕を押し返すから体が前進する，等々，いろいろ経験上味わっていますね。

《メモ》非慣性系について：加速度 α で上昇しているエレベーター内で質量 m のリンゴを落としたとします。地上の人 A から見るとリンゴに働いている力は重力だけなので，運動方程式は下向きを正として $ma = mg$ となります。一方，エレベータに乗っている人 B から見ると，リンゴの相対加速度 b は $b = g + a$ となります。しかし，リンゴに働いている力は重力だけですから，運動方程式は $m(g + a) = mg$ となり，これから $\alpha = 0$ となって，おかしなことになります。つまり，加速度運動している座標系（非慣性座標系）ではニュートンの運動第 2 法則は成り立たないことになります。



加速度 α で運動している座標系で運動方程式を立てるには，質量 m の質点に座標系の加速度とは逆向きの慣性力 $m\alpha$ を加えればよいことになります。

$$mb = mg + m\alpha$$

[12] 作用・反作用の法則が成り立つのは，物体間に相互作用が働くときで，物体１，２が存在し，この間に働く力について成り立つ法則です。

1.3 等加速度直線運動

1.3.1 平均速度と瞬間の速度

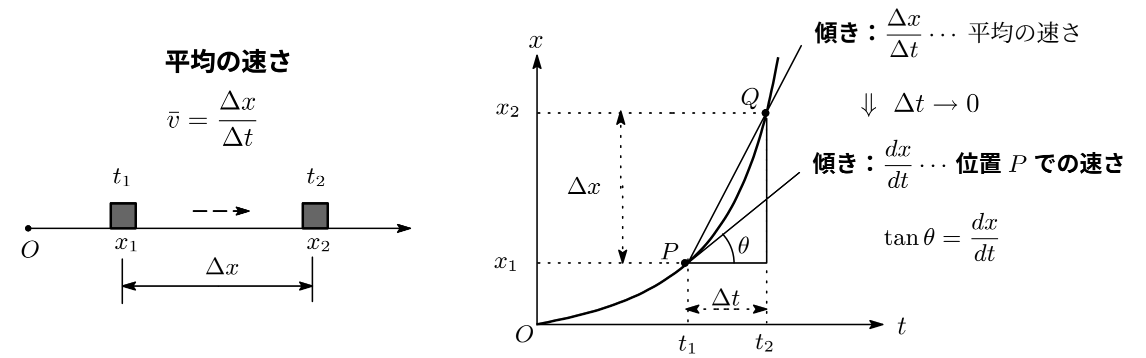
時刻 t_1 から t_2 の間に物体が x 軸上を右の方に点 $P_1(x_1)$ から点 $P_2(x_2)$ まで動いたとすると，物体の**平均の速さ**は

$$\bar{v} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

で与えられます。物体の速度が一定であればいたるところで速さは平均速さで表せますが，時々刻々速度が変化するような運動の場合，ある位置での瞬間の速度は微分で与えられます。これは平均速さの時間間隔を限りなくゼロに近づけたもの[13]で，瞬間の速さ（v）は

$$v = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

となります。



【問題８】 時刻 $t = 0$ で原点にあった物体が x 軸上を正の方向に動いている。時刻 t 後に進んだ距離が

$$x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

で与えられた場合，時刻 t_1 での物体の速度を求めよ。またそのときの進んだ距離を求めよ。ただし，v_0 , a は定数とする。

【答】 物体の瞬間の速さは x を t で微分すればよいので

$$v = \frac{dx}{dt} = v_0 + at$$

時刻 t_1 での速さは上の式で $t = t_1$ として $v(t_1) = v_0 + at_1$，進んだ距離 $x(t_1)$ は $x(t_1) = v_0 t_1 + (1/2)at_1^2$

1.3.2 等加速度直線運動

加速度は単位時間当たりの速度の変化なので，質点 A が x 軸上を初速度 $\boldsymbol{v}_0$ で移動し，t 秒後に速度 $\boldsymbol{v}$ になったとすると，加速度（平均加速度）$\boldsymbol{a}$ は

$$\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_0}{t}$$

[13] 同時に Δx も自動的に限りなくゼロに近づくことになりますね。

で与えられます。そして，加速度が一定の運動を**等加速度運動**といいます[14]。加速度の単位は速度を時間で割っているので m/s^2（あるいは cm/s^2）となります。

$$\text{速度の単位：}\mathtt{m/s} \longrightarrow \text{加速度の単位：}\mathtt{m/s} \div \mathtt{s} = \mathtt{m/s}^2$$

速度 $\boldsymbol{v}_0 = 2\text{m/s}$ の電車が次第に速さを増して $t = 10$ 秒後に速度 $\boldsymbol{v} = 22\text{m/s}$ になったとすると，この電車の加速度 $\boldsymbol{a}$ は

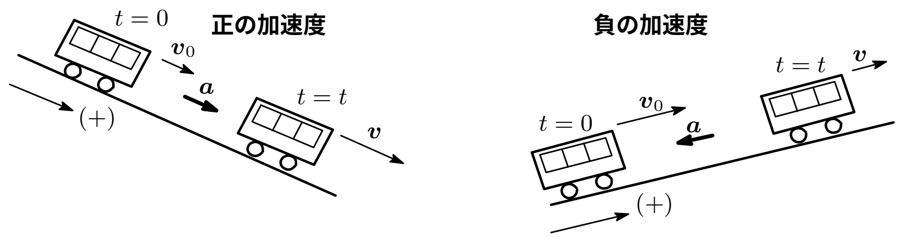
$$\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_0}{10} = \frac{22 - 2}{10} = 2\,(\mathtt{m/s}^2)$$

加速度は速度と同じくベクトルで“ 大きさ ”と“ 向き ”を持ちます。速度が次第に遅くなるような運動では加速度の向きは速度と反対の向きになり，負の大きさの加速度を持つといわれます。例えば，初速度 22m/s の物体が 10 秒後に 2m/s の速さになったとすると，加速度の大きさは

$$a = \frac{v - v_0}{t} = \frac{2 - 22}{10} = -2\,(\mathtt{m/s}^2)$$

と負の値になりますね。

加速度：$\boldsymbol{a} = \dfrac{\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_0}{t - 0}$



■加速度の微分表示

質点の速度を $\boldsymbol{v}$ とすると加速度 $\boldsymbol{a}$ は速度の時間微分で与えられます。

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt}, \quad a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \quad \left(v = \frac{dx}{dt}\right)$$

上の式を時間 t で積分すると

$$\int \left(\frac{dv}{dt}\right) dt = \int a dt \longrightarrow v = at + C \quad (C\text{：積分定数}) \longrightarrow v = v_0 + at \tag{1.3.1}$$

となって，時刻 t での速度 v と加速度との関係式 が得られます。C は積分定数で，$t = 0$ としたときの初速度 v_0 の値です。質点の t 秒後の変位 x は速度を時間で積分すればよいので

$$\int v dt = \int (v_0 + at) dt \longrightarrow \int \left(\frac{dx}{dt}\right) dt = \int v_0 dt + \int at dt \longrightarrow x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 + C$$

$$\therefore \ x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \tag{1.3.2}$$

積分定数 C は $t = 0$ での質点の位置座標（初期位置）となるので，それを x_0 とおきました。式（1.3.1）の両辺を 2 乗すると

$$v^2 = (v_0 + at)^2 = v_0^2 + 2v_0 at + a^2t^2 = v_0^2 + 2a\left(v_0 + \frac{1}{2}at^2\right)$$

[14] 加速度が時々刻々変化するような運動では“ 瞬間加速度 ”が定義され，これは a の時間微分 da/dt で与えられます。これを 2 次加速度と呼んでいますが，自動車の乗りごこちは 2 次，3 次など高次の加速度が関係するといわれています。

この右辺に式（1.3.2）を入れると

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0) \tag{1.3.3}$$

が得られます。この式は初速度 v_0，加速度 a の物体が距離 x 変位した後の速度 v とを関係付ける公式です。例えば 5m/s の速度の物体が 2m/s^2 の同方向の加速度をもって原点から 150m 動いたときの速度は，公式より

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0) = 5^2 + 2 \times 2 \times 150 = 625 \quad \therefore v = 25 \ (\mathtt{m/s})$$

と得られます。

《等加速度直線運動の公式》

$$\begin{cases} v = v_0 - at \\ x = v_0 t - \dfrac{1}{2}at^2 \\ v^2 = v_0^2 - 2a(x - x_0) \end{cases} \tag{1.3.4}$$

【問題９】 電車が毎時速度 36km で直線上を走っていた時，前方に障害を見つけてブレーキをかけた。ブレーキを掛け始めてから，50m 前進して停止したとすれば，止まるまでに何秒かかった。またそのときの加速度の向きと大きさはいくらか。ただし，電車は等加速度で停止するものとする。

【答】 電車がブレーキをかけたその位置を原点（$x_0 = 0$）にとります。50m 前進して止まったのだから，公式（1.3.2）より

$$v^2 = v_0^2 - 2ax$$

で，ブレーキをかけた瞬間の電車の速度は $v_0 = 36 \times 1000/3600 = 10$m/s，$v = 0$, $x = 50$ を上の式に入れると，加速度の大きさは

$$0^2 = 10^2 - 2a \times 50 \longrightarrow a = 1 \ (\mathtt{m/s^2})$$

となります。電車は減速しているので加速度の向きは電車の速度と反対。次に電車が止まるまでの時間は，

$$v = v_0 - at$$

を使えばよいから

$$0 = 10 - 1 \times t \longrightarrow t = 10 \ (秒)$$

となります。

1.3.3　重力による鉛直の運動

高い塔の上からモノを落とすと，これは重力による鉛直の運動になります。この運動の加速度は重力加速度 g です。 g は一定[15]なのでこの運動は**等加速度運動**になります。そして，先ほどの等加速度直線運動の公式が使えます。

●自由落下： 静かに手をはなした落下のことで，初速度は $v_0 = 0$。重力加速度 g の向きは鉛直下方なので，その方向を y 軸の正の方向にとると，等加速度直線運動の公式（1.3.2）より

$$\begin{cases} v = gt \\ y = \dfrac{1}{2}gt^2 \\ v^2 = 2gy \end{cases} \tag{1.3.5}$$

[15] 厳密に言うと重力加速度 g は地球の緯度，高さによって異なりますが，ここでは一定としておきます。

●投げ下ろし： 下向きに初速度 v_0 で投げ下ろした場合は

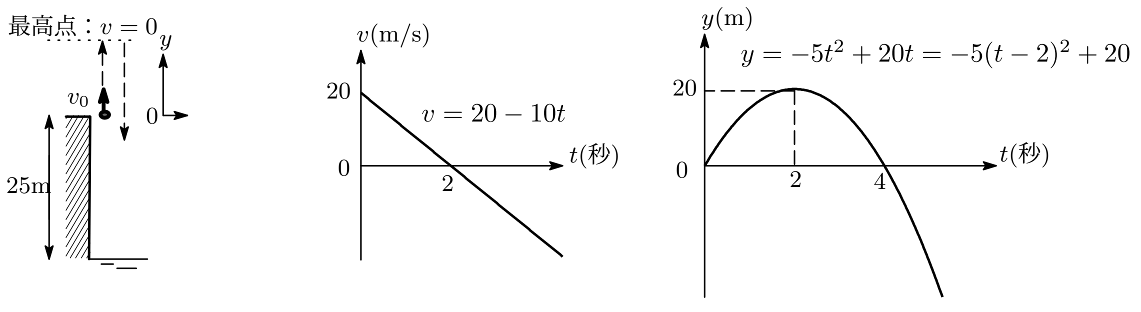
$$\begin{cases} v = v_0 + gt \\ y = \dfrac{1}{2}gt^2 \\ v^2 = v_0^2 + 2gy \end{cases} \tag{1.3.6}$$

●投げ上げ： 鉛直上方に初速度 v_0 で投げ上げた場合，鉛直上方を y 軸の正の方向にとると，重力加速度は向きが反対なので $-g$ となり

$$\begin{cases} v = v_0 - gt \\ y = v_0 t - \dfrac{1}{2}gt^2 \\ v^2 = v_0^2 - 2gy \end{cases} \tag{1.3.7}$$

【問題 10】 崖の端に立って石を天空に向かって鉛直に 20m/s の速度で投げ上げたところ，石はある高さまで上昇し，そこから反転して鉛直下方へ落下し 25m 下の水面に落ちた。次の各項の値を求めよ。$g = 10\text{m/s}^2$ として概算せよ。

(1) 最高点に達する時間と最高点までの高さ
(2) 石がもとの所を通るまでの時間と通った時の速度
(3) 水面に達するまでの時間
(4) 高さ 15m のところを通過するときの時間と速度
(5) この運動の $v-t$ グラフ，$y-t$ グラフを描け



【答】 鉛直上方を y 軸の正の方向にとります。
(1) 初速度 $v_0 = 20\text{m/s}$ で投げ上げられた石は徐々に速度を落とし最高点で速度がゼロとなります。関係式 $v = v_0 - gt$ を使って最高点に到達するまでの時間を求めると

$$0 = 20 - 10 \times t \longrightarrow t = 2\,(\text{秒})$$

また最高点の高さを h_{max} とすると $y = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$ を使って

$$h_{max} = 20 \times 2 - \frac{1}{2} \times 10 \times 2^2 = 20\,(\mathtt{m})$$

(2) もとの所は原点 $y = 0$ なので $y = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$ で $y = 0$ とおくと

$$0 = 20 \times t - \frac{1}{2} \times 10 \times t^2 \longrightarrow t = 0,\ 4$$

が得られます。$t = 0$ はもともと石が原点にいた時刻で，投げ上げられた石が再び原点 $y = 0$ に戻ってくる時間が $t = 4$ 秒です。そのときの速さ v は $v = v_0 - gt$ を使って

$$v = 20 - 10 \times 4 = -20\,(\mathtt{m/s})$$

で，速度は鉛直下方に向いているからマイナスの符号が付きます。
(3) 原点 (崖の頂上）から水面の高さを測れば，鉛直上方を“ 正 ”にとっているので高さは -25m となります。いまの場合，$y=0$ の位置から初速度 $v_0=-20$m/s で石が投げ落とされたとも考えてよいので，$y=v_0t-\frac{1}{2}gt^2$ の式より

$$-20=-20t-\frac{1}{2}\times 10t^2 \longrightarrow t=-1,\,5\ (\text{秒})$$

時間の負の値は意味がないので $t=5$ 秒が得られます。
(4) 高さと速度の関係式 $v^2=v_0^2-2gt$ を使うと

$$v^2=20^2-2\times 10\times 15 \longrightarrow v=\pm 10\,(\mathtt{m/s})$$

速度は上向きで正なので求める答えは $v=10$m/s となります。所要時刻 t は $v=v_0-gt$ を使って

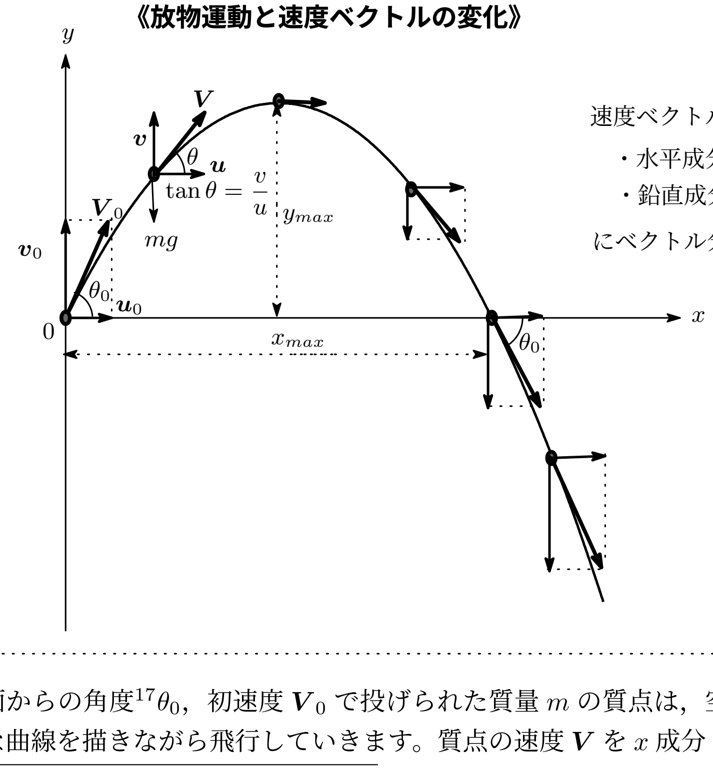
$$10=20-10\times t \longrightarrow t=1\,(\text{秒})$$

となります。
(5)$v-t$ グラフは $v=v_0-gt=20-10t$，$y-t$ グラフは $y=v_0t-\frac{1}{2}gt^2 \longrightarrow y=20t-5t^2$ を描けばよいですね。

1.4　放物体の運動（等加速度運動）

物体を斜めに放り投げたらどのような運動をするのか。例えばボールを 45 °の角度で投げたときに最も遠くへ投げられるということは聞かれたことがあると思います。これは放物体の運動方程式を解くことで得られます。放物運動の場合，速度を水平成分（x 成分）と鉛直成分（y 成分）に分けて考えていきます[16]。

《放物運動と速度ベクトルの変化》



速度ベクトル $\boldsymbol{V}$ を
・水平成分：$\boldsymbol{u}$
・鉛直成分：$\boldsymbol{v}$
にベクトル分解する

水平面からの角度[17]θ_0，初速度 $\boldsymbol{V}_0$ で投げられた質量 m の質点は，空気の抵抗がないとした場合，図のような曲線を描きながら飛行していきます。質点の速度 $\boldsymbol{V}$ を x 成分（$\boldsymbol{u}$）と y 成分（$\boldsymbol{v}$）に分け，それ

[16] 別に水平，鉛直成分に分けるのが唯一のやり方ではなく，問題に応じていろいろなやり方があります。念のため。ただ，放物運動の場合にはこのやり方が運動方程式を容易に解くことができるのでそのようにするわけです。
[17] これを仰角といいます。

に対応して x 軸方向の運動と y 軸方向に運動に分けて考えることにします。

x 軸方向には外部の力が働いていないので，**ニュートンの運動第 1 法則**により質点は x 軸方向には等速直線運動をすることがわかります。一方，y 軸方向には重力が作用するので，**ニュートンの運動第 2 法則**に従った運動をすることになります。

●速度の大きさ V **：** t 秒後の質点の速度を $\boldsymbol{V}$ とすると

$$\begin{cases} \mid \boldsymbol{V} \mid = V = \sqrt{u^2 + v^2} \\ \tan\theta = \dfrac{v}{u} \quad \left(\tan\theta_0 = \dfrac{v_0}{u_0}\right) \end{cases} \tag{1.4.1}$$

● x **軸方向の運動：** 仰角 θ_0，初速度 $\boldsymbol{V}_0$ で放り投げられた質点の初速度の x 成分 u_0 は

$$\boldsymbol{u}_0 = \boldsymbol{V}_0 \cos\theta_0 \tag{1.4.2}$$

x 軸の方向には外力が作用していないので[18]，運動第 1 法則により等速運動することになります。つまり，着地するまで物体の x 軸方向の分速度 $\boldsymbol{u}_0$ はずっと一定となります。したがって，t 秒後の分速度 u と x 方向に進んだ距離は

$$\begin{cases} u = u_0 \\ x = u_0 t = V_0\, t\cos\theta_0 \end{cases} \tag{1.4.3}$$

● y **軸方向の運動：** y 軸方向には地球の重力 mg が鉛直下方に働いているので，これは既に学習した等加速度直線運動の公式（1.3.2）が使えますが成り立ちます。

$$\begin{cases} v = v_0 - gt \\ y = v_0 t - \dfrac{1}{2}gt^2 \end{cases} \tag{1.4.4}$$

式（1.4.3）,（1.4.4）より t を消すと，

$$y = \frac{v_0}{u_0}x - \frac{1}{2}g\frac{x^2}{V_0^2\cos^2\theta_0} = x\tan\theta_0 - \frac{1}{2}\frac{g}{V_0^2\cos^2\theta_0}x^2 \tag{1.4.5}$$

が得られますが，これは質点の運動の軌跡を表します。この式は放物線を表すので，質点の運動は**放物線の軌跡**を描くということになります。

【問題 11】 同じ速さで物体を投げる場合，仰角を何度にすれば最大の水平到達距離が得られるか。ただし，空気の抵抗は無視する。

【答】 水平最高飛行距離 x_{max} は式（1.4.10）で与えられるので

$$x_{max} = \frac{V_0^2\sin 2\theta_0}{g}$$

$-1 \leq \sin 2\theta_0 \leq 1$ なので $\sin 2\theta_0 = 1$ のときが最高距離となり，$2\theta_0 = 90\,°\rightarrow \theta_0 = 45\,°$となります。

【問題 12】 $g = 10\mathrm{m/s^2}$ として，速さ $20\sqrt{3}\mathrm{m/s}$，仰角 60 °で投げ上げられた物体は

(1) 最高何 m まで上がるか。それは何秒後か。

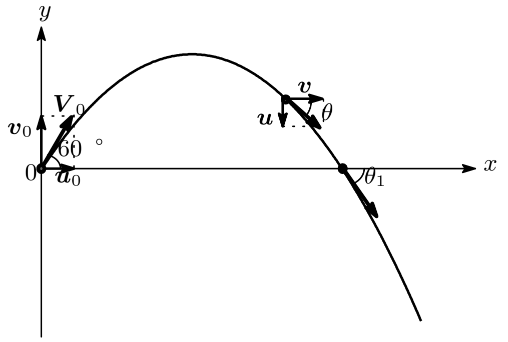
(2) 4 秒後の速度（速さと方向）を求めよ。

(3) 水平到達距離，水平面となす角を求めよ。

(4) 7 秒後の位置はどこか。

[18] モノを投げる時はエイヤ！と力を入れて投げるので初期 x 軸方向に力が作用しないというのは ?? と思われるかも知れません。これは，$t = 0$ のときに速度 $\boldsymbol{V}_0$ で投げだされたということで，$t = 0$ より以前の質点の状態は一切問わないわけです。つまり，$t = 0$ の時点では，加速度がないから力を考える必要がないわけというわけです。

【答】 初速度の分速度は $u_0 = V_0 \cos 60^\circ = 20\sqrt{3} \times \frac{1}{2} = 10\sqrt{3}$ (m/s), $v_0 = V_0 \sin 60^\circ = 20\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 30$ (m/s)。



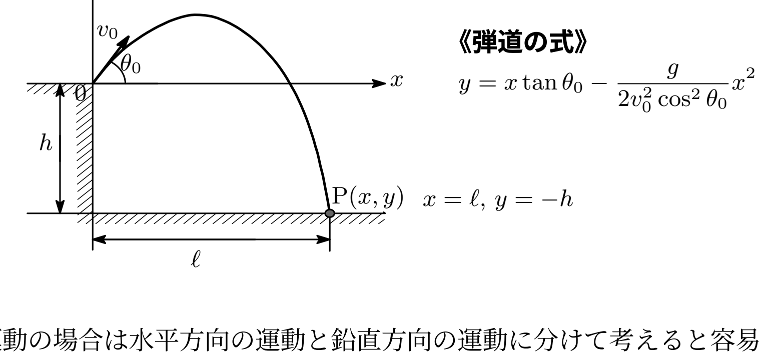
(1) 最高点到達の所要時間は式（1.4.6）より $t_1 = v_0/g = 30/10 = 3$（秒後）。最高到達高さ y_{max} は式（1.4.7）より $y_{max} = v_0^2/2g = 30^2/(2 \times 10) = 45$（m）
(2)t 秒後の速度の x 成分は $u = u_0 = 10\sqrt{3}$（m/s）。y 成分は $v = v_0 - gt$ より $v = 30 - 10 \times 4 = -10$ で下向きとなります。速さ V は $V = \sqrt{(10\sqrt{3})^2 + 10^2} = 20$(m/s)。方向は $\tan\theta = v/u = -10/10\sqrt{3} = -1/\sqrt{3} \longrightarrow \theta = -30^\circ$[19]
(3) 水平到達距離は $x_{max} = V_0^2 \sin 2\theta_0/g = 10\sqrt{3} = 104$(m)。その所要時間 $t_{max} = 2V_0 \sin\theta_0/g = 6$（秒）。着地点での分速は $u = u_0 = 10\sqrt{3}$（m/s）,$v = v_0 - gt = -30$(m/s)。$\tan\theta_1 = v/u = -\sqrt{3} \rightarrow \theta_1 = -60^\circ$
(4)$x = u_0 t = 10\sqrt{3} \times 7 = 121$（m），$y = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 = -35$(m)。つまり水平距離 121m，鉛直下方に 35m の所となります。

【問題 13】 高さ h の塔の上から初速度 v_0 で水平と θ_0 の角をなす方向に投げ出された質点が地面に落下する位置を求めよ。

【答】 質点が投げ出されたところを原点として x, y 座標軸を図のようにとります。質点の運動の軌跡は式（1.4.5）で与えられます（弾道の式ともいわれます）。地面の着地点を $\mathrm{P}(x, y)$ とすると，$y = -h$ のときに $x = \ell$ なので，これを弾道の式に入れると

$$-h = \ell \tan\theta_0 - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\theta_0}\ell^2 \longrightarrow \quad g\ell^2 - 2v_0^2 \ell \sin\theta_0 \cos\theta_0 - 2v_0^2 h \cos^2\theta_0 = 0$$

これを ℓ について解いて $\ell = \frac{1}{g}\left(v_0^2 \sin\theta_0 \cos\theta_0 \pm \sqrt{v_0^4 \sin^2\theta_0 \cos^2\theta_0 + 2ghv_0^2 \cos^2\theta_0}\right)$ が得られます。この内，意味のある正根だけをとると，求める答えは $\ell = \frac{1}{g}\left(v_0^2 \sin\theta_0 \cos\theta_0 + \sqrt{v_0^4 \sin^2\theta_0 \cos^2\theta_0 + 2ghv_0^2 \cos^2\theta_0}\right)$ となります。



以上見てきたように，放物運動の場合は水平方向の運動と鉛直方向の運動に分けて考えると容易に運動を調べることができます。

[19] 角度は時計回りを正とします。

《放物運動の公式》

- **最高点に達するまでの時間** t_1**：** 最高点では速度の y 成分が 0 になるので $v = v_0 - gt = 0$ より

$$t_1 = \frac{v_0}{g} = \frac{V_0 \sin\theta_0}{g} \tag{1.4.6}$$

- **最高点の高さ** y_{max}**：** $y = v_0 t - (1/2)gt$ に $t = t_1 = v_0/g$ を入れて

$$y_{max} = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{V_0^2 \sin^2\theta_0}{2g} \tag{1.4.7}$$

- **最高点までの水平距離** x_1**：** $x = u_0 t$ に $t = t_1 = v_0/g$ を入れて

$$x_1 = u_0 t_1 = \frac{u_0 v_0}{g} = \frac{V_0^2 2\sin\theta_0\cos\theta_0}{2g} = \frac{V_0^2 \sin 2\theta_0}{2g} \tag{1.4.8}$$

- **水平最高飛行時間** t_{max}**：** $y = v_0 t - (1/2)gt^2$ で $y = 0$ とおいて

$$0 = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \longrightarrow t = 0,\ t = \frac{2v_0}{g} = \frac{2V_0 \sin\theta_0}{g}$$

$t = 0$ は初期位置であるので求める t_{max} は

$$t_{max} = \frac{2V_0 \sin\theta_0}{g} = 2t_1 \tag{1.4.9}$$

t_{max} は最高点到達所要時間（t_1）の 2 倍となっていることに留意 !!

- **水平最高飛行距離** x_{max}**：** $x = u_0 t$ で $t = t_{max}$ を入れればよいので

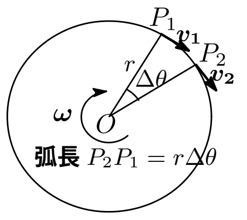
$$x_{max} = u_0 \frac{2V_0 \sin\theta_0}{g} = \frac{V_0^2 \sin 2\theta_0}{g} = 2x_1 \tag{1.4.10}$$

x_{max} は最高点到達距離（x_1）の 2 倍となっていることに留意 !!

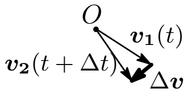
1.5 等速円運動（等加速度運動）

等速円運動とは質点が円周を一定の“ 速さ ”で移動する運動のことですが，速度は一定ではありません。なぜかというと，速度は既に述べたように“ 大きさ ”と“ 向き ”をもつベクトル量で，速度ベクトルの向きは常に円の接線方向を向いています。円の接線の方向は場所によって異なりますから，質点の円運動では速度ベクトルは時々刻々変化（速度の大きさは一定）し，このため加速度を生じることになります。したがって，等速円運動は等加速度運動 ということになります。

《等速円運動》
速度の“ 大きさ ”は一定



速度ベクトルの変化と加速度



$$\Delta\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_2(t+\Delta t) - \boldsymbol{v}_1(t)$$

$$\boldsymbol{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt}$$

角速度： $\boldsymbol{\omega} = \dfrac{\Delta\theta}{\Delta t}$

1.5.1　角速度

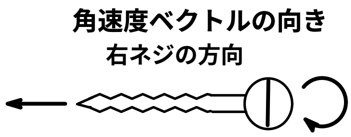
■角速度の定義

等速円運動では単位時間に回る角度として**角速度**($\boldsymbol{\omega}$) が定義できます。円運動の半径（動径）を r とすると，動径が Δt 秒間に角 $\Delta\theta$ 回るとすると，角速度 $\boldsymbol{\omega}$ は次式で定義されます。

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \tag{1.5.1}$$

角速度の単位は，rad/s となります（180 °$= \pi\,\mathrm{rad}$）。例えば，10 秒間に 2 回円周を回る質点の角速度は，$\omega = \Delta\theta/\Delta t = 2\times 2\pi/10 = 0.4\pi = 0.4\times 3.14 = 1.256$ (rad/s) となります。1 秒間に何ラジアン回転するかを表す量が角速度の大きさですね。

■角速度はベクトル量: 回転は右回りと左回りがありますが，角速度は回転軸に沿って右ねじの進む方向の向きをもったベクトルと定義されます。



■等速円運動の周期・速度と角速度の関係

ある円周の周りを 1 秒間に ν 回回転（回転数は ν）すると，１回転するのに要する時間は

$$T = \frac{1}{\nu}\ (\text{秒}) \tag{1.5.2}$$

となります。この時間を周期 T といいます。いま，周期 T の円運動を考えると，質点は時間 T の間に $2\pi\,\mathrm{rad}$ 回転するので，1 秒間あたり $2\pi/T$ 回転することになります。これは角速度 ω の大きさですから，周期と角速度の関係は

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \tag{1.5.3}$$

で与えられます。円運動の速度 $\boldsymbol{v}$ の大きさは，単位時間当たりの質点の円周上の移動距離で与えられるので，動径ベクトルを $\boldsymbol{r}$ とすると，１秒間に動いた距離は動径 (r) とその間の角度 (ω) の積で，これから速さと角速度の大きさ関係は

$$v = r\,\omega \tag{1.5.4}$$

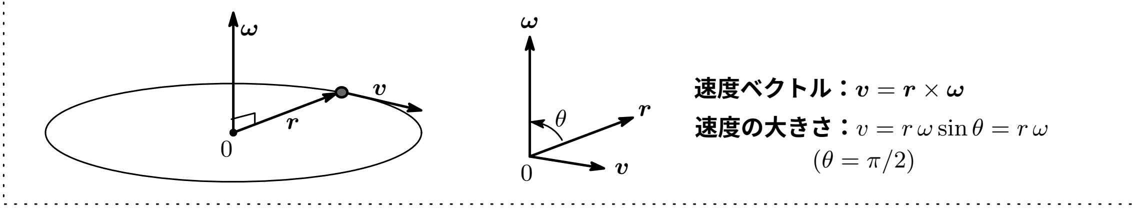
となります。尚，速度ベクトルと角速度ベクトルの関係は，動径ベクトルを $\boldsymbol{r}$ として，次の**ベクトル積**[20]で定義されます。

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{\omega} \tag{1.5.5}$$

速度ベクトルの向きは，動径ベクトル $\boldsymbol{r}$ を角速度ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ の方に回転させたときの右ねじの進む方向となります。また速さは動径ベクトルと角速度ベクトルのなす角を θ とすると

$$v = r\,\omega\sin\theta$$

で与えられます。円運動の場合 $\theta = \pi/2$ なので，先ほど得られたように $v = r\,\omega$ となります。



[20] 外積ともいいます。

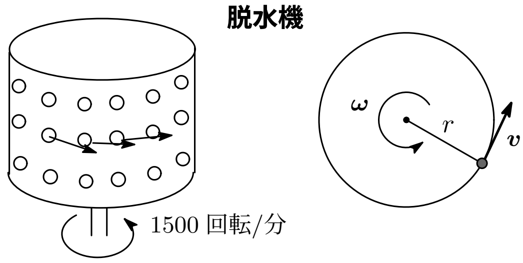
《等速円運動の公式》

$$
\begin{aligned}
&\text{・角速度} && \boldsymbol{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}, \quad \Delta\theta = \boldsymbol{\omega}\Delta t \\
&\text{・周期と回転数の関係} && T = \frac{1}{\nu}, \qquad \nu = \frac{1}{T} \\
&\text{・角速度と周期の関係} && \boldsymbol{\omega} = \frac{2\pi}{T} \qquad T = \frac{2\pi}{\boldsymbol{\omega}}, \quad \nu = \frac{\boldsymbol{\omega}}{2\pi}, \quad \boldsymbol{\omega} = 2\pi\nu \\
&\text{・角速度と速度の関係} && \boldsymbol{V} = r\boldsymbol{\omega}
\end{aligned}
\tag{1.5.6}
$$

【問題 14】 脱水機のの直径を 18cm のかごは 1 分間当たり 1500 回転する。洗濯物に含まれていた水は，いくらの速さでかごの穴から飛びだすか。$\pi = 3$ として概算せよ。

【答】 脱水かごの回転数は$\nu = 1500/60 = 25$ 回/s となるので，角速度$\omega = 2\pi\nu = 2\times3\times25 = 150$ (rad/s)。脱水かごから振り切られる水の速さは $v = r\omega = 0.09\times150 = 13.5$ (m/s)，速度の向きはかごの接線方向となります。

脱水機



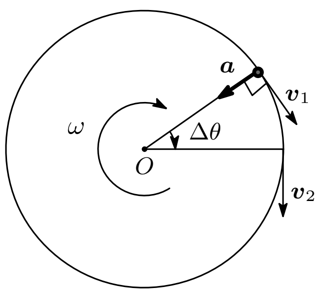
1.5.2 等速円運動の加速度

加速度は速度の時間変化の割合で

$$\boldsymbol{a} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt}$$

で表されます。下図で $\Delta t \to 0$ としていくと，速度ベクトル $\boldsymbol{v}_2$ は $\boldsymbol{v}_1$ に限りなく近づき，$\Delta\boldsymbol{v}$ の向きは速度ベクトル $\boldsymbol{v}_1$ に対し直角の方向に向いてきます。この向きが加速度ベクトル $\boldsymbol{a}$ の向きになるわけで，加速度ベクトルの向きは円の中心 O に向いています。

加速度ベクトル



速度の大きさは同じ

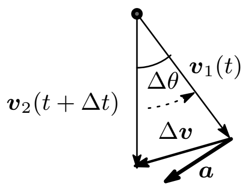
$|\boldsymbol{v}_1| = |\boldsymbol{v}_2|$

《加速度ベクトルの向き》

$\Delta t \to 0$ につれてベクトル v_2 がベクトル v_1 に漸近し，
加速度ベクトル a の向きはベクトル v_1 と直交する。

$\Delta\boldsymbol{v}(t+\Delta t) - \boldsymbol{v}(t)$

$$\boldsymbol{a} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t}$$



加速度ベクトル $\boldsymbol{a}$ の向き (O に向かう)

加速度の大きさは

$$a = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0} v\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = v\,\omega \tag{1.5.7}$$

となります[21]。

1.5.3 向心力

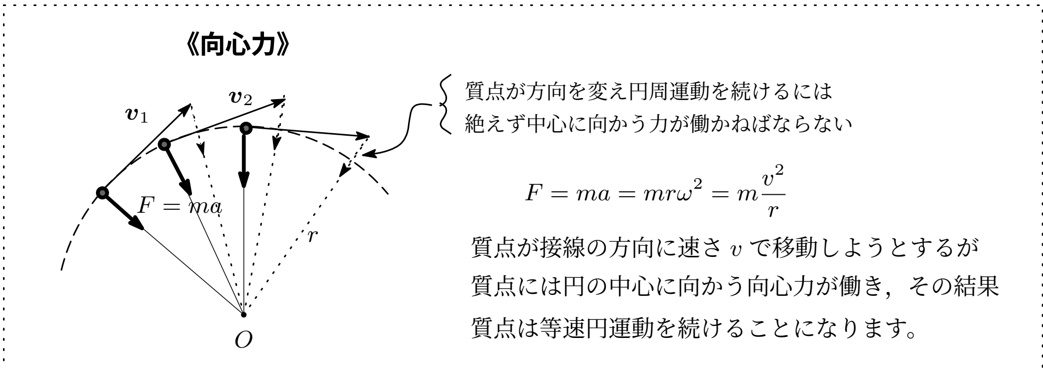
等速円運動では，質点の加速度は円の中心に向くので，ニュートンの運動第 2 法則により質点には円の中心に向かう力が働きますます。この力を**向心力**といいます。向心力の大きさ F は

$$F = ma = mv\omega = mr\omega^2 = m\frac{v^2}{r} \tag{1.5.8}$$

となります。向心力は，質点が円の接線方向に移動しようとするのを中心に引き戻し等速円運動を続けさせる力です。等速円運動の加速度の大きさは

$$a = v\omega = r\,\omega^2 = \frac{v^2}{r} \tag{1.5.9}$$

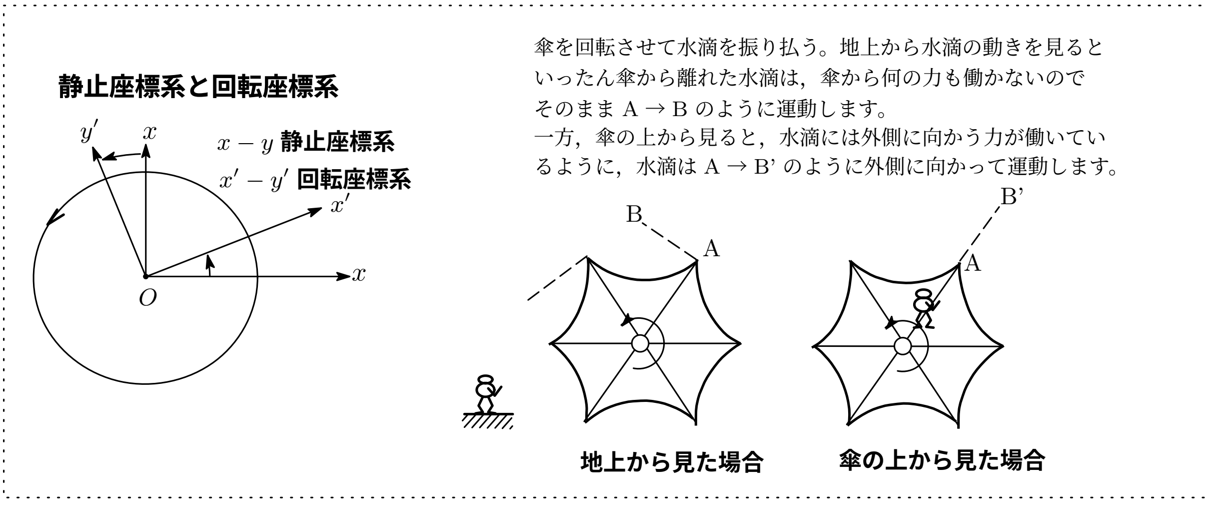
となります。



ここで視点を変えて，質点と一緒に回転する **回転座標**にのってみます[22]。外にふり飛ばされるような大きな力がかかりますね。この力を**遠心力**といいます。回転座標で質点の動きを眺めると，質点はじっと静止しており，力が作用していないように見えます。質点には遠心力が作用するが向心力がそれを打ち消し，力のバランスがとれていることになります。遠心力は回転している系で見かけ上現れる仮想の力で，このような力を**慣性力**と呼んでいます。遠心力の大きさは向心力と同じなので

$$\textbf{遠心力の大きさ：}\quad F = mr\omega^2 = m\frac{v^2}{r} \tag{1.5.10}$$

となります。



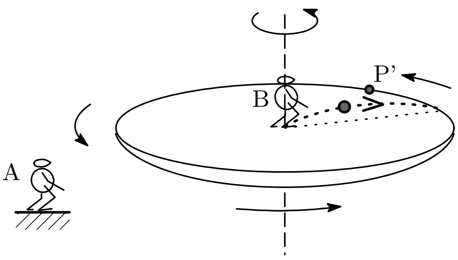
21 $\Delta v = v\Delta\theta$

22 遊園地の回転するかご乗ったイメージ。

《Coffee Break》

植物は重力に逆らって鉛直上方に茎を伸ばす一方，それとは逆向きに根を下ろして大地にしっかり立ちます。植物を回転する円板に乗せるとどうなるでしょうか。例えば半径 10m の円板を秒速 10m で回転させると，植物には重力と同じ大きさの遠心力が加わりますが，米国航空宇宙局 (NASA) が行った実験では，植物は遠心力を重力と勘違いし，遠心力の方向に根を伸ばす！ことが確認されています。宇宙ステーションの内部は無重量状態にあり，人間が長時間生活すると筋肉が衰えたり，骨からカルシュームが溶出したり，人体に悪影響を及ぼすことが知られています。そこで遠心力を利用した擬似重力を発生させ，地上と同じ環境を生みだす宇宙ステーションが考案されています。遠心力は仮想の力といっても，場所 (?) によっては大変重要なものとなりますね。

慣性力には遠心力のほかに「**コリオリの力**[23]」というのがあります。回転する円板を考え，小石を円板の中心から円板の縁にある点 P に向かって投げたとします。小石の運動を地上から見れば。小石はまっすぐ点 P に向かって飛んでいきますが，円板に乗っている人から見れば，点 P は円板の回転につれてある点 P' まで動くので，石は曲がって飛んでいるように見えますね。円板上の人は，点 P をめがけて小石を投げたのに，小石はまっすぐ飛ばすにどうしても右にそれ，点 P の右側にずれてしまう。これは何らかの力が小石に働いて小石の軌跡を曲げているに違いないと考えるわけですね。この石を曲げる力を「コリオリの力」と呼んでいますが，これは円板に乗っている人が“ 自分は静止していると思い込んでいる ”ことから生じる錯覚ですね。コリオリの力は実在の力ではなく仮想の力です。



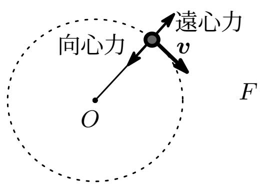
《コリオリの力》

・地上にいる A から見れば小石はまっすぐ飛んでいる。

・回転する円板上の B から見れば小石は右に曲がって飛んでみえる。これは“ 小石に何らかの力が働いて ”小石は右に曲がるのだと考える。**錯覚**だとは気づかない。(B は自分が回転していることに気づいていない！)

ニュートンの運動第 1 法則（慣性の法則）で「外力が働かなければ，物体はその運動状態を保つ」という性質を「慣性」といいました。車に乗って急ブレーキを踏むと，体は前につんのめりますね。別に体が何らかの物体から”本当”に押されたわけではないのに，体に力が働いたように見えます。これは慣性の法則により体はブレーキを踏む前の状態にいようとするが，車が急に減速するから，車の中では体が押されるように感じるのですね。この見かけの力も慣性力の一種です。

【問題 15】 1.6kg 以上の物体をつるすと切れる糸がある。この糸に 200g の重りを結んで，糸の長さ 40cm で水平面に回転させた。回転の速さを増してついに糸が切れたときの重りの速さはいくらか。ただし糸は伸びないものとする。



$$F = m\frac{v^2}{r}$$

【答】 重りと一緒に回転する回転座標系では，重りは中心から一定の距離にじっと静止して見えます。つまり，その座標系では，向心力に拮抗する遠心力で釣り合っていると考えられます。糸の張力は 1.6kg 重が限界なので，遠心力がこれ以上の大きさになると糸が切れます。糸が切れるときの重りの速さを v とすると

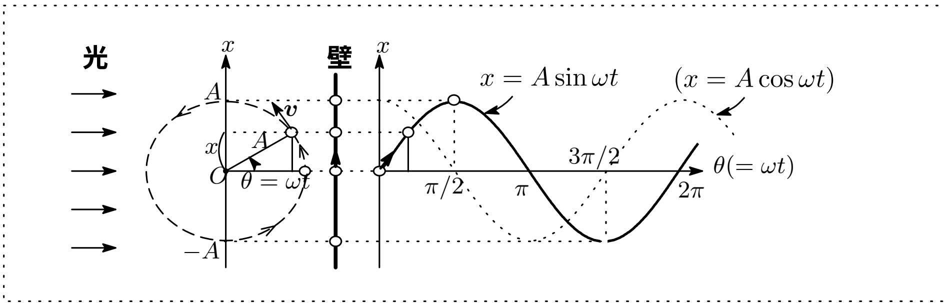
$$F = m\frac{v^2}{r} \longrightarrow 1.6\ (\mathtt{kg}\ 重) = 1.6 \times 9.8\ (\mathtt{N}) = 0.2 \times \frac{v^2}{0.4} \longrightarrow v = 5.6\ (\mathtt{m/s})$$

となります。

1.6 単振動

1.6.1 最大速度と最大加速度

質点が等速円運動している様子を壁に映した影絵で見ると，質点は x 軸上（壁上）を $-A \leqq x \leqq A$ の範囲で上下に往復運動する**単振動運動**をしていることが分かります。



$t=0$ で $\theta = 0$ にいた質点の t 秒後の位置 x は

$$x(t) = A \sin \theta = A \sin \omega t \tag{1.6.1}$$

と正弦波（サイン波）で表せます。A を**振幅**といい，θ あるいは ωt を**位相**といいます。ω は 1 秒間に何 rad 回転するかを表す量で，**角振動数**といいます。等速円運動では，1 秒間の回転数を ν で表しました。これを単振動におきかえると ν は**振動数**になります。振動数の単位は，c/s（サイクル毎秒），あるいは Hz（ヘルツ）を用います。振動数 ν は周期 T の逆数に等しく

$$\nu = \frac{1}{T} \tag{1.6.2}$$

の関係があります。単振動している質点の速度 $\boldsymbol{v}$ を求めてみましょう。速さ v は

$$v = \frac{dx}{dt} = A\omega \cos \omega t \tag{1.6.3}$$

$\cos \omega t$ のとる範囲は $-1 \leqq \cos \omega t \leqq 1$ なので，$\cos \omega t = \pm 1$ のときに速さは最大となります。これは $\omega t = 0, \pi, 2\pi, \cdots$ のときですから，質点が原点 O を通るときに最大の速さ v_{max} となり[24]

$$v_{max} = A\omega$$

となります。また，$\omega t = \pi/2, 3\pi/2, \cdots$ の振動の最上下点（最大振幅 $\pm A$ の位置）では $\cos \omega t = 0$ となり，その点で速さは 0 になります[25]。 次ぎに加速度 次ぎに加速度の大きさ a は，v を t で微分すればよいので

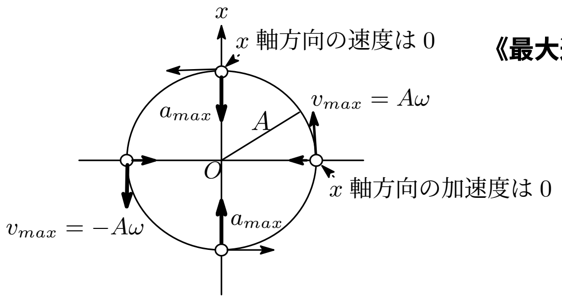
$$a = \frac{dv}{dt} = A\omega \frac{d(\cos \omega t)}{dt} = -A\omega^2 \sin \omega t \tag{1.6.4}$$

$\sin \omega t$ のとる範囲は $-1 \leqq \sin \omega t \leqq 1$ で，加速度の大きさが最大値をとるのは $\sin \omega t = \pm 1 \longrightarrow \omega t = \pi/2, 3\pi/2, \cdots$ のとき，つまり最大振幅 $A, -A$ の位置となります。加速度の最大値を a_{max} とすると

$$a_{max} = A\omega^2$$

この位置は最大振幅の位置で，速さが 0 となる位置ですね。つまり，速さが 0 から次の瞬間ある速さになるので，速度の変化が一番大きく加速度が最大になるというわけです。また，加速度が 0 となるのは中心 O を通過するときです。

[24] 速さは速度の”大きさ”なので正の値です
[25] x 軸方向の運動を見ているので速度の x 成分はゼロ



《最大速度と最大加速度》

$v_{max} = A\omega$

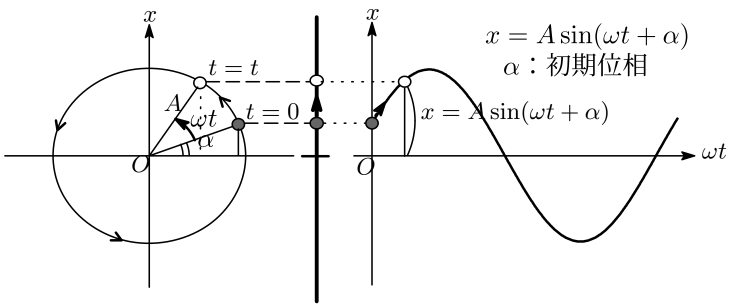
$a_{max} = A\omega^2$

1.6.2　初期位相とは

下図に示すように，時刻 $t = 0$ で質点が原点 O にない場合，t 秒後の質点の位置は

$$x = A\sin(\omega t + \alpha) \tag{1.6.5}$$

で表されます。$(\omega t + \alpha)$ のことを**位相**ということは既に述べました。この中で，特に $t = 0$ における位相 α を**初期位相**と呼んでいます。



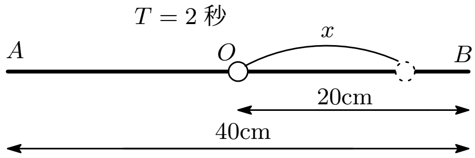
1.6.3　等速円運動と単振動の対応関係

いままで見てきたように，等速円運動は見方を変えると単振動運動で表せ，逆に単振動は等速円運動で表すことができます。等速円運動と単振動にでてくる物理量は同じものであっても呼び名は異なりますので，その対応関係を以下に整理しておきます。

	単位	**単振動**	**等速円運動**	**公式**
A	m	振幅	円の半径	
ω	rad/s	角振動数	角速度	$\omega = 2\pi/T = 2\pi\nu$
$(\omega t + \alpha)$	rad	位相	角	
T	s	周期	周期	$T = 1/\nu$
ν	Hz	振動数	回転数	$\nu = 1/T$

【問題 16】 線分 AB の中点 O で時間の初めに B の方向に速度を与えると，AB(= 40cm) を往復する周期 2 秒の単振動をする小さな物体がある。このとき次の問いに答えよ。
(1) O からの距離を x とするとき，任意の時間 t のときの x を表す式
(2) 震度中 O を右向きに通過してから 1/6 秒後の位置
(3) 最大の速さおよび上記 (2) のときの物体の速度

(4) 最大の加速度の大きさと上記 (2) のときの加速度
(5) 加速度 a と x との間の関係式



【答】 単振動運動の振幅は $A = 20\text{cm}$，周期は $T = 2$ 秒なので角振動数 ω は

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi\,(\texttt{rad/s})$$

$t = 0$ のときに物体は原点 O にいたので t 秒後の変位 x は $x = A\sin\omega t$ で与えられます。また，初速度の方向 OB を x, v, a の正の向きとします。
(1) 任意の時間 t における物体の位置 x は $x = A\sin\omega t$ より $x = 20\sin\pi t$
(2) $t = 1/6$ 秒後の位置は $x = 20\sin\pi \times (1/6) = 20\sin 30\,^\circ = 20 \times (1/2) = 10\,(\texttt{cm})$
(3) 時間 t における物体の速度は

$$v = \frac{dx}{dt} = A\omega\cos\omega t$$

で与えられるので，$t = 1/6$ 秒後の速度は

$$v = A\omega\cos\omega t = 20 \times \pi\cos\pi/6 = 62.8 \times \sqrt{3}/2 = 54.4\,(\texttt{cm/s})$$

で向きは右向き。また，$\cos\omega t = 1$ のとき最大速度となるので

$$v_{max} = A\omega = 20 \times \pi = 20 \times 3.14 = 62.8\,(\texttt{cm/s})$$

(4) 時間 t における物体の加速度は

$$a = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2\sin\omega t = -\omega^2 A\sin\omega t = -\omega^2\,x$$

で与えられる。最大加速度は $\sin\omega t = 1$ のときだから

$$a_{max} = -A\omega^2 = -20 \times \pi^2 = 197\,(\texttt{cm/s}^2)$$

また，$t = 1/6$ 秒後の加速度は

$$a = -A\omega^2\sin\omega t = -20 \times \pi^2\sin\pi/6 = -197 \times \frac{1}{2} = -98.6\,(\texttt{cm/s}^2)$$

マイナスの符号が付いているので加速度の向きは原点 O に向いている。
(5) $a = -\omega^2 x$ より $a = -\pi^2 x = -9.86x$

1.6.4 単振動の運動方程式

単振動の運動方程式（微分方程式）を解いて $x = Asin(\omega t + \alpha)$ という解を求めていきます。微積の知識が必要となるので忘れた方は第 0 章を復習しておいてください。

式（1.6.4）で単振動の加速度 a は次式で与えられました。

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x \quad (x = A\sin\omega t)$$

ニュートンの運動第 2 法則によれば力 (F)=質量 $(m)\times$ 加速度 (a) なので，上の式に m を掛けると

$$ma = m\frac{d^2x}{dt^2} = -m\omega^2 x = -kx, \quad \text{ただし}, k = m\omega^2 \tag{1.6.6}$$

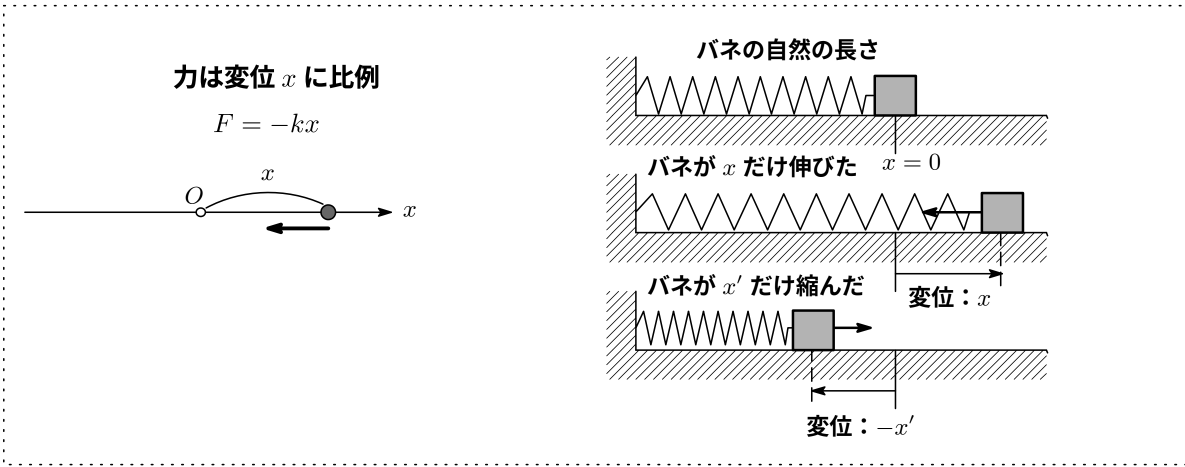
この式は力 F は常に原点に向かい，変位 x に比例する力が質量 m の質点に働いていることを表しており，質量 m の重りによるバネの単振動の方程式で[26]，k を**バネ定数**といいます。角振動数 ω とバネ定数 k の関係は

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{1.6.7}$$

で与えられるので，周期 T，振動数 ν は

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}, \quad \nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{1.6.8}$$

となります。



さて，次の運動方程式を解いていきます。

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

この微分方程式の解き方はいろいろありますが，ここでは一般的な解き方でやっていきます。両辺に $\frac{dx}{dt}$ をかけて t で積分すると

$$m\int \frac{d^2x}{dt^2}\frac{dx}{dt}dt = -k\int x\frac{dx}{dt}dt \tag{1.6.9}$$

となります。ここで**部分積分の公式**

$$\int f'(t)g(t)dt = f(t)g(t) - \int f(t)g'(t)dt \quad (\, f'(t) = df(t)/dt,\, g'(t) = dg(t)/dt\,) \tag{1.6.10}$$

を使うと

左辺：$f'(t) = d^2x/dt^2,\, g(t) = dx/dt$ とおいて

$$m\int \frac{d^2x}{dt^2}\frac{dx}{dt}dt = m\left\{\frac{dx}{dt}\frac{dx}{dt} - \int \frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}dt\right\} = m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - m\int \frac{d^2x}{dt^2}\frac{dx}{dt}dt$$

$$\therefore\ m\int \frac{d^2x}{dt^2}\frac{dx}{dt}dt = \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$$

右辺：$f'(t) = dx/dt,\, g(t) = x$ とおいて部分積分の公式を使うと[27]

$$-k\int x\frac{dx}{dt}dt = -k\left\{x^2 - \int x\frac{dx}{dt}\right\} \quad \therefore -k\int x\frac{dx}{dt}dt = -\frac{1}{2}kx^2$$

[26] 力が変位 x に比例するという関係は**フックの法則**として知られています。

[27] 別に部分積分の公式を使わなくても $\frac{d}{dt}x^2 = 2x\frac{dx}{dt}$ となることを利用すればすぐにでる。

積分定数を C とすると

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = -\frac{1}{2}kx^2 + C$$

が得られます。これから後の計算で式の形を簡単にするために $C=(1/2)kA^2$ とおいてやると

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}k(A^2-x^2) \longrightarrow \frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{A^2-x^2} \longrightarrow \frac{dx}{\sqrt{A^2-x^2}} = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}dt$$

それぞれ両辺を積分して

$$\int\frac{dx}{\sqrt{A^2-x^2}} = \pm\int\sqrt{\frac{k}{m}}dt$$

$x=A\cos\theta$ とおくと $dx=-A\sin\theta d\theta$ となるので

$$\begin{cases} \text{左辺} = \displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{A^2-x^2}} = \int\frac{-\sin\theta d\theta}{\sqrt{1-\cos^2\theta}} = \int\frac{-\sin\theta d\theta}{\sin\theta} = -\int d\theta = -\theta \\ \text{右辺} = \pm\displaystyle\int\sqrt{\frac{k}{m}}dt = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}t \\ \therefore \pm\sqrt{\dfrac{k}{m}}t+\alpha \longrightarrow \cos^{-1}\left(\dfrac{x}{A}\right) = \pm\sqrt{\dfrac{k}{m}}t+\alpha \quad (\alpha:\text{積分定数}) \end{cases}$$

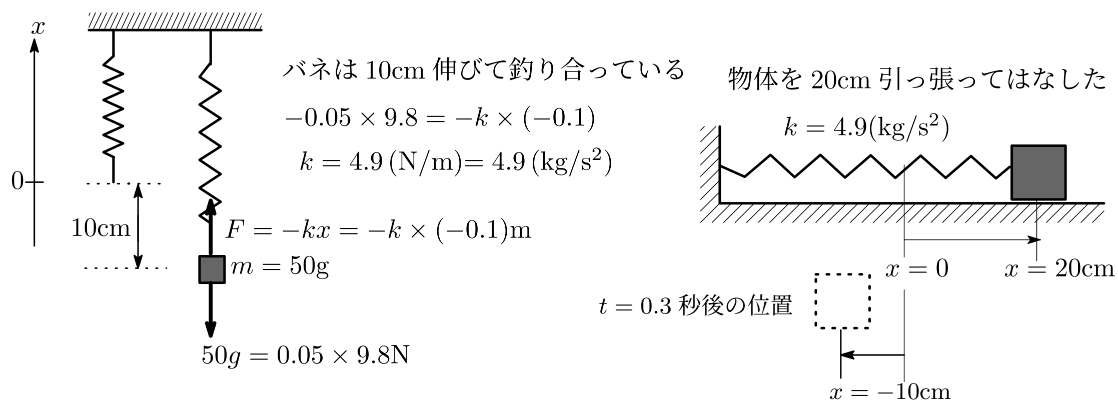
これから[28]

$$\frac{x}{A} = \cos\left(\pm\sqrt{\frac{k}{m}}t+\alpha\right) = \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t+\alpha\right) \longrightarrow x = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t+\alpha\right) = A\cos(\omega t+\alpha)$$

が得られます。

【問題 17】 あるバネに 50g の物体を吊るすと 10cm 伸びてつりあった。このバネを横にし，一端を固定し他端に 100g の物体をつなぎ，滑らかな水平面上において 20cm 引っ張ってはなした。振動の周期と 0.3 秒後の位置を求めよ。

【答】 MKS 単位系で考えます。鉛直上方に x 軸の正の方向をとります。質量 50g の物体が鉛直下方に引かれる力は重力加速度を g ($=9.8\mathrm{m/s^2}$) とすると $-50g=-0.05\times 9.8\mathrm{N}$ で，バネの復元力（F）はバネ定数を k とすると $F=-kx$。いま $x=10\mathrm{cm}$ 伸びて釣り合ったのだから，釣り合いの式よりバネ定数は $k=4.9(\mathrm{N/m})$ と求まります。$1\mathrm{N}=1\mathrm{kg\cdot m/s^2}$ なのでバネ定数は $k=4.9\,(\mathrm{kg/s^2})$。



バネ定数が求まると，100g の物体をつないだ場合のバネの振動の周期 T は

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\times 3.14\sqrt{\frac{0.1}{4.9}} = 0.9\,(\mathrm{s})$$

[28] 三角関数の逆関数の性質：$x=\cos\theta \Longleftrightarrow \theta=\cos^{-1}x$，また $cos\theta$ は偶関数だから $\cos\theta=\cos(-\theta)$

バネの初期位相は 0 なので t 秒後の変位 x は $x = A\cos\omega t = A\cos(2\pi/T)t$。$A = 20\text{cm}$ なので，$t = 0.3$ 秒後の位置 x は

$$x = 20 \times \cos\frac{2\pi}{0.9} \times 0.3 = -10\,(\mathtt{cm})$$

1.7　単振り子

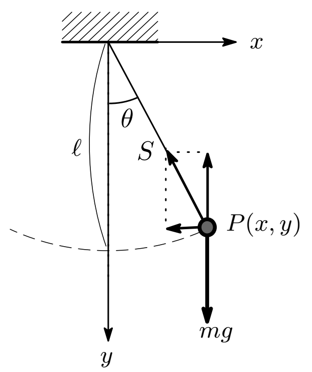
1.7.1　単振り子の運動方程式と振り子の等時性

「大きな古時計」という歌がありますね。平井堅が歌って一気にブレークしましたが，原曲は「Grandfather's Clock」で 1876 年米国の作曲家 Henry Clay Work により作曲されました。なかなか牧歌的で，静寂な空間をチクタク・チクタクと空気を震わす振子の音がいまにも聞こえそうですが，それはともかく，このセクションでは振り子の運動を調べます。

セクション 1.4「放物体の運動」のところでやったように運動を x 方向の運動と y 方向の運動に分解して考えます。右向き水平方向に x 軸，鉛直下方に y 軸を取り，長さ ℓ の糸に質量 m の重りを吊るし，y 軸に対する糸の傾きを θ とし，糸の張力を S とします。そうすると運動方程式は

$$\begin{cases} x\text{ 方向：} & m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -S\sin\theta \\[2ex] y\text{ 方向：} & m\dfrac{d^2y}{dt^2} = mg - S\cos\theta \end{cases} \tag{1.7.1}$$

で表されますね。



質点 P の運動方程式

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -S\sin\theta$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = mg - S\cos\theta$$

$$x = \ell\sin\theta$$

$$y = \ell\cos\theta$$

一方，質点 $P(x, y)$ の位置は $x = \ell\sin\theta,\ y = \ell\cos\theta$ で与えられるが，いま振れ角 θ が小さいとすると

$$\begin{cases} x = \ell\sin\theta \longrightarrow \ell\theta, & (\because \sin\theta \fallingdotseq \theta) \\ y = \ell\cos\theta \longrightarrow \ell, & (\because \cos\theta \fallingdotseq 1) \end{cases} \tag{1.7.2}$$

と近似できるので，運動方程式（1.7.1）にこの近似式を入れると

$$\begin{cases} x\text{ 方向：} & m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -\dfrac{S}{\ell}x \\[2ex] y\text{ 方向：} & m\dfrac{d^2y}{dt^2} = mg - S \end{cases} \tag{1.7.3}$$

となります。ところで振れ角 θが小さいときは $y = \ell$(一定) なので $\frac{d^2y}{dt^2} = 0$ となり，y 方向の運動方程式は

$$0 = mg - S \quad \longrightarrow S = mg$$

となります。これを x 方向の運動方程式に入れると

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{S}{\ell} = -m\frac{g}{\ell} \quad\longrightarrow\quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{g}{\ell}$$

この式は単振動の運動方程式（1.6.9）の k/m を g/ℓ で置き換えたものと一緒ですね。単振動の運動方程式の解は $x = A\cos(\omega t + \alpha)$, $\omega = \sqrt{k/m}$ であったので，振り子の運動方程式の解は

$$x = A\cos\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}} + \alpha\right) \tag{1.7.4}$$

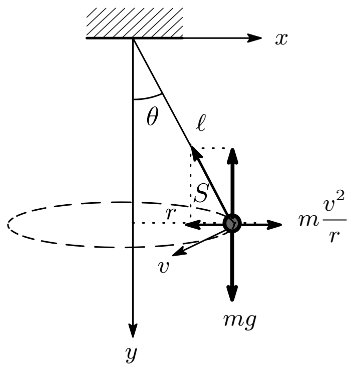
と得られます。振り子の周期 T は

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \tag{1.7.5}$$

となります。ℓ が長いと周期 T も大きくなるので，大きな古時計はチクタク・チクタクとゆったり音を立てることになります。ところで，ここで注目したいのは，振り子の周期 T は重りの質量 m に関係しないという点と，振れ角 θ が小さい範囲では振幅 A に関係しないという点です。とくに後者の特長を振り子の**等時性**といいます[29]。

【問題 18】 一端が固定された長さ ℓ の糸の他端に質点を吊るし，糸が固定点を通る鉛直線と常に一定角 α をなすように質点を一定の速さで水平な円周を描いて運動させる。この運動の周期を求めよ。この糸が Mg の物体を吊り下げるだけの強さをもっているとすると質点の回転しうる最大の回転数は毎秒何回か。

【答】 半径 r で回転している質点に働く力は糸の張力 S，重力 mg，遠心力 $m\frac{v^2}{r}$ で，質点とともに動く回転座標系で見れば質点は静止していて力のバランスが取れていることになります。



x, y 方向の力のバランスの式から

$$\begin{cases} x\text{ 方向：} & S\sin\theta = m\dfrac{v^2}{r} = mr\omega^2 = m\omega^2\ell\sin\theta \\ y\text{ 方向：} & S\cos\theta = mg \end{cases} \quad \longrightarrow \quad \omega^2 = \frac{g}{\ell\cos\theta}$$

が得られます。したがって周期 T は

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell\cos\theta}{g}}$$

と得られます。また，糸は Mg 以上の力で引っ張られると切れますから $S \leqq Mg$ でなければなりません。したがって x 方向のバランスの式から

$$S = m\omega^2\ell \leqq Mg \quad \longrightarrow \quad \omega \leqq \sqrt{\frac{Mg}{m\ell}}$$

回転数 ν は $\nu = 1/T = \omega/2\pi$ で与えられるので，毎秒

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{Mg}{m\ell}}$$

の回転に耐えられることになります。

[29] ガリレオガリレイがピサの斜塔のシャンデリアが揺れているのを見て振り子の等時性を発見したという逸話が残されています。周期は一定ですから振幅の大きな振り子はビュンビュンと振れることになりますね。

1.8　仕事とエネルギー

1.8.1　仕事とは何？

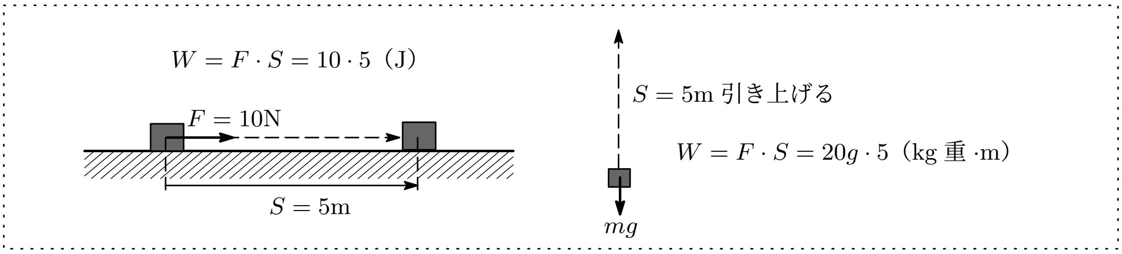
重い荷物を担いで遠い距離を運んだとき, “ きつい**仕事**やったなぁ ”と口にすることがありますね。“ 重い ”というのは地球が引っ張る力が大きいということで，物理でいう仕事は**“ 力と移動距離の積 ”**のことをいい,

$$仕事 = 力 \times 距離 \quad : \quad W = F \cdot S \tag{1.8.1}$$

で定義されます。仕事の単位としては以下の単位があります。

$$\begin{cases} 1\ \mathtt{erg}\,(エルグ) & 1\ \mathtt{dyn}\,の力で\,1\ \mathtt{cm}\,動かす仕事 & 1\ \mathtt{erg} = 1\ \mathtt{dyn}\cdot\mathtt{cm} = 1\ \mathtt{g}\cdot\mathtt{cm}^2/\mathtt{s}^2 \\ 1\ \mathtt{J}\,(ジュール) & 1\ \mathtt{N}\,の力で\,1\ \mathtt{m}\,動かす仕事 & 1\ \mathtt{J} = 1\ \mathtt{N}\cdot\mathtt{m} = 1\ \mathtt{kg}\cdot\mathtt{m}^2/\mathtt{s}^2 \\ 1\ \mathtt{kg}\,重\cdot\mathtt{m} & 1\ \mathtt{kg}\,重の力で\,1\ \mathtt{m}\,動かす仕事 & 1\ \mathtt{kg}\,重\cdot\mathtt{m} \end{cases} \tag{1.8.2}$$

10N の力で 5m 動かした場合の仕事は $W = F \cdot S = 10\mathtt{N} \times 5\mathtt{m} = 50\mathtt{J}$ となり，質量 20kg の物体を 5m 引き上げるのになした仕事は (1)20kg 重× 5m=100kg 重 ·m，(2)20kg × 9.8m/s^2 × 5m=980J=980 × 10^{7}erg となります。



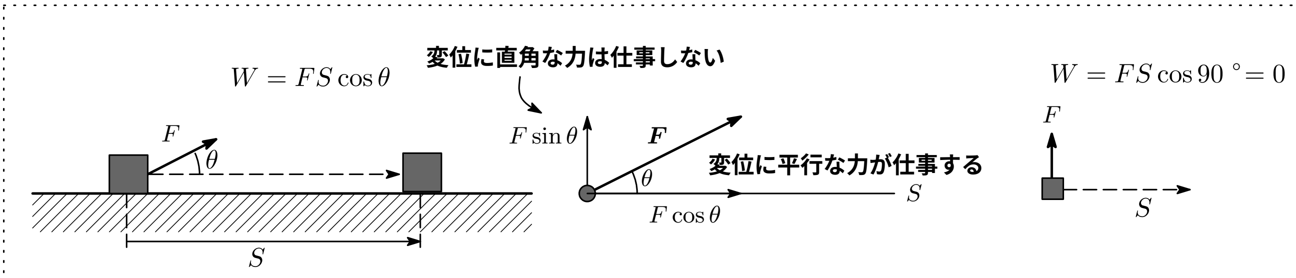
ところで仕事の定義（1.8.1）で，力 F と動いた距離 S は同じ方向であって，物体が力 F の方向と角 θ をなす方向に距離 S 動いた場合の力 F のなした仕事 W は

$$W = FS\cos\theta \tag{1.8.3}$$

で，これは力を $\boldsymbol{F}$，変位ベクトルを $\boldsymbol{S}$ とすると

$$W = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{S} \tag{1.8.4}$$

とベクトルの内積で定義された量（大きさのみのスカラー量）となります。

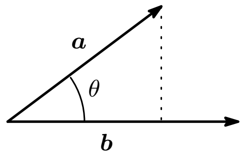


ベクトルの内積は 2 つのベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ があって

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = ab\cos\theta \tag{1.8.5}$$

と定義され，細字の a, b はそれぞれのベクトルの大きさ，θ はベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ のなす角でベクトルの内積は大きさのみを持つスカラー量です。

ベクトルの内積の定義



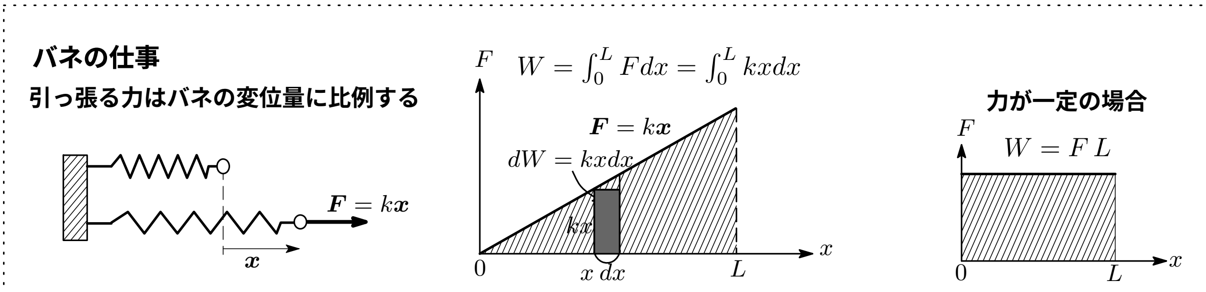
$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = ab\cos\theta$ （ベクトルの大きさの積）

$\underline{\quad a\cos\theta \quad} \times \underline{\qquad b \qquad}$

移動した方向と力 F が直角（$\theta = 90$ °）な場合は $\cos 90$ ° $= 0$ なので，力 F のした仕事は 0 となります。

1.8.2 バネの仕事

バネを伸ばすと伸びに比例して元の長さに戻ろうとする復元力が働きます。バネの復元力は $F = -kx$ で，これと拮抗して伸ばす力は $F = kx$ となります。このバネを伸ばす力とバネの伸び量（変位量）をグラフに描くと下図のようになります。バネを自然長（$x = 0$）から $x = \ell$ まで伸ばしたとき，伸ばす力のなした仕事は，中央の図の斜線部の三角形の面積となりますが，これを以下に求めてみます。



伸び x から僅かに Δx だけ伸ばしたときに力 F がなす仕事を dW とすると，これは中央の図の塗りつぶした微小四角形の面積ですから

$$dW = kxdx$$

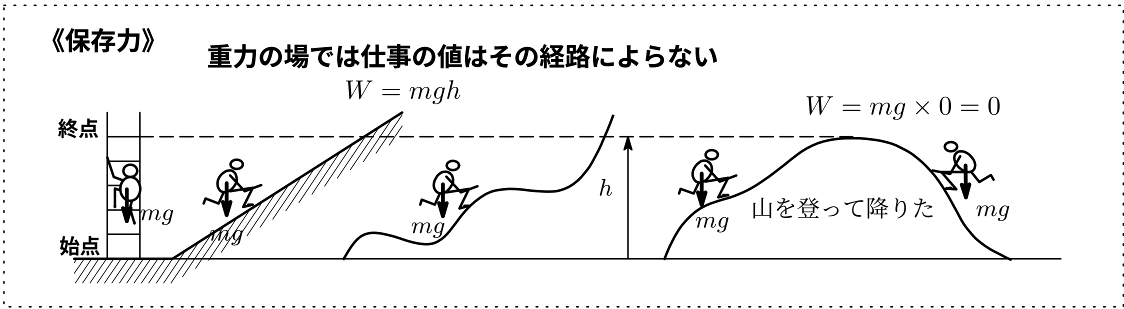
となります。あとはこの微小四角形を足し合わせていけばいいわけで，これは $x = 0$ から $x = L$ までの積分となります。求める仕事 W は

$$W = \int_0^L kxdx = k\int_0^L xdx = \frac{1}{2}k[x^2]_0^L = \frac{1}{2}kL^2 \tag{1.8.6}$$

で，斜線部の三角形の面積となります。

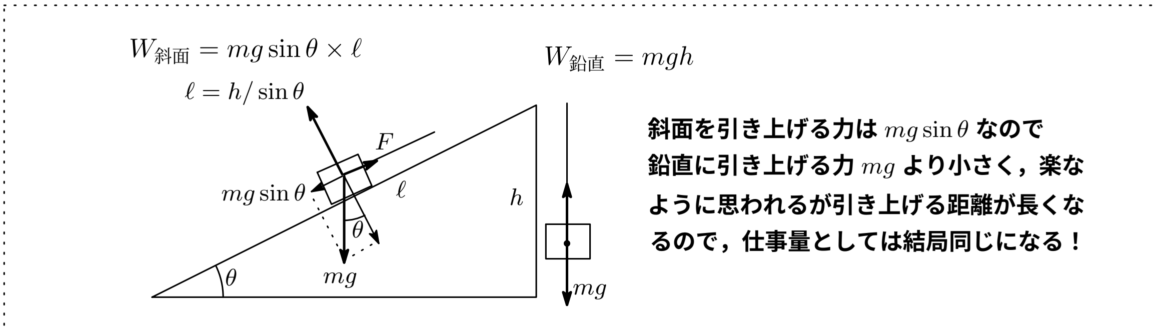
1.8.3 保存力とは

重い荷物を担いで梯子を上ったり，坂道を登ったりすることがありますが，同じ高さまで荷物を運ぶ際，梯子を使おうが坂道を利用しようが，このときなした仕事の量は同じになります。重力が物体にする仕事は，始点と終点の高さの差だけで決まり，始点から終点に至る道筋には一切関係しないということになります。したがって，重い荷物を担いで高いところに昇り，また再びもとの位置に戻ってきたときには，始点と終点が同じところになるので，仕事量はゼロ！ということになります。重力のように，始点と終点を決めれば途中の経路をどのようにとっても仕事の量が等しくなるような力を“ **保存力** ”といいます。



【問題 19】 トラックに重い荷物を上げるのに，斜面を使うと力が小さくてすみ楽であるが，仕事の量は直接上げる場合に比べてどうか？

【答】 トラックの荷台までの高さを h とします。



滑らかな斜面に沿って荷物を引き上げる力 F は $mg\sin\theta$ で，引き上げる距離を ℓ とすると $\ell = h/\sin\theta$ なので，仕事量 $W_{斜面}$ は

$$W_{斜面} = mg\sin\theta \times \ell = mg\sin\theta \times \frac{h}{\sin\theta} = mgh$$

となります。一方，直接鉛直方向に引き上げる力は mg で高さ h まで引き上げるのだからこのときの仕事量 $W_{鉛直}$ は

$$W_{鉛直} = mg \times h = mgh$$

となって，仕事量としてはどちらも同じということになります。

1.9 力学的エネルギー保存の法則

1.9.1 エネルギーとはなに

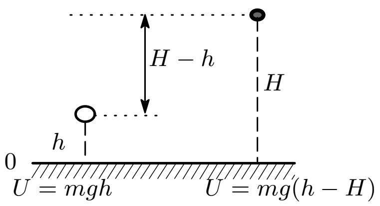
仕事というのは力を使って物体を移動させることでした。荷物を持ち上げたり，車を動かしたり，一般に**仕事をする能力のことをエネルギー**といいます。物体がある状態でもっているエネルギーは，その状態を失うまでに他の物体になしうる仕事の量ということになります。具体的な例でいうと，高さが h のところにある質量 m の物体は，地面に落ちるまでに mgh の仕事をしますね。だから，高さ h にある物体は mgh のエネルギーを持っているということになります。これから分かるようにエネルギーの単位は仕事の単位と同じです[30]。

1.9.2 重力による位置エネルギー

重力が働いている地球上では，高い位置にある物体が低い位置に下がるとき，その高低差の分仕事をします。つまり高い位置にある物体はその分だけのエネルギーを持っています。この位置によってもつエネ

[30] エネルギーは仕事と同様スカラー量です。つまり大きさだけの量です。

ルギーを**位置エネルギー**といい，通常 U という文字が使われます。



《位置エネルギー》

地面を基準にすると $U=mg(h-0)$

高さ H の位置を基準にすると $U=mg(h-H)$

ある位置 P を基準にとり，それより h 高いところにある質量 m の物体は位置 P に対して $U=mgh$ の位置エネルギーを持ちます。したがって，基準点 P の位置を変えれば位置エネルギーの大きさも変わるということに留意ください。例えば，質量 100g の物体が，地面から高さ 10m にあれば，地面を基準にした場合この物体のもつ位置エネルギーは

$$\textbf{位置エネルギー}: U=mgh=0.1\,\mathtt{kg}\times 9.8\mathtt{m/s}^2\times 10\mathtt{m}=9.8\,\mathtt{J}$$

となります。一方，地面から 30m の高さを基準にとれば

$$\textbf{位置エネルギー}: U=mgh=0.1\,\mathtt{kg}\times 9.8\mathtt{m/s}^2\times(10-30)\mathtt{m}=-19.6\,\mathtt{J}$$

となります。位置エネルギーがマイナスになりましたが，これは基準位置から見てそれだけ位置エネルギーが少ないということを意味します。

1.9.3 運動エネルギー

運動している物体が静止するまでに仕事をなしうる能力を**運動エネルギー**といいます。元気に跳びまわっている奴を押さえ込むのは大変しんどいですよね。これはそれだけ運動エネルギーが多いからということになります。

運動エネルギーは通常 E_k という文字が使われますが[31]，質量 m の物体が v の速さで運動しているときに持っている運動エネルギーは

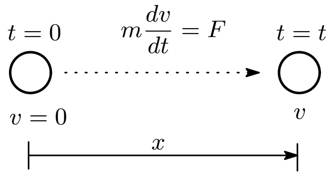
$$E_k=\frac{1}{2}mv^2 \tag{1.9.1}$$

で表されます。例えば 1kg の物体が 2m/s の速さで運動しているときの運動エネルギーは

$$E_k=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}\times 1\,\mathtt{kg}\times(2\mathtt{m/s})^2=2\,\mathtt{J}$$

となります。

《運動エネルギー》



$\Longrightarrow$ $E_k=\frac{1}{2}mv^2$ **の運動エネルギーを持つ**

この物体を止めるには $\frac{1}{2}mv^2$ **のエネルギーがいる**

さて，運動エネルギーがなぜ $\frac{1}{2}mv^2$ になるのか，以下に導きます。質量 m 物体を力 F で押して加速度 a を与えたとします。そして t 秒後に距離 s まで進んだとすると，この間に力 F のなした仕事は $W=F\,s$ となります。$F=ma$ で，等加速度運動の公式より $s=\frac{1}{2}at^2$ なので

$$F=F\,s=ma\cdot\frac{1}{2}at^2=\frac{1}{2}m(at)^2=\frac{1}{2}mv^2$$

[31] kinetic energy からきています。

これは運動エネルギーの式ですね。これでいいのですが，おまけとして一般的に導いてみます。質量 m，速度 v で運動する物体の運動方程式はニュートンの運動第 2 法則より

$$m\frac{dv}{dt} = F \tag{1.9.2}$$

$v = \frac{dx}{dt}$ より $vdt = dx$ となるので式（1.9.2）の左辺に vdt を掛け，右辺に dx を掛けると

$$mv\frac{dv}{dt}dt = Fdx \tag{1.9.3}$$

となります。$t = 0$ で物体が静止しており，外力 F が作用して時刻 t 後に物体の速度が v，移動距離が ℓ になったとしましょう。このとき，外力 F のなした仕事量を求めてみます。運動方程式を時刻 $t = 0$（速度 $v = 0$，位置 $= 0$）から $t = t$（速度 v，位置 ℓ）まで積分すると

$$\int_0^t mv\frac{dv}{dt}dt = \int_0^\ell Fdx$$

となります。この積分を計算すると

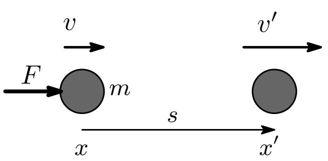
$$\left\{\begin{array}{ll} \text{左辺：} & \displaystyle\int_0^t mv\frac{dv}{dt}dt = m\int_0^v vdv = \frac{1}{2}m[v^2]_0^v = \frac{1}{2}mv^2 \\ \text{右辺：} & \displaystyle\int_0^\ell Fdx = F\int_0^\ell dx = F\ell \end{array}\right. \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{2}mv^2 = F\ell$$

となり，これは物体の運動エネルギーの変化分（$0 \to \frac{1}{2}mv^2$）はその物体に作用する外力 F のなした仕事量（$F\ell$）に等しいことになります。

一般的に，速さ v で動いていた物体が外力 F を受けてその方向に $\ell(= x' - x)$ だけ変位する間に速さが v から v' になったとすると，式（1.9.3）から

$$\int_v^{v'} mvdv = \int_x^{x'} Fdx \longrightarrow \frac{1}{2}mv'^{\,2} - \frac{1}{2}mv^2 = F(x' - x) = F\ell \tag{1.9.4}$$

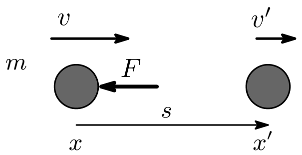
が得られます。これは物体がなされた仕事は物体の運動エネルギーの増加分に等しいということを意味しています。逆に，外力と速度が反対向きの場合，つまり，物体が外力に逆らって仕事をするような場合は，その仕事量に相当する運動エネルギーが減少することになります。これは式（1.9.4）で $v' < v$ のケースで，運動エネルギーの減少分は $\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv'^{\,2}$ となり，仕事量は負の値となります。たとえば摩擦のない滑らかな面からザラザラの面に物体が滑り込むと，次第に速度を落としていくようなケースがそれで，これは摩擦力という抵抗力が負の仕事をしたということになります[32]。



物体がなされた仕事＝運動エネルギーの増加

$$Fs = \frac{1}{2}mv'^{\,2} - \frac{1}{2}mv^2 > 0$$

（外力が物体に正の仕事をする）



物体がなされた仕事＝運動エネルギーの減少

$$Fs = \frac{1}{2}mv'^{\,2} - \frac{1}{2}mv^2 < 0$$

（外力が物体に負の仕事をする）

《メモ》どんな運動でも物体に対して力のなした仕事だけ物体の運動エネルギーが増しますが，負の仕事の場合は，“ **運動エネルギーが負の増加** ”をするとみなします。例えば動いている物体に手で力 $\boldsymbol{F}$ を加えて物体を止めようとしたと

[32] 運動エネルギーの減少分は熱に変わります。

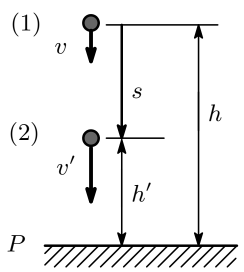
き，$\boldsymbol{F}$ の向きと物体の運動の方向は鈍角（$90^\circ < \theta < 180^\circ$）をなし，手が物体におよぼす力のする仕事は負になります。それで，物体の運動エネルギーは“ 負の増加 ”をする，つまり減るわけですね。手がする仕事が負であるということは，手が仕事を“ された ”ともいえます。このように，仕事についていうときには，何が何に対してする仕事かをはっきりいうことが大切です。

【問題 20】 150m/s の速度で飛んでいる質量 10g の弾丸が厚い壁にあたっとところ 3cm 突入して止まったという。弾丸に対する壁の平均の抵抗力はどれほどか。

【答】 $v = 150,\ v' = 0$ として $Fs = \frac{1}{2}mv'^{\,2}$ より $F = \frac{mv^2}{2s} = \frac{0.01kg \times (150m/s)^2}{2 \times 0.03m} = 3.75 \times 10^3\,\mathrm{N}$

1.9.4 力学的エネルギー保存の法則

運動エネルギーや位置エネルギーを**力学的エネルギー**といいます[33]。質量 m の物体が基準点 P からの高さ h の箇所から下向きの速さ v で落下し，高さが h' のときに速さが v' になったとします。このような状態における位置エネルギー U と運動エネルギー E_k の和はどのようになるでしょうか。



《エネルギー保存則》

運動エネルギーと位置エネルギーの和は一定である

$$E_k + U = E'_k + U'$$

$$(1)\,U = mgh,\ E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

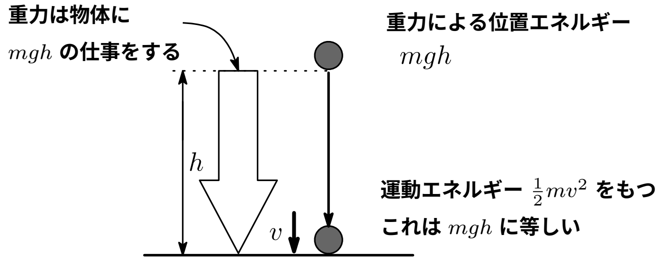
$$(2)\,U' = mgh',\ E'_k = \frac{1}{2}mv'^{\,2}$$

等加速度運動：$v'^{\,2} - v^2 = 2gs$

上図の (1) と (2) の状態での運動エネルギーと位置エネルギーの和はそれぞれ

$$\begin{cases} (1) \quad E_k + U = \dfrac{1}{2}mv^2 + mgh \\[2ex] (2) \quad E'_k + U' = \dfrac{1}{2}mv'^{\,2} + mgh' = \dfrac{1}{2}m(v^2 + 2gs) + mg(h - s) = \dfrac{1}{2}mv^2 + mgh \end{cases} \tag{1.9.5}$$

となって，(1) と (2) の状態での**力学的エネルギーの総和は等しい**ということがでてきます。つまり，位置エネルギーは減少するが，その分運動エネルギーは増加し（位置エネルギーが運動エネルギーに変わった），双方あわせたエネルギー全体の過不足はないということになります。これは**力学的エネルギー保存の法則**と呼ばれます。この法則は力が**保存力**であればどんな力であっても成り立ちます。重力以外にバネの復元力や電気のクーロン力なども保存力です。一方，摩擦力のように，力学的エネルギーを保存則を成立させない力を**非保存力**といいます。ザラザラした面をこすると熱くなりますが，これは摩擦力による仕事（力学的エネルギー）が熱エネルギーに変わるためです。



[33] エネルギーには力学的エネルギーの他に,「熱エネルギー」「電気エネルギー」「化学エネルギー」「原子核エネルギー」などがあります。, これらのエネルギーは互いにますが，これらはまた別の機会にふれることとします。

1.10 運動量と力積

1.10.1 運動量とは

キャッチボールでボールを受けるとき，遅い球より速い球のほうが，また，ソフトボールより重い硬球のほうが衝撃が大きいですね。衝撃は速度が大きいほど，また質量が大きいほど激しいわけです。物体の運動の勢いを表す量として質量と速度の積をとり，それを**運動量**といいます。運動量は $\boldsymbol{p}$ という記号が使われます。運動量 $\boldsymbol{p}$ はしたがって

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v} \tag{1.10.1}$$

で，速度 $\boldsymbol{v}$ がベクトルなので，運動量もベクトルとなります。 質量 10kg の物体が 5ms で運動している場合，その物体の運動量の大きさは $p = mv = 10\mathtt{kg} \times 5\mathtt{m/s} = 50\mathtt{kg}\cdot\mathtt{m/s}$ で，向きは速度の向きとなります。運動量の単位は質量と速度の積なので MKS 単位では kg・m/s となります。

1.10.2 運動量と力積

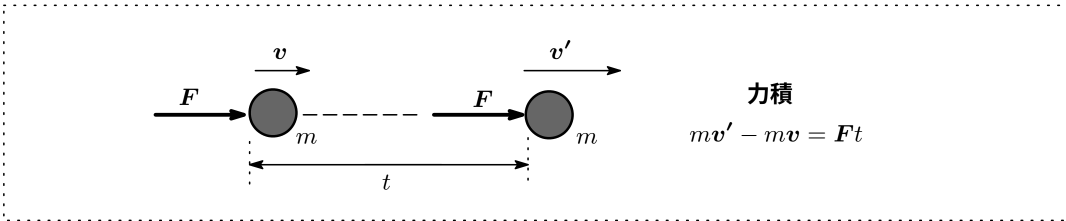
ボールをミットで受けたとき，バシッと音がして衝撃を受けますが，その衝撃力の大きさはどの程度になるでしょうか。いま質量 m の物体に，時間 t の間に力 F が働いて速度が $\boldsymbol{v}$ から $\boldsymbol{v'}$ に変化したとします。そうすると加速度 a は

$$a = \frac{v' - v}{t}$$

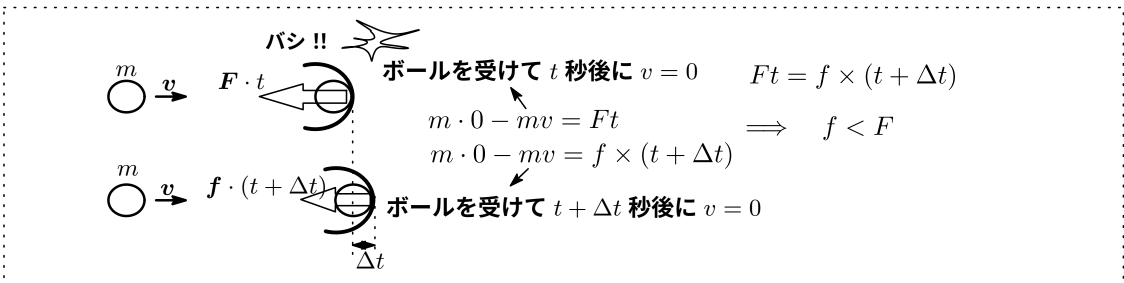
となるので，$ma = F$ の関係式から

$$ma = \frac{mv' - mv}{t} = F \longrightarrow \quad mv' - mv = Ft \tag{1.10.2}$$

が得られます。右辺の力と力が働く時間の積を**力積**といいます。**物体の運動量の変化は，その間に物体が受けた力積に等しい**ということになります。力積の単位は力の単位を N（ニュートン）とすると N・s（ニュートン秒）で，また 1N は kg・m/s^2 に等しいので力積の単位を kg・m/s と表すこともできます。いずれにしても 運動量の単位と同じ ですね。力積もベクトルで，その方向は力 $\boldsymbol{F}$ の方向と一致します。



ボールをミットで受けたとき，大きな衝撃を感じますが，ミットを後ろへサッと引くとその衝撃はやわらぎますね。これは力積としてはどちらも mv の大きさですが，ミットを引いたほうがボールの速度が 0 になるまでの時間が多くかかり，その結果受け止める力が小さくなるからですね。また，茶碗をコンクリートの上に落とすと割れますが，布団の上に落とすと割れない，というのも t を長くして F を小さくするからですね。

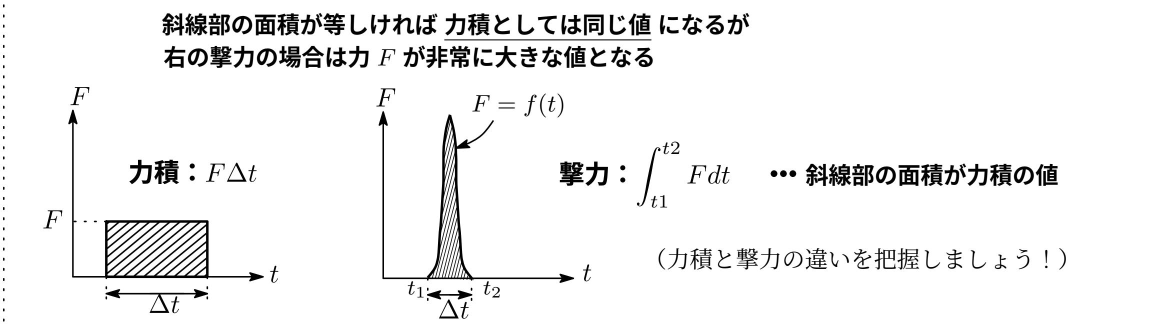


■撃力について

例えばボールをバットで打つときとか，金槌で釘を打つときなどは，Δt が非常に短いですが，このような場合の力積を特に**撃力**といいます。Δt が非常に短い分，力 F は非常に大きくなります。撃力が働く場合の力の変化は複雑ですが，およそ下図の右のようなグラフになると考えられます。撃力の大きさは斜線部の面積になりますから

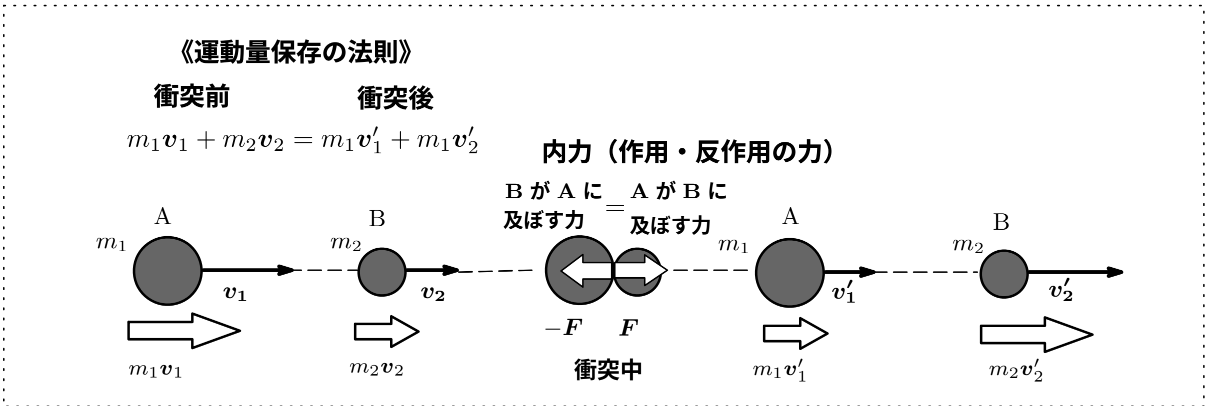
$$\text{撃力} = \int_{t1}^{t2} F dt = \int_{t1}^{t2} f(t) dt$$

と積分で表されます。この積分を実行するには瞬間に働く力の関数形 $f(t)$ が分からないと計算できません。しかし，関数形 $f(t)$ がよく分からなくても，撃力は運動量の変化さえつかめれば，その変化分から求めることができます。



1.10.3 運動量保存の法則

2 つの物体が衝突すると各物体の速度は変化しますが，衝突の前後を通して変化しない量があります。運動量がそうです。もっとも，それぞれの運動量は変化しますが，2 つの物体全体の運動量（系の運動量）は，衝突前後で変わらない。これを**運動量保存の法則**といいます。



質量 m_1 の物体 A が同一直線上を速度 v_2 で運動する質量 m_2 の物体 B に追いつき，衝突し，衝突後の速度がそれぞれ v_1', v_2' になったとします。衝突の時間（2 物体の接触時間）を Δt とし，そのとき物体 A が物体 B に及ぼす力を F とすると，作用・反作用の法則により物体 B が A に及ぼす力は $-F$ となります。物体 A と物体 B の運動量の変化と力積はそれぞれ

$$\begin{cases} \text{物体 } A\text{：} \quad m_1v_1' - m_1v_1 = -F\Delta t & (B \text{ から } A \text{ に } -F \text{ の力が作用する}) \\ \text{物体 } B\text{：} \quad m_2v_2' - m_2v_2 = F\Delta t & (A \text{ から } B \text{ に } F \text{ の力が作用する}) \end{cases}$$

となるので，辺々を加えると

$$m_1v_1' - m_1v_1 + m_2v_2' - m_2v_2 = 0 \quad \longrightarrow \quad m_1v_1' + m_2v_2' = m_1v_1 + m_2v_2$$

となって，衝突の前後で系の運動量は保存されることが分かります。

運動量保存則での重要なポイントは，衝突時，A と B は互いに $F, -F$ を及ぼしあう（作用・反作用）だけで外からの力を受けていないという点です。A，B 全体を一つの系として考えるとき，A，B が互いに及ぼしあうこの力を**内力**といい，系の外から働く力を**外力**といいますが，運動量保存の法則は外力が 0 のとき必ず成立します。

【問題 21】 質量 M の物体が速度 $\boldsymbol{v}$ で右向きに運動中，爆発して m_1, m_2 の 2 つの部分に分かれ，同じ直線上を速度 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ で運動した。

(a) 速度 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ が共に右向きの場合

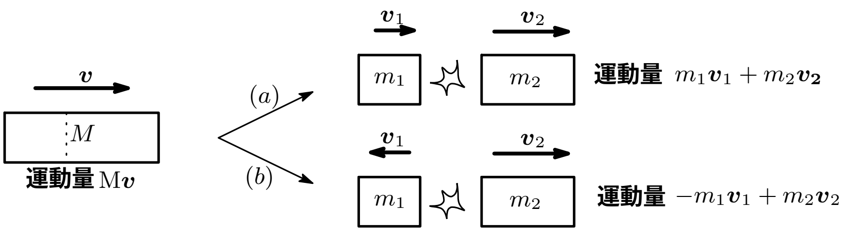
(b) $\boldsymbol{v}_1$ は左向き, $\boldsymbol{v}_2$ は右向きの場合

これらの間にどんな関係が成り立つか。ただし $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ の大きさをそれぞれ v, v_1, v_2 とする。

【答】 爆発前の運動量は $M\boldsymbol{v}$ で，爆発後の運動量はそれぞれ $(a)\quad m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2$ $(b)\quad -m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2$ となります。系の運動量は保存されるので

$(a)\quad m\boldsymbol{v} = m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2$

$(b)\quad M\boldsymbol{v} = m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2$



vspace-15pt

1.11 運動量保存則と力学的エネルギー保存則

運動量保存の法則はニュートンの運動第 2 法則と第 3 法則（作用・反作用の法則）にもとづいているので必ず成り立ちますが[34]，力学的エネルギー保存の法則は必ず成り立つというわけではなく，力学的エネルギーが熱に変わる場合などでは成立しません。

1.11.1 完全弾性衝突

完全弾性衝突は，衝突の前後で力学的エネルギー保存則が成り立ち，熱の発生がない衝突です（←ビリアードの玉突きのイメージ）。滑らかな水平面上で質量 m，速さ v_0 の球 A が，静止している質量 M の球 B に完全弾性衝突し，A，B はそれぞれ速さ v，V で同じ方向に動きだしたとします。衝突後の速度 v，V を求めてみましょう。系の運動量保存則と力学的エネルギー保存則より次式が成立します[35]。

$$\begin{cases} \text{運動量保存則} & : \quad mv_0 = mv + MV \\ \text{力学的エネルギー保存則} & : \quad \dfrac{1}{2}mv_0^2 = \dfrac{1}{2}mv^2 + \dfrac{1}{2}MV^2 \end{cases}$$

v, V は上の連立方程式を解いて得られます。その結果

$$v = \frac{\left(1 - \frac{M}{m}\right) v_0}{1 + \frac{M}{m}}, \quad V = \frac{2v_0}{1 + \frac{M}{m}}$$

と得られます。2 つの球の質量が等しい場合は，球 A，B の衝突後の速さは $v = 0, V = v_0$ となって，球 A は停止し，静止していた球 B は v_0 で動きだすことになります（←ビリアードなどでよく見かける光景ですね）。

[34] くどいようですが系に外力が働いていないことが前提です。

[35] A,B とも同一水平面上におり，位置エネルギーは同じとなるので省略した。

1.11.2　非完全弾性衝突

完全弾性衝突でない衝突を**非完全弾性衝突**といいます。この衝突では力学的エネルギーの一部が熱となり，力学的エネルギー保存則は成立しませんが，運動量保存則は成立します。例えば，滑らかな水平な台の上に静止している質量 M の木片に，水平な速さ v で飛んでいる質量 m の弾が打ち込まれ，弾は木片の中に止まり木片と一緒に動きしたとします。その速さを求めてみましょう。

求める弾の速さを V とすると運動量保存則より $mv = (m+M)V$ なので，$V = \dfrac{m}{m+M}v$ となります。弾は跳ね返らずに木片の中に入ったので，侵入距離を ℓ とすると，弾は木片の抵抗力 F に逆らって $-F\ell$ の負の仕事をしたことになり，弾はその分の運動エネルギーを失います。この失った運動エネルギーは熱に変わるので力学的エネルギー保存則は成立しないことになります。一方，弾は作用・反作用の法則により木片に F なる力を及ぼしますが，弾と木片系の内力の合力は 0 となりますから，系の運動量は変化せず運動量は保存されることになります。失われた力学的エネルギーを求めてみましょう。減少する運動エネルギーを ΔE とすると

$$\Delta E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}(m+M)V^2 = \frac{1}{2}\frac{mM}{m+M}v^2$$

となり，発生する熱量 Q は

$$Q = \frac{\Delta E}{\boldsymbol{J}}$$

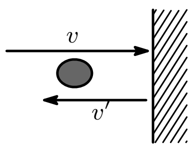
となります。ここで $\boldsymbol{J}$ は熱の仕事当量で $\boldsymbol{J} = 4.19$ J（ジュール）/cal です[36]。

1.11.3　反発係数

反発係数は，跳ね返り係数とも呼ばれ，通常，記号 $\boldsymbol{e}$ 表されます。その定義は次の通りです。

$$\text{反発係数（}\boldsymbol{e}\text{）} = \frac{\text{離れる速さ（}v'\text{）}}{\text{近づく速さ（}v\text{）}}$$

反発係数は衝突する 2 物体を構成する物質の種類によって決まる定数で，衝突前の相対速度（近づく速さ）には関係ありません。固定した壁への衝突を考えると，反発係数の大きさにより次の 3 つの場合があることになります。



(1) $\boldsymbol{e} = 1$：$v' = v$ **で完全弾性衝突。力学的エネルギーは保存される。**
(2) $\boldsymbol{e} = 0$：$v' = 0$ **で非完全弾性衝突。弾は跳ね返らず弾の運動エネルギーは全て熱に変わる。**
(3) $0 < \boldsymbol{e} < 1$：v' **は** v **より小さく不完全は弾性衝突で，弾の運動エネルギーの一部が熱に変わる。**

1.12　中心力による運動

中心力というのは，一つの定点と質点を結ぶ方向に働く力で，その大きさが定点からの距離の関数 $F(\boldsymbol{r})$ となる力のことです。代表的な中心力として，ニュートンが発見した万有引力があります。 万有引力はケプラーの法則からニュートンが導きました。

1.12.1　ケプラーの法則

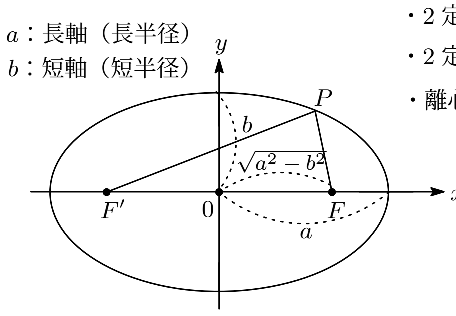
ケプラー[37]は恩師ティコ・ブラーエ[38]の残した膨大な天体観測データの中から，惑星の運動に関する次の 3 つの法則を見いだしました。第 1 法則と第 2 法則は 1609 年発行の「新天文学」に，第 3 法則は 1619 年に出版された「宇宙の和声」の中で発表されています。

[36] 熱に関する話は熱に関するセクションでやります。
[37] ヨハネス・ケプラー (Johannes Kelpler,1571.12.27-1630.11.15) ドイツの天文学者
[38] Tyco Brahe(1546-1601) デンマークの天文学者

●**第１法則：** すべての惑星は太陽を一つの焦点とする楕円軌道上を運行している。

●**第２法則：** 惑星と太陽を結ぶ線分が一定時間に掃く面積は一定である（面積速度一定の法則[39]）。

●**第３法則：** 惑星の公転周期（T) の 2 乗は，楕円軌道の長半径（a）の 3 乗に比例する。　$T^2 \simeq a^3$

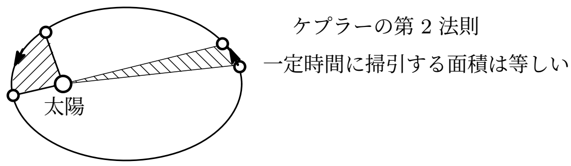


・2 定点 (F, F') からの距離の和が一定である図形を楕円という。

・2 定点 (F, F') を焦点という。$F(\sqrt{a^2-b^2}, 0)$, $F'(-\sqrt{a^2-b^2}, 0)$

・離心率：$e = \sqrt{a^2-b^2}/a$

面積速度



1.12.2　万有引力の法則

ケプラーの第 3 法則を使って万有引力を導きます。惑星の軌道は本当は楕円ですが，現実には円に近いので，惑星は円運動をしていると近似します。質量 M の太陽の周りを質量 m の惑星が周期 T で半径 r の円運動をしている[40]とすると，惑星が太陽に引きつけられる向心力 F の大きさは

$$F = mr\omega^2 = mr\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = mr\frac{4\pi^2}{T^2}$$

一方，ケプラーの第 3 法則より

$$T^2 = kr^3 \quad (k : \text{比例定数})$$

なので，これを上の式に入れると

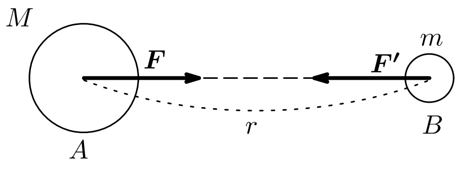
$$F = mr\frac{4\pi^2}{kr^3} = \frac{4\pi^2}{k}\cdot\frac{m}{r^2} = c\frac{m}{r^2} \quad \left(\text{ただし}, c = \frac{4\pi^2}{k}\right)$$

が得られます。これから，惑星が太陽に引かれる力は惑星の質量に比例し，太陽ー惑星間の距離の 2 乗に反比例することが分かります。太陽が惑星を引きつけば，その反作用として太陽も惑星に引きつけられます[41]。引力が惑星の質量に比例するなら太陽の質量 M にも比例するはずなので，上の式の定数 c を $c = GM$ (G：定数）とおいて

$$F = G\frac{Mm}{r^2} \tag{1.12.1}$$

が得られます。これが**万有引力の法則**です。G は万有引力定数と呼ばれ，$G = 6.673 \times 10^{-11}\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2/\mathrm{kg}^2$ という値です。

$\boldsymbol{F}$ と $\boldsymbol{F'}$ は大きさが同じで向きは反対



万有引力の法則

2 物体間に働く万有引力の大きさ F は各物体の質量 M, m の積に比例し，2 物体間の距離 r の 2 乗に反比例する

$$F = G\frac{Mm}{r^2}$$

[39] 角運動保存則と結びつきます（後述）。
[40] 距離 r は物体の重心間の距離
[41] 太陽の慣性質量は惑星に比べて圧倒的に大きいので惑星からの引力により太陽が動くことはありません。

逆に，何らかの方法で先に万有引力の法則が発見されていたとすると，それからケプラーの第 3 法則「惑星の公転周期（T) の 2 乗は，楕円軌道の長半径（a）の 3 乗に比例する」が導かれます。万有引力（向心力）と遠心力は釣り合っているので

$$G\frac{Mm}{r^2}=mr\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \longrightarrow \quad T^2=\frac{4\pi^2}{GM}r^3$$

が得られ，$4\pi^2/GM=k$ とおくとケプラーの第 3 法則 $T^2=kr^3$ がでてきます。

地球上の質量 m の質点には mg の万有引力が作用しています。したがって，地球の半径を R とすると

$$mg=G\frac{mM}{R^2}$$

となり，これから重力加速度 g は

$$g=G\frac{M}{R^2}$$

と求めることができます[42]。G の値と地球の半径 $R=6.4\times10^6$m，地球の質量 $M=6.0\times10^{24}$kg を入れると $g=9.8\text{m/s}^2$ が得られます。

1.12.3 万有引力による位置エネルギー

地球の中心から距離 r にある質量 m の物体に，手が万有引力にちょうど釣り合う力を物体に加えて微小距離 dr だけ運ぶとします[43]。手のした仕事だけ位置エネルギー増すので

$$\Delta U=G\frac{Mm}{r^2}\cdot dr$$

となりますね。いま，位置 A 点（距離 r）から無限遠方 P 点（$r=\infty$）まで運んだ仕事は，上の微小仕事を距離 r で積分すればよいので

$$U(P)-U(A)=\int_r^\infty G\frac{Mm}{r^2}dr=GMm\left[-\frac{1}{r}\right]_r^\infty=-GMm\left(\frac{1}{\infty}-\frac{1}{r}\right)=G\frac{Mm}{r}$$

となります。無限遠点 P における位置エネルギーを基準にとり，それを 0 とおいたとき，点 A にある物体の位置エネルギー $U(A)$ は

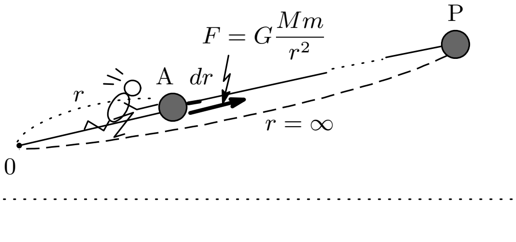
$$0-U(A)=G\frac{Mm}{r}\longrightarrow U(A)=-G\frac{Mm}{r} \tag{1.12.2}$$

となります。

万有引力に拮抗する力 F で無限遠点まで運ぶ仕事

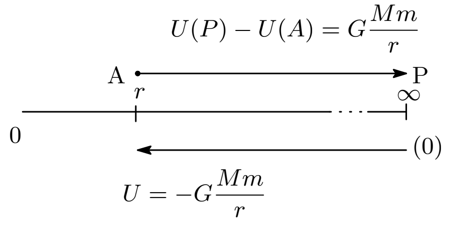
$$dW=\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}=G\frac{Mm}{r^2}\cdot dr$$

$$W=\int dW=\int_r^\infty G\frac{Mm}{r^2}\cdot dr=G\frac{Mm}{r}$$



無限遠点を基準にとると r における

位置エネルギーは $U=-G\frac{Mm}{r}$



[42] 地球の自転の影響は考えないとします。
[43] これを準静的といいます。準静変化とは微小変化前と変化後の状態が共に釣り合っている状態にある変化のことをいいます。

《Coffee Break》
万有引力の発見：1665 年夏，ロンドンで猛威をふるったペストから逃れるべく故郷ウールズソープ村に帰ったニュートンは，自宅の庭にあるりんごの木からりんごが落ちるのを見て万有引力の法則を発見したという逸話はあまりにも有名ですね。実際には万有引力の法則を発見するにいたる経緯は次のようだったようです（藤原正彦・著「天才の栄光と挫折」より）。
「前年より微分や積分の核心にほぼ到達していたニュートンは，ウールズソープ村に帰省するやいなや月の運動の解明にとりかかった。当時はまだ支配的だったアリストテレス的自然哲学では，世界を月より上と下の二領域に分け，それぞれが異なる原理で動いていると考えていた。ニュートンは，ケプラーが膨大な観測データの中から発見した不思議な法則の中の一つ，惑星の周期は軌道中心からの距離の 3/2 乗に比例するという謎めいた法則に目をつけた。そしてこの法則が成り立つためには，引力の強さが距離の二乗に反比例しなければならない，すなわち距離が二倍になると引力は 1/4，三倍になると 1/9 になるということを数学的に証明したのである。ニュートンはさらに思索を進め，地球がりんごを引っぱる力と地球が月を引っぱる力が同一であること，すなわち万有引力を発見した。」

1.12.4 人工衛星

■第１宇宙速度

地球表面をすれすれに回る人工衛星の速さ（**第一宇宙速度**）と地球を一周するのに要する時間を求めてみます。人工衛星の質量を m，地表と平行に飛んでいる速度を $\boldsymbol{v}$ とします。人口衛星には地球の万有引力 mg と遠心力（mv^2/R）が働き，これら力の釣り合いから

$$mg = m\frac{v^2}{R} = mR\omega^2\,, \quad \omega\text{: 人工衛星の角速度}$$

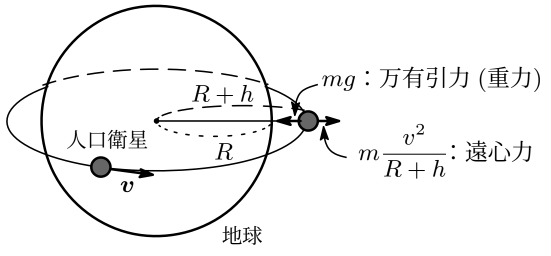
が成り立ちます。遠心力と重力が釣り合っているので，人工衛星の中は，コップの水を傾けても落ちない**無重力状態**になっています。人工衛星の地球を一周する周期 T は $T = 2\pi/\omega$。力の釣り合いの式より人工衛星の速さと周期は

$$v = \sqrt{gR} = \sqrt{\frac{GM}{R}}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi R}{v}$$

となります。v が**第 1 宇宙速度**です。地球の半径 $R = 6.4 \times 10^3$km，重力加速度 $g = 9.8\mathrm{m/s}^2$ を入れると

$$v = \sqrt{9.8 \times 6.4 \times 10^6} = 7.9\,\mathtt{km/s},\, T = \frac{2 \times 3.14 \times 6.4 \times 10^6}{7.9 \times 10^3} = 5.08 \times 10^3(\mathtt{s}) = 85\,(\text{分})$$

となります。秒速 7.9km は新幹線の最高速度（約 300km/h）の約 3600 倍で，ものすごい速さで飛んでいますね[44]。



人工衛星が地球を回り続けるための速度 v は，遠心力が万有引力に釣り合う大きさであることが必要。

遠心力：$m\dfrac{v^2}{(R+h)} =$ **万有引力**: mg

※ $h \simeq 0$ のときの速度が**第一宇宙速度**

■第 2 宇宙速度

位置エネルギーの基準点を無限遠点にとると，初期速さ v_0 で地上と平行に推進したロケットが距離 r

[44] 宇宙速度とロケットが地上から発射されるときの速度をごっちゃにされないように。宇宙速度はロケットが水平飛行に移ったときの初期推進速度のことです。

で速さ v になったとすると，力学的エネルギー保存の法則より

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - G\frac{Mm}{R} = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{r}$$

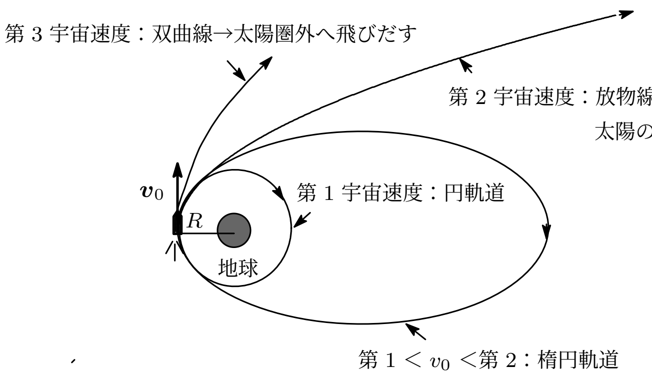
が成り立ちます。無限遠点は地球の重力が及ばない領域で，そこでロケットが有限の速度を持てば地球の重力圏を脱出できたことになります。したがって，無限遠（$r \to \infty$）でのロケットの速度を v_∞ とすると，

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - G\frac{Mm}{R} = \frac{1}{2}mv_\infty^2 \geqq 0 \longrightarrow v_0 \geqq \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

が得られます。等号は $v_\infty = 0$ のときで，これはロケットがなんとか無限遠点に到達することができた（力尽きて速度がゼロになった）ときです。このときの v_0 を**第 2 宇宙速度**といいます。第 2 宇宙速度は第 1 宇宙速度の $\sqrt{2}$ 倍となっていますね。第 2 宇宙速度で飛だしたロケットは放物線軌道を描いて飛んでいきますが，宇宙の彼方にまで飛んでいくエネルギーはなく，太陽の重力に引っかかり太陽の周りを回る人工衛星となります。

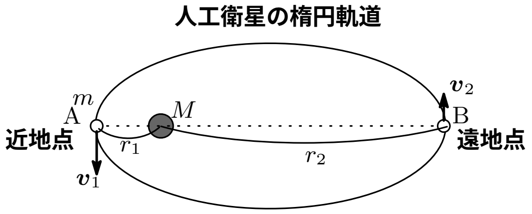
■第 3 宇宙速度

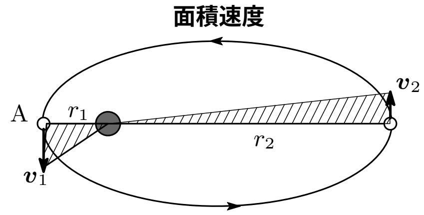
第 2 宇宙速度より大きい速度で，太陽の重力圏外に飛びだし宇宙の遥か彼方に飛び去ってしまう速度です。ロケットは双曲線軌道を描いて彼方に飛んでいきます。



- **第 1 宇宙速度：**$v_0 = \sqrt{\dfrac{GM}{R}}$
- **第 2 宇宙速度：**$v_0 = \sqrt{\dfrac{2GM}{R}}$
- **第 3 宇宙速度：**$v_0 > \sqrt{\dfrac{2GM}{R}}$

【問題 22】 地球（質量 M）の周りを楕円軌道を描いて周回している衛星（質量 m）がある。近地点 A（地球からの距離 r_1）での速度を v_1，遠地点 B（距離 r_2）での速度を v_2 とする。





次の問いに答えよ。

(1) A と B を結ぶ力学的エネルギー保存の式を書け。

(2) A と B を結ぶ面積速度一定の式を書け。

(3) 地球の半径を R として，$r_1 = 2.5R, r_2 = 10R$ であったとする。重力加速度を g として，速度 v_1 を g と R で表せ。

【答】

(1) 力学的エネルギー保存の式は

$$\begin{cases} \text{近地点 } A：\ \dfrac{1}{2}mv_1^2 - G\dfrac{Mm}{r_1} \\ \text{遠地点 } B：\ \dfrac{1}{2}mv_2^2 - G\dfrac{Mm}{r_2} \end{cases} \Longrightarrow \quad \frac{1}{2}mv_1^2 - G\frac{Mm}{r_1} = \frac{1}{2}mv_2^2 - G\frac{Mm}{r_2}$$

(2) 面積速度は図右の三角形の面積に等しいので，面積速度一定の法則は

$$\frac{1}{2}r_1v_1 = \frac{1}{2}r_2v_2$$

(3) 力学的エネルギー保存則と面積速度一定の法則より

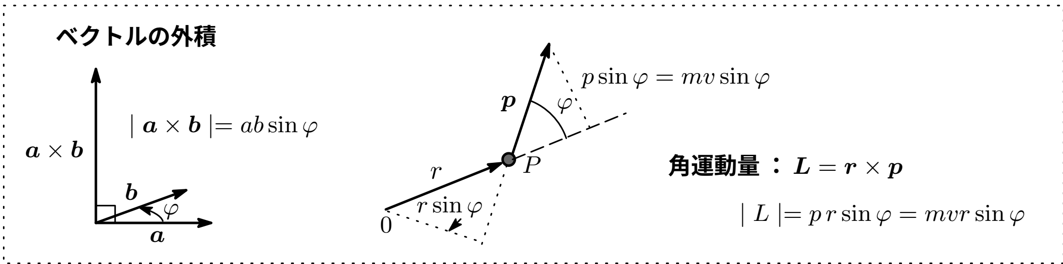
$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}mv_1^2 - G\dfrac{Mm}{r_1} = \dfrac{1}{2}mv_2^2 - G\dfrac{Mm}{r_2} \\ \dfrac{1}{2}r_1v_1 = \dfrac{1}{2}r_2v_2 \end{cases} \longrightarrow v_1 = \frac{4}{5}\sqrt{\frac{GM}{R}} = \frac{4}{5}\sqrt{gR} = 6.3\texttt{km/s},\ v_2 = \frac{1}{4}v_1 = 1.6\texttt{km/s}$$

1.12.5　角運動量

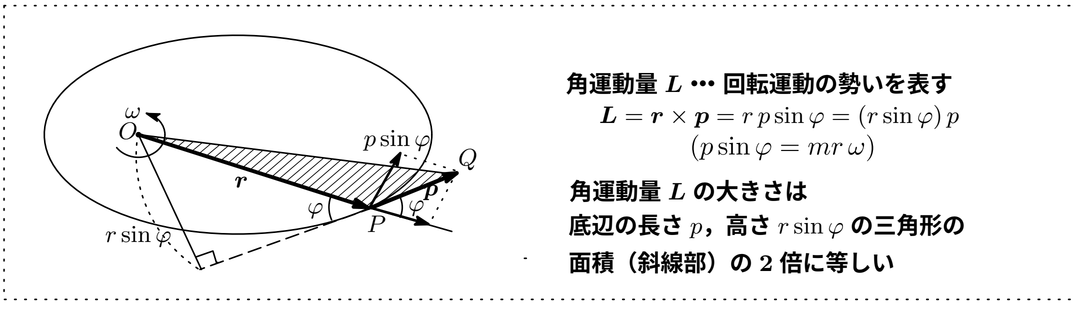
運動量が運動の勢いを表したのと同様，**角運動量**は回転運動の勢いを表します。質点 P が O の回りを回転運動しているとします。質点 P の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$，速度を $\boldsymbol{v}$，の運動量を $\boldsymbol{p}$ とすると角運動量 $\boldsymbol{L}$ は

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} = r\,p\sin\varphi \tag{1.12.3}$$

で定義されます。上の式の掛け算は**ベクトル積（外積）**で，$\boldsymbol{L}$ は“ 大きさ ”と“ 向き ”をもつベクトルで，φ は位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ と運動量ベクトル $\boldsymbol{p}$ のなす角です。ベクトル $\boldsymbol{L}$ の向きは $\boldsymbol{r}$ を $\boldsymbol{p}$ の方へ回したときの右ねじの進む方向です。



角運動量 $\boldsymbol{L}$ の大きさは定義により，運動量 $\boldsymbol{p}$ におろした垂線の長さ $r\sin\varphi$ と運動量の大きさ p の積で，この値は下の図の三角形 OPQ の面積（斜線部）の 2 倍になります。



角運動量の大きさは，角速度 $\boldsymbol{\omega}$ とすると

$$p\sin\varphi = mv\sin\varphi = mr\omega \quad\longrightarrow\quad L = rp\sin\varphi = mrv\sin\varphi = mr^2\omega$$

となります。ここにでてきた mr^2 を**慣性モーメント**といい，記号の I を使います。これを用いると角運動量は

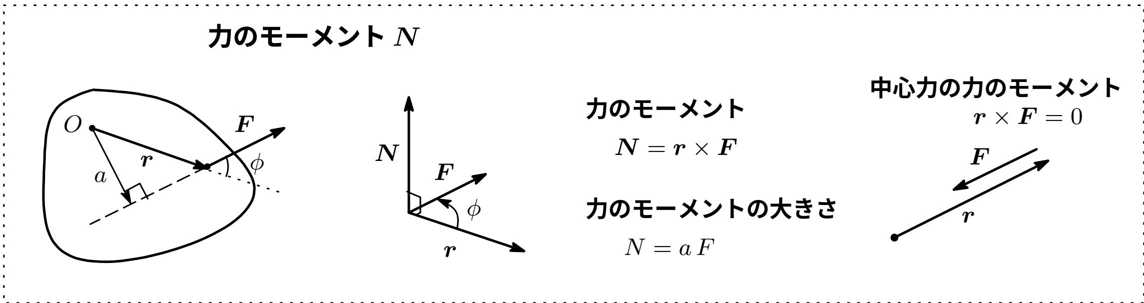
$$\boldsymbol{L} = I\boldsymbol{\omega} \tag{1.12.4}$$

とかけます。この式は後ほど**剛体の運動**のところにでてきますので，詳しい議論はそこでやります。

1.12.6　角運動量保存の法則（面積速度一定の法則）

物体に力 $\boldsymbol{F}$ が働くとき，ある点 O から $\boldsymbol{F}$ の作用線におろした垂線の長さを a とすると，a と F の積を点 O の回りの**力のモーメント**といい，記号の $\boldsymbol{N}$ で表します[45]。$\boldsymbol{N}$ は物体を点 O の回りに回転させる働きです。

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} \tag{1.12.5}$$



角運動量 $\boldsymbol{L}$ は，点 O 回りの運動量のモーメントで $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} = m\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}$ で表されました。この時間変化（Dynamics）を調べてみましょう。$\boldsymbol{L}$ を時間 t で微分すると

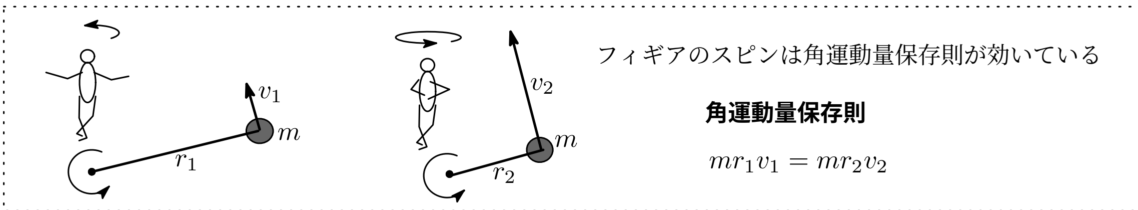
$$\begin{aligned} \frac{d\boldsymbol{L}}{dt} &= m\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \times \boldsymbol{v} + m\boldsymbol{r} \times \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = m\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v} + m\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{a} \\ \therefore \quad \frac{d\boldsymbol{L}}{dt} &= \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} = \boldsymbol{N} \quad (\because \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v} = 0,\, m\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}) \end{aligned}$$

となって，角運動量の時間変化は力のモーメントに等しい ことが分かります。

中心力が働いている場合，中心力 $\boldsymbol{F}$ と位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ の方向は同じ（向きは反対）なので，中心力のモーメントは

$$\boldsymbol{N}_{\text{中心力}} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} = rF\sin\phi = 0 \quad (\because \phi = \pi)$$

となり，中心点回りの角運動量は時間的に変化しない，つまり**中心力の場合，角運動量は保存されます**。フィギアスケートでスピンをする場合，両手を広げてゆっくり回転している人が手をすぼめると回転のスピードが速くなりますが，これは角運動量保存則があるためですね。



■面積速度一定の法則（ケプラーの第 2 法則）

面積速度は動径 OP が掃引する面積 S の変化の速さ dS/dt をいいます。面積速度（ベクトル）を $\boldsymbol{A}$ とすると

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{2}\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}, \quad A = \frac{1}{2}av$$

で定義されます。ここで a は $\boldsymbol{v}$ におろした $\boldsymbol{r}$ の長さです。

さて，図で質点が時間 Δt の間に P から P' へ移動したとします。平均面積速度 $\bar{A}$ は

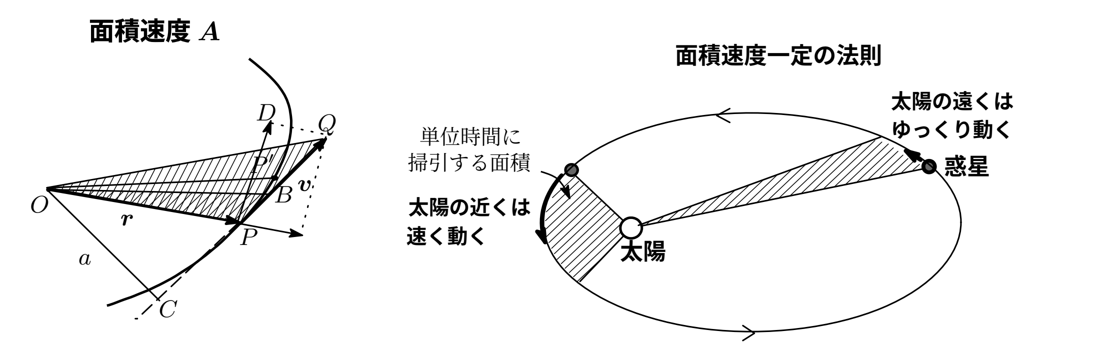
$$\bar{A} = \frac{\text{扇型 } OPP' \text{の面積}}{\Delta t}$$

[45] 回転軸まわりの力のモーメントをトルクともいいます。

で表されます。$\Delta t \to 0$ に近づくにつれて弧 PP' は直線 PB に限りなく近づくので，扇型 OPP' の面積は $\triangle OPB$ の面積に等しくなっていき

$$A = \lim_{\Delta t \to 0} \bar{A} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\text{扇型}\, OPP' \text{の面積}}{\Delta t} = \frac{1}{2} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(PB \times OC)}{\Delta t}$$
$$= \frac{1}{2} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(v\Delta t \times a)}{\Delta t} = \frac{1}{2} va \quad \cdots \triangle\, OPQ \text{ の面積}$$

これは面積速度ベクトルの大きさを示していますね。



$\boldsymbol{A}$ 式に m をかけると

$$m\boldsymbol{A} = \frac{1}{2}\boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v} = \frac{1}{2}\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} = \frac{1}{2}\boldsymbol{L}$$

となり，面積速度は角運動量の 1/2であることが分かります。中心力のもとでは角運動量は保存されるので面積速度も保存されます。つまり

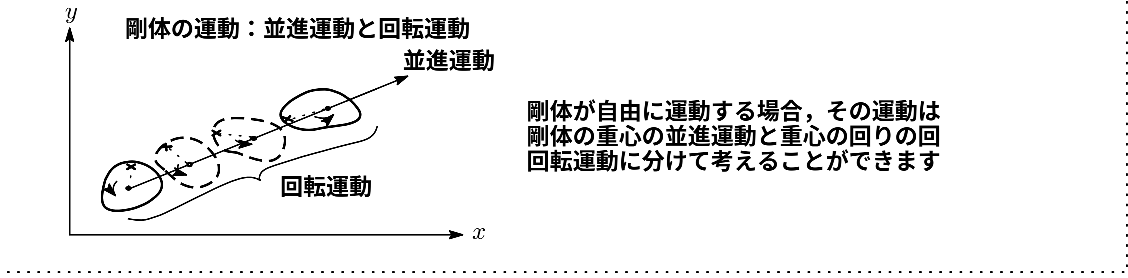
$$\frac{d\boldsymbol{A}}{dt} = \text{一定}$$

となって，ケプラーの第 2 法則がでてきます。

1.13　剛体の力学

1.13.1　剛体とはなに？

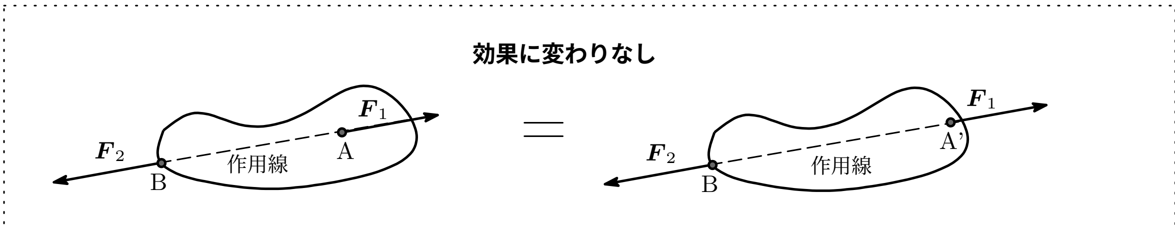
いままでは質量がある一点に集中している質点の運動を調べてきました。ここからは大きさのある物体の運動を調べていきます。ただし，ここで扱う物体は柔らかさゼロで，曲がり，ねじれ，凹み，割れなどが生じず，全く変形しない物体で，これを**剛体**といいます[46]。剛体の質量は**重心**[47]に集中していると考えます。剛体の運動は並進運動と重心回りの回転運動 2 つで記述できます（←質点の運動では並進運動だけを考えればよかった）。



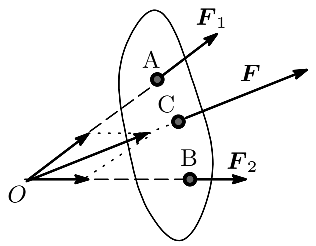
[46] 剛体は「相互間の距離が不変であるような質点の集まりである」と定義することもできます。
[47] 重心というのは物体を一点で支えたときに，ちょうど釣り合う点のことですね。

1.13.2　剛体に働く力

剛体の異なる 2 点（A，B）に働いている 2 つの力 $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F_2}$ が釣り合うための必要十分条件は「**2つの力の作用線が一致し，大ききさは同じで向きが反対である**」ということです。剛体に働く力は，その作用点を作用線上のどこに移してもその効果に変わりはないということで，剛体の力学はここから出発します。



剛体の 2 点 A，B に働く 2 つの力 $\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$ の合力は下図のように合成された力 $\boldsymbol{F}$ となります。



《剛体に働く力の合成》

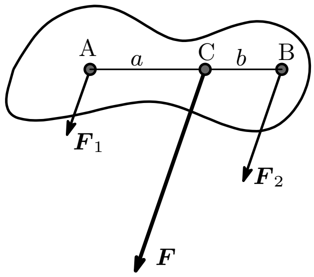
2 点 A，B に働く力 F_1,F_2 の合力は，作用点を作用線の交点 O に移し，それを 2 辺とする平行四辺形の対角線の力をその作用線のある点 C に移した力 F となる。

■剛体における平行2力の合力

(1) 2 力 $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$ の向きが同じ場合

剛体の 2 点 A，B に同じ向きの平行な 2 力 $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F_2}$ が作用している場合，合力 $\boldsymbol{F}$ は，2 力と同じ向きで大きさは 2 力 $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F_2}$ 和となります。また，合力 $\boldsymbol{F}$ の作用点 C は，2 力の作用点を結ぶ線分を 2 力の大きさに反比例するように内分する点となります。

$$\begin{cases} \text{合力：} & \boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 \\ \text{合力の作用点 } C\text{：} & a\,F_1 = b\,F_2 \end{cases}$$



$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2$

合力の作用点の回りの2力のモーメントは等しい …　$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{F_1} = \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{F_2}$（ベクトル積）

$\Longrightarrow$ **2 力は平行なので** $a\,F_1 = b\,F_2$ **と書ける。**

(2) 2 力 $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$ の向きが逆向きの場合（$F_1 < F_2$）

この場合の合力 $\boldsymbol{F}$ は大きい方の力 $\boldsymbol{F}_2$ と同じ向きで，大きさは 2 力の差に等しい。作用点 C では (1) の場合と同様，作用点回りのモーメントが等しくなります。

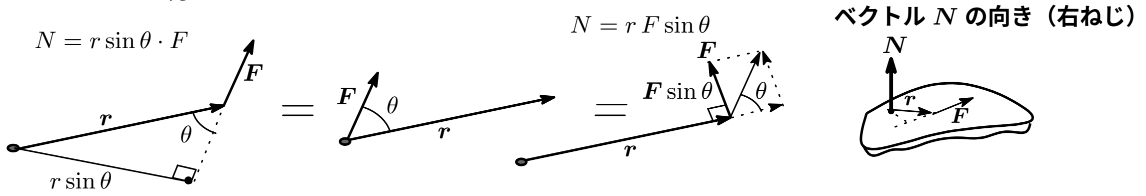
$$\begin{cases} \text{合力：} & \boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_2 - \boldsymbol{F}_1 \\ \text{合力の作用点 } C\text{：} & a\,F_1 = b\,F_2 \end{cases}$$

1.13.3　力のモーメント

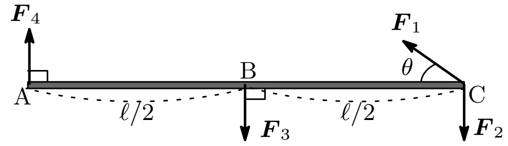
剛体に働く力のモーメントも質点の力学のところで定義した式が使われます。モーメントの大きさは，力の大きさ F と力の作用線と回転中心との距離 d（**腕の長さ**ともいいます）の積 $F\,d$ で表されます。

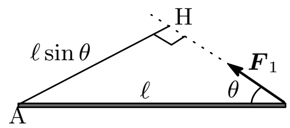
$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}, \qquad N = r\,F\sin\theta$$

力のモーメント：$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$



【問題 23】 長さ ℓ の棒に 4 つの力が働いている。点 A の回りの力のモーメントについて考える。





(1) 力 F_1 の腕の長さはいくらか。
(2) 力 F_4 によるモーメントを求めよ。
(3) モーメントの和を求めよ。

【答】
(1) F_1 の作用線を引いて A から垂線 AH を下ろしたその長さが腕の長さになります。AH$=\ell\sin\theta$
(2) A を回転軸としているので腕の長さは 0。回転軸そのものを引っぱっても回転しないですね。つまりモーメントは 0 です。
(3) F_1 のモーメント：$F_1\ell\sin\theta$,　F_2のモーメント：$-F_2\ell$(向きが反対)，　F_3のモーメント：$-F_3\times(1/2)\ell$（向きが反対）となるので，モーメントの和は $F_1\ell\sin\theta - F_2\ell - \frac{1}{2}F_3\ell = \left(F_1\sin\theta - F_2 - \frac{1}{2}F_3\right)\ell$

1.13.4　剛体の釣り合い

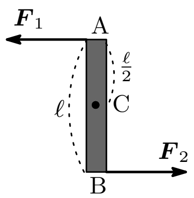
剛体に働く力を $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \cdots, \boldsymbol{F}_n$ とし，これらの力によるモーメントを $\boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{N}_2, \cdots, \boldsymbol{N}_n$ とすると，剛体の釣り合いの条件としては，動かない，かつ回転しないということで，

(1) 動かない：力の合力が 0。　$\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \cdots + \boldsymbol{F}_n = 0$

(2) 回転しない：任意の 1 点の回りの各力のモーメントの総和が 0。　$\boldsymbol{N}_1 + \boldsymbol{N}_2 + \cdots + \boldsymbol{N}_n = 0$

注意すべきは，合力が 0 でも回転運動する場合があります。剛体を回転させる“ 対となる力 ”を**偶力**といいます。偶力は，(1)1 直線状にない，(2) 大きさが等しい，(3) 平行で向きは正反対という対の力です。

《合力がゼロでもモーメントの総和がゼロでないケース》



このような力を「**偶力**」といいます

・$\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$ は大きさ同じ (F) で向きが正反対：合力は 0

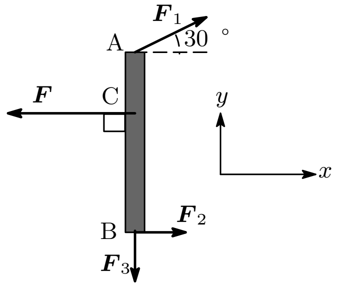
・モーメントの総和は回転中心をどこに選んでも $\ell F \neq 0$ となる

A の回りのモーメント：ℓF

B の回りのモーメント：ℓF

C の回りのモーメント：$\frac{\ell}{2}F + \frac{\ell}{2}F = \ell F$

【問題 24】 水平面に置かれた長さ ℓ の棒 AB に下図のような力が働いて釣り合っている。AC= $\frac{\ell}{3}$ の点 C に働く力の大きさを F とすると，他の 3 つの力の大きさ F_1, F_2, F_3 を求めよ。



釣り合いの条件
(1) 合力が 0
(2) 任意の回転中心点でのモーメントの総和が 0

【答】 力の釣り合いを考えます。力を x, y 成分に分けてそれぞれの釣り合いの式より

$$\begin{cases} x \text{ 成分：} & F_1 \cos 30\ ^\circ + F_2 - F = 0 \\ y \text{ 成分：} & F_1 \sin 30\ ^\circ - F_3 = 0 \end{cases}$$

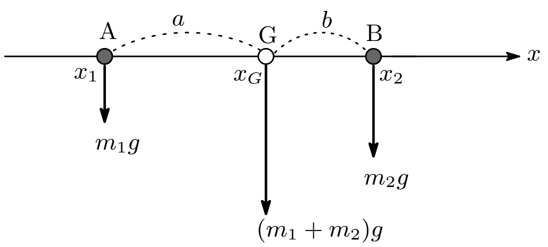
次ぎにモーメントの釣り合いを考えます。釣り合い条件は回転中心をどこにとってもその回りのモーメントの和は 0 ということなので，目視により点 B の回りのモーメントの和を 0 とすると

$$-\ell F_1 \cos 30\ ^\circ + \frac{2}{3}\ell F = 0$$

これらの式より $F_1 = \frac{4\sqrt{3}}{9}F$, $F_2 = \frac{1}{3}F$, $F_3 = \frac{2\sqrt{3}}{9}F$ と求まります。

1.13.5 剛体の重心

重心というのは物体の重さがその１点（重心）に集中しているとみなせる点のことで，重心を支えると物体は釣り合うことになります[48]。いい方を変えると，**物体の各部分に働く重力の合力の作用点が重心**ということになります。そのような重心の位置はどのように求めることができるのでしょうか。簡単のために，図のように x 軸上の 2 点 A，B に質量が m_1, m_2 のの質点がある場合の重心の位置を求めます。



《重心》

A に働く重力は m_1g **で B に働く重力は** m_2g
この“ 2 つの力の合力 ”の作用点を G とすると
G には $(m_1 + m_2)g$ **の重力が作用している**

重心 G の回りのモーメントは 0（釣り合いの条件）ですから $a \cdot m_1g - b \cdot m_2g = 0$ が成り立ち，これから $a : b = m_2 : m_1$ が得られます。また，$a = x_G - x_1$, $b = x_2 - x_G$ なので，これから重心の位置 x_G は

$$x_G = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}$$

と求めることができます。今は簡単のため x 軸上に位置する 2 質点を考えましたが，一般に A(x_1, y_1), B(x_2, y_2) に位置する場合の重心の座標を求めてみます。上でやったように G の回りのモーメントの釣り合いから重心 G の x 座標はすぐ求まりますが，ここでは重心の座標を幾何学的に求めていくことにします（下図を参照ください）。上で得られた関係式 $a : b = m_2 : m_1$ と三角形の相似条件より

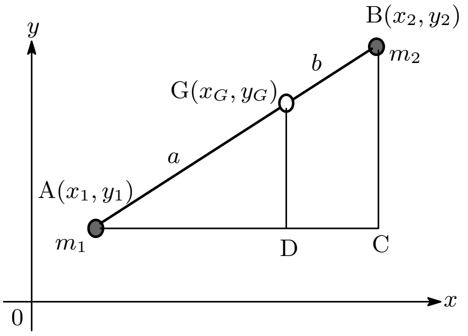
$$\begin{cases} a : b = m_1 : m_2 & \longrightarrow \quad b = \frac{m_1}{m_2} \\ \triangle\,\mathtt{ABC} \backsim \triangle\,\mathtt{AGB} & \longrightarrow \quad a : (a + b) = AD : AC = GD : BC \end{cases}$$

[48] 多数の質点からなる剛体を考える場合，重心は質量中心となります。

が得られます。AD= $x_G - x_1$, AC= $x_2 - x_1$, GD= $yG - y_1$, BC= $y_2 - y_1$ を上の式に入れて整理すると

$$x_G = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}, \quad y_G = \frac{m_1y_1 + m_2y_2}{m_1 + m_2}$$

と重心の座標が求まります。



$a : b = m_1 : m_2 \longrightarrow b = (m_1/m_2)a$

△ ABC ∽△ AGD **なので**

$a : (a + b) = AD : AC = GD : BC$

$(AD = x_G - x_1,\ AC = x_2 - x_1)$

$(GD = y_G - y_1,\ BC = y_2 - y_1)$

$$x_G = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}$$

$$y_G = \frac{m_1y_1 + m_2y_2}{m_1 + m_2}$$

多数の質点（n 個）が分布している剛体の重心は座標は上の式を拡張すればよいので次のようになります。

$$x_G = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \cdots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + \cdots m_n}, \quad y_G = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + \cdots m_ny_n}{m_1 + m_2 + \cdots m_n}$$

質点が 3 次元的に連続分布している剛体の重心は，ρ を密度とすると微小部分の質量は $dm = \rho dV$ となるので，次の積分形で与えられます。

$$x_G = \frac{\int x\rho dV}{\int \rho dV}, \quad y_G = \frac{\int y\rho dV}{\int \rho dV}, \quad z_G = \frac{\int z\rho dV}{\int \rho dV}$$

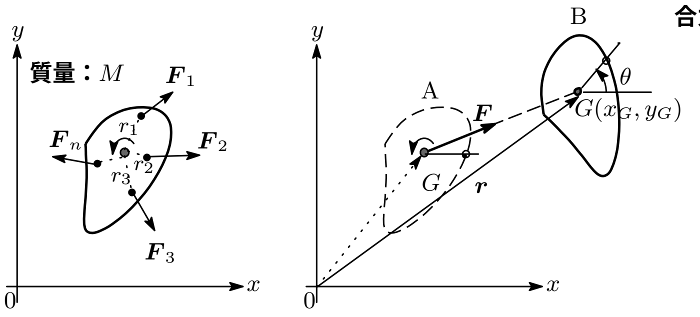
1.14 剛体の運動

1.14.1 剛体の運動方程式

剛体の平面運動は，並進運動と回転運動で構成されます。並進運動は重心を質点とみなした質点の運動方程式であらわされ,，回転運動は重心を回転中心とした角運動量 $\boldsymbol{L}$ の運動方程式[49]で表されます。剛体の質量を M，重心の座標を $G(x_G, y_G)$，位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$ とし，剛体に働く外力の合力を $\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \cdots \boldsymbol{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i$，力のモーメントの総和を $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{N}_1 + \boldsymbol{N}_2 + \cdots + \boldsymbol{N}_n = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{N}_i$ とすると，剛体の平面運動の方程式は次式で与えられます。

$$\left\{\begin{array}{ll}
\textbf{重心の運動方程式}: & M\dfrac{d^2x_G}{dt^2} = (F_{1x} + F_{2x} + \cdots + F_{nx}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} F_{ix} \\
 & M\dfrac{d^2y_G}{dt^2} = (F_{1y} + F_{2y} + \cdots + F_{ny}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} F_{iy} \\
\Longrightarrow & M\dfrac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{F} \\
\textbf{角運動量の方程式}: & \dfrac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{N}
\end{array}\right. \tag{1.14.1}$$

[49] セクション 1.12.6「角運動量保存の法則」参照



合力 $\boldsymbol{F}$ の方向に回転しながら進む

合力：$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \cdots + \boldsymbol{F}_n$

回転角：θ　　**角速度**：$\omega = d\theta/dt$

《剛体の運動方程式》

$$M\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \boldsymbol{F}$$

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{N}$$

1.14.2　回転の運動方程式と慣性モーメント

ある固定軸の周りに剛体が回転運動する場合を考えます。剛体の回転運動の方程式は，角運動量を $\boldsymbol{L}$，モーメントを $\boldsymbol{N}$ とすると

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \boldsymbol{N} \tag{1.14.2}$$

角運動量 $\boldsymbol{L}$ は，慣性モーメントを I，角速度 $\boldsymbol{\omega}$ とすると

$$\boldsymbol{L} = I\boldsymbol{\omega} \tag{1.14.3}$$

式（1.14.3）を（1.14.2）に入れると I は定数なので

$$I\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \boldsymbol{N} \tag{1.14.4}$$

となります。この式とニュートンの運動方程式

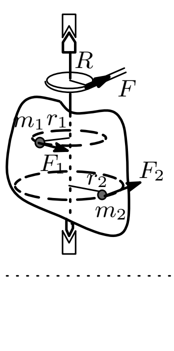
$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{F}$$

を比較すると，$\boldsymbol{N}$ は $\boldsymbol{F}$ に相当し，I は慣性の大きさを示す質量 m に対応することが分かります。この比較から，**慣性モーメント**は慣性質量に相当するもので，回転に対する慣性の大きさ，いい換えると回転のしにくさを表す量ということになります。

回転軸から距離 r は慣れている質量 m の慣性モーメントは $I = mr^2$ でした。いま，回転軸から距離 $r_1, r_2, \cdots, r_n$ にある質量 $m_1, m_2, \cdots, m_n$ の質点系よりなる剛体の慣性モーメント I は，個々の質点の慣性モーメントの和で与えられ

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \cdots + m_n r_n^2 = \sum_{i=1}^{n} m_n r_n^2 \tag{1.14.5}$$

となります。



《力のモーメント》

$$N = RF$$
$$r_1F_1 + r_2F_2 + \cdots + r_nF_n = \sum_{i=1}^{n} r_iF_i = N$$

《慣性モーメント》

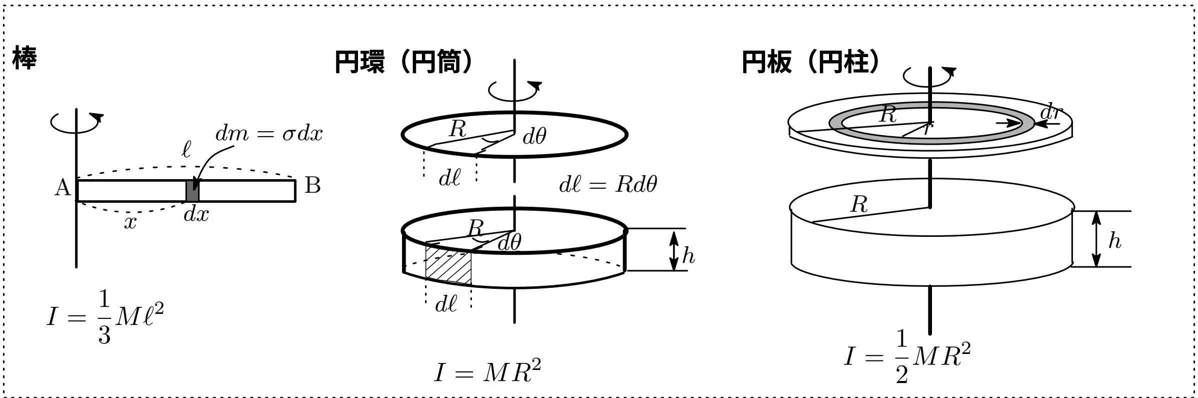
$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \cdots + m_n r_n^2 = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$$

■種々の剛体の慣性モーメント　代表的な剛体として棒，円環（円筒），円盤（円柱）の慣性モーメントを求めます。これらは質点が密に詰まった連続体とみなせますから，慣性モーメントの定義式 $I = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$ で $\sum$ を積分 $\int$ に置き換えたものとなります。

(1) 質量 M，長さ ℓ の棒　　$I = \frac{1}{3}M\ell^2$

棒の線密度（単位長さ辺りの質量）を σ とします。回転軸から距離 x 離れたところに dx の微小部分を考えます（ただし棒の厚さは無視）。その部分の質量 dm は $dm = \sigma dx$ となります。その微小部分の慣性モーメントは $dm \cdot x^2 = \sigma dx \cdot x^2$ となるので，棒の慣性モーメントは距離 x を端 A（$x = 0$）から端 B（$x = \ell$）まで微小部分の慣性モーメントを加え合わせればよいので積分します。

$$I = \int_0^\ell \sigma dx \cdot x^2 = \sigma \int_0^\ell x^2 dx = \sigma \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^\ell = \frac{1}{3}\sigma\ell^3 = \frac{1}{3}M\ell^2 \quad (\because\ \sigma\ell = M) \tag{1.14.6}$$



(2) 質量 M，半径 R の円環（円筒）　　$I = MR^2$

円環の線密度を σ とします（円環の厚みは無視）。回転軸から距離 R 離れた円環部の微小長さ $d\ell$ の質量は $\sigma d\ell$ となります。微小部分の慣性モーメントは $mR^2 = \sigma d\ell \cdot R^2$ となるので，円環の慣性モーメントは円環部全周にわたって微小部分の慣性モーメントを加え合わせればよいので積分します。ところで $d\ell = Rd\theta$ なので

$$I_{\text{円環}} = \int_{\text{全周}} \sigma d\ell \cdot R^2 = \sigma \int_0^{2\pi} R^2 \cdot Rd\theta = \sigma R^3 \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi\sigma R^3 = MR^2 \quad (\because\ 2\pi\sigma R = M) \tag{1.14.7}$$

また，円筒の場合は，半径 R の円環を高さを h まで積み上げたものですから面密度を σ とすると，

$$I_{\text{円筒}} = 2\pi\sigma R^3 \cdot h = MR^2 \quad (\because\ 2\pi\sigma Rh = M) \tag{1.14.8}$$

(3) 質量 M，半径 R の円板（円柱）　　$I = \frac{1}{2}MR^2$

円環の慣性モーメントは上で求めました。円板は同心の円環を寄せ集めたものですので，円板の慣性モーメントは円環の慣性モーメントを加え合わせればよいので積分したものとなります。 円板の面密度を σ とします。回転軸から距離 r 離れた幅 dr の円環の面積は，半径 $r + dr$ の円板の面積から半径 r の円板の面積を引けばよいので

$$\pi(r + dr)^2 - \pi r^2 = \pi r^2 + 2\pi r dr + (dr)^2 - \pi r^2 \fallingdotseq 2\pi r dr$$

ここで $(dr)^2$ は微少量を 2 乗したものなのでほとんどゼロとして無視します。円環の質量 m は $m = 2\pi\sigma r dr$ となります。したがって円環の慣性モーメントは上で得られた式 $I = MR^2$ に $M = 2\pi\sigma r dr$, $R = r$ を入れてやればよいので

$$I_{\text{円環}} = (2\pi\sigma r dr)r^2 = 2\pi\sigma r^3 dr$$

となります。円板の慣性モーメントは半径 $r = 0$ から $r = R$ までの同心円の円環の慣性モーメントを加え合わせたもの，つまり積分すればよいので，求める慣性モーメントは

$$I_{\text{円板}} = \int_0^R 2\pi\sigma r^3 dr = 2\pi\sigma \left[\frac{1}{4}r^4\right]_0^R = 2\pi\sigma \times \frac{1}{4}R^4 = \frac{1}{2}MR^2 \quad (\because\ M = \pi\sigma R^2) \tag{1.14.9}$$

円柱の慣性モーメントは円板の慣性モーメントを加え合わせたものなので，（2）の場合と同様に考えて

$$I_{\text{円柱}} = 2\pi\sigma \times \frac{1}{4}R^4 \times h = \frac{1}{2}MR^2 \quad (\because\ M = \pi\sigma R^2 h) \tag{1.14.10}$$

さて，円環（円筒）と円板（円柱）の慣性モーメントを比較すると，円環（円柱）の方が大きいことに留意してください。円環（円筒）と円板（円柱）が同じ質量とすると，円環（円筒）は質量が円周部に存在するために慣性モーメントが大きくなるのですね。

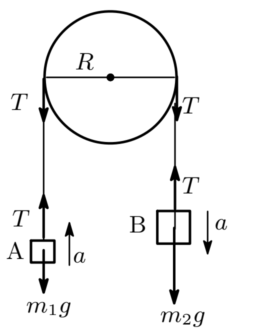
【問題 25】 水平な軸の回りに回転できる，慣性モーメント I，半径 R の定滑車に糸をかけ，質量 m_1, m_2 $(m_1 < m_2)$ の重り A，B を吊るしたときの

(1) 定滑車の質量を無視した場合（定滑車の慣性モーメントは 0）の重りの加速度 a をもとめよ。

(2) 滑車が質量 M の均質な円板で，慣性モーメントが $I = \frac{1}{2}MR^2$ である場合，重りの加速度 a を求めよ。

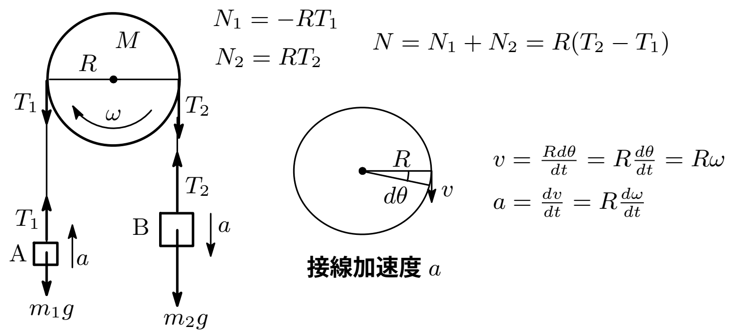
(3) (2) の場合，はじめ静止していた重り B が高さ h だけ下がったときの滑車の角速度 ω を求めよ。

[**滑車の質量が無視できる場合**]



A,B での糸の張力は等しい

[**滑車の質量が M の場合**]



【答】

(1) 滑車の質量が無視できるとします。$m_1 < m_2$ なので，重り A は上向き，重り B は下向きの加速度を持ちます。重力加速度を g とし，A，B の糸の張力は大きさが等しく それを T とします。鉛直上方を正の方向にとると重り A，B の運動方程式は

$$\begin{cases} A: & m_1 a = T - m_1 g \\ B: & -m_2 a = T - m_2 g \end{cases}$$

これから加速度 a は

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g$$

(2) 滑車の質量を M，慣性モーメントを $I = \frac{1}{2}MR^2$ とします。滑車は質量を持つので，A 側，B 側の糸の張力は異なります。重り A の糸の張力を T_1，重り B の糸の張力を T_2 とすると，滑車には重り A により RT_1 の力のモーメントが，また，重り B の糸の張力 T_2 により RT_2 の力のモーメントが働きます。時計回りを正とすると，この 2 つの合モーメント $N = RT_2 - RT_1$ が滑車に角加速度 $\frac{d\omega}{dt}$ を与えることになります。

$$\text{重りの運動方程式} \quad \begin{cases} A: & m_1 a = T_1 - m_1 g \\ B: & -m_2 a = T_2 - m_2 g \end{cases}$$

重りの加速度 a は滑車の周上の接線加速度に等しいので

$$a = R\frac{d\omega}{dt}$$

また，滑車の回転運動方程式は（1.14.4）より

$$I\frac{d\omega}{dt} = N = R(T_2 - T_1)$$

以上の式より加速度 a は

$$a = \frac{R^2(m_2 - m_1)g}{I + R^2(m_2 + m_1)} = \frac{m_2 - m_1}{\frac{I}{R^2} + m_1 + m_2}g$$

と求まります。滑車の慣性モーメント $I = \frac{1}{2}MR^2$ を上式に入れると加速度は

$$a = \frac{m_2 - m_1}{\frac{1}{2}M + m_1 + m_2}$$

となり，滑車の質量 M が分母に登場したことに注目ください。
(3) 静止していた重り B が高さ h だけ下がったときの B の速度を v とします。加速度を a として等加速度直線運動の関係式より

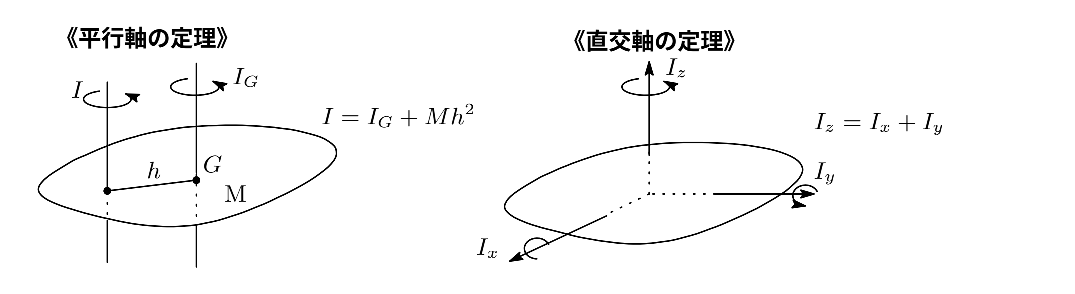
$$v^2 - v_0^2 = 2ah \longrightarrow v = \sqrt{2ah} \quad (v_0 = 0)$$

また，$v = R\omega$ なので

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{\sqrt{2ah}}{R} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{2(m_2 - m_1)gh}{(1/2)M + m_1 + m_2}}$$

1.14.3　平行軸，直交軸の定理

慣性モーメントは回転軸の位置，軸の方向により異なる値を持ちます。このことに関して次の 2 つの重要な定理を証明なしに紹介しておきます。



- **平行軸の定理：** 平行軸重心 G を通るある軸に関する慣性モーメントを I_G とし，この軸に平行でこれと距離 h にある軸に関する慣性モーメント I は

$$I = I_G + Mh^2$$

  で与えられる。平行軸の定理より，重心を通る軸の回りの慣性モーメントが最も小さくなること，つまり最も回転を変化させやすいことがわかります。

- **直交軸の定理：** x, y, z 軸回りの慣性モーメントをそれぞれ I_x, I_y, I_z とすると

$$I_z = I_x + I_y$$

  が成り立つ。

【問題 26】 長さ ℓ，質量 M の棒に垂直な重心回りの慣性モーメントを求めよ。

【答】直交軸の定理を使います。棒の端の慣性モーメントを I，重心回りの慣性モーメントを I_G とすると

$$I = I_G + M\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \longrightarrow \quad I_G = I - M\left(\frac{\ell}{2}\right)^2$$

$I = (1/3)M\ell^2$ を上式して $I_G = (1/12)M\ell^2$

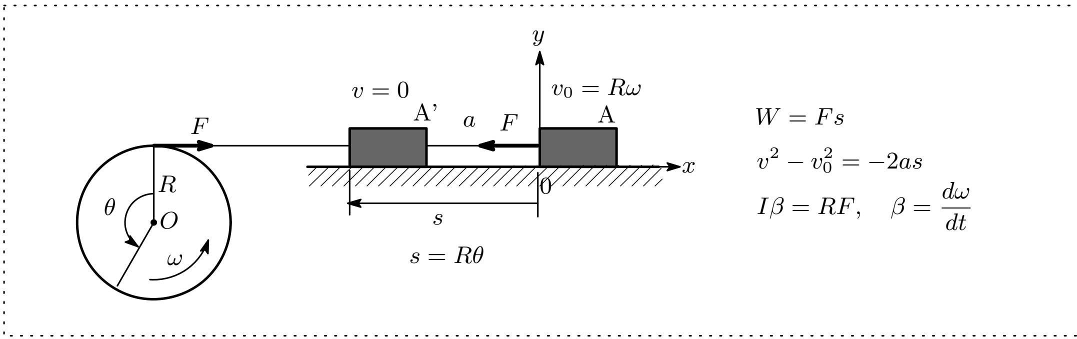
1.14.4 回転運動のエネルギーとエネルギー保存則

■回転運動のエネルギー

ある軸の回りに角速度 ω で回転している滑車があるとします。滑車の慣性モーメントを I とすると，この滑車は止まるまでに

$$W = \frac{1}{2}I\omega^2 \tag{1.14.11}$$

の仕事をすることができます。



平面の座標軸を図のようにとります。滑車が反時計回りに回りながら，角速度 ω から止まるまでに机面上の物体 A を糸で引き，力 F を加えながら距離 s 動かしたとします。このとき滑車のなした仕事 W は

$$W = F\,s$$

止まるまでに回転した角を θ とすると

$$s = R\,\theta \longrightarrow W = FR\theta$$

物体 A の加速度 a は $a = R\frac{d\omega}{dt} = R\beta$，初速度を v_0 とすると $v_0 = R\,\omega$，物体 A は止まるまでに距離 s 動いたのだから，等加速度直線運動の公式より $0^2 - v_0^2 = -2as$。これに上の関係式を入れると

$$0^2 - v_0^2 = -2as \longrightarrow -(R\omega)^2 = -2R\beta s = -2R^2\beta\theta \longrightarrow \frac{1}{2}\omega^2 = \beta\theta$$

が得られます。滑車の回転運動方程式は，滑車にかかる力のモーメントが $N = R\,F$ なので

$$I\frac{d\omega}{dt} = I\beta = RF \longrightarrow F = \frac{I\beta}{R} \tag{1.14.12}$$

仕事 W はしたがって

$$W = FR\theta = I\beta\theta = \frac{1}{2}I\omega^2$$

となります。この仕事は，回転体（滑車）が止まるまでになし得る仕事なので，回転運動のエネルギー E_r を示しています[50]ということで，ある軸の回りを角速度 ω で回転している慣性モーメント I の剛体の回転運動エネルギーは

$$E_r = \frac{1}{2}I\omega^2 \tag{1.14.13}$$

で与えられることになります。

[50] E_r の下付き文字 r は回転 rotate の r からきています。

■力学的エネルギー保存則

剛体の運動は並進運動と回転運動で記述できることを学習しました。速度 v で並進運動し，ある軸の回りに角速度 ω で回転運動している**剛体の運動エネルギー**E_k は**並進運動のエネルギー**$E_t=\frac{1}{2}mv^2$ と**回転運動のエネルギー**$E_r=\frac{1}{2}I\omega^2$ の和となります。

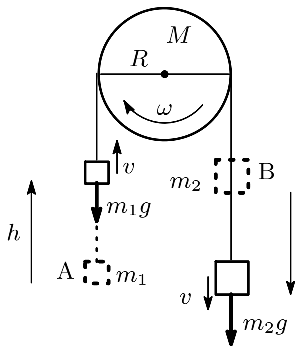
$$E_k=E_t+E_r=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}I\omega^2 \tag{1.14.14}$$

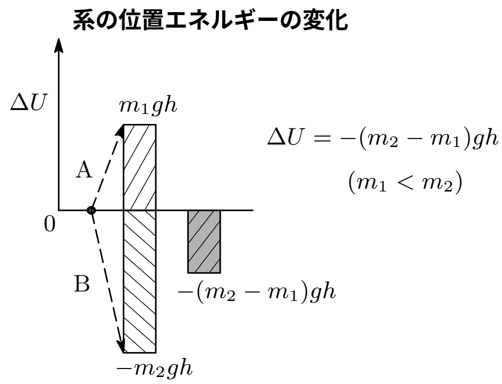
そして 剛体の運動エネルギー E_k と位置エネルギー U の和は一定 で力学的エネルギー保存則が成り立ちます。

$$E_k+U=一定 \tag{1.14.15}$$

これは，位置エネルギー U が減ればその分運動エネルギー E_k が増えるし，逆に位置エネルギー U が増えればその分運動エネルギー E_k が減ることを意味しています。つまり互いに変換しあう関係になっているのですね。それでは剛体の力学的エネルギー保存則を使って先ほどの例題を解いてみることにしましょう。

【問題 27】 水平な軸の回りに回転できる，慣性モーメント I，半径 R の定滑車に糸をかけ，質量 m_1, m_2 ($m_1<m_2$) の重り A，B を吊るし静かに手を離した。はじめ静止していた重り B が高さ h だけ下がったときの滑車の角速度 ω を求めよ。





【答】 重り A，B と定滑車を含めた全体を**一つの力学系**と考えます。そしてこの系で力学的エネルギー保存則を適用します。重り B が h だけ下がったときの A，B の速さを v とします。系の位置エネルギーの変化 ΔU を調べると

$$\left\{\begin{array}{ll} A\text{の位置エネルギー：} & \Delta U_A=m_1gh \\ B\text{の位置エネルギー：} & \Delta U_B=-m_2gh \end{array}\right. \longrightarrow \Delta U=\Delta U_A+\Delta U_B=-(m_2-m_1)gh$$

となります。一方，運動エネルギーの変化 ΔE は

$$\left\{\begin{array}{ll} A\text{の運動エネルギー：} & \Delta E_{kA}=\frac{1}{2}m_1v^2 \\ B\text{の運動エネルギー：} & \Delta E_{kB}=\frac{1}{2}m_2v^2 \\ \text{定滑車の運動エネルギー：} & \Delta E_r=\frac{1}{2}I\omega^2 \end{array}\right. \longrightarrow \Delta E_k=\frac{1}{2}(m_1+m_2)v^2+\frac{1}{2}I\omega^2$$

力学的エネルギー保存則より，系の全エネルギーの変化分（ΔE）はゼロにならなければならないので

$$\Delta E=\Delta U+\Delta E_k=-(m_2-m_1)gh+\frac{1}{2}(m_1+m_2)v^2+\frac{1}{2}I\omega^2=0$$

が成り立ちます。$v=R\omega, I=\frac{1}{2}MR^2$ を上の式に入れて整理すると

$$\frac{1}{2}R^2\omega^2\left(m_1+m_2+\frac{1}{2}M\right)=(m_2-m_1)gh \longrightarrow \omega=\frac{1}{R}\sqrt{\frac{2(m_2-m_1)gh}{(1/2)M+m_1+m_2}}$$

と得られます。以上，保存則を活用すると比較的楽に解けるケースでした。

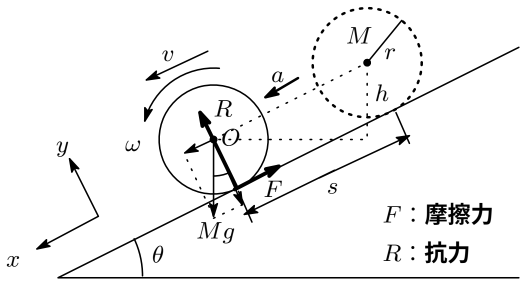
それではこのセクションの最後として次の剛体運動の問題に取り組んでみます。

【問題 28】 傾斜 θ の斜面上を半径 r，質量 M，中心軸の回りの慣性モーメント I の円柱あるいは円筒が最大傾斜線に沿って転がり落ちるとき，次の質問に答えよ。

(1) 中空の円筒で $I = Mr^2$ の場合

(2) 均質の円柱で $I = \frac{1}{2}Mr^2$ の場合

の加速度 a を求め，大小を比較しその理由を述べよ。また，静止位置から高さ h 下りたときの速度 v を求めよ。



並進運動の方程式 (x)**：**$Ma = Mg\sin\theta - F$

並進運動の方程式 (y)**：**$0 = R - Mg\cos\theta$

回転運動の方程式：$I\beta = rF, \quad \beta = \dfrac{d\omega}{dt}$

加速度：$a = r\beta$

【答】 円柱（円筒）は斜面との摩擦力 F により斜面上を転がり落ちます[51]。円柱（円筒）に働く力を図示すると上図のようになり，R は斜面から受ける抗力とします。中心点 O の並進運動の方程式は，加速度を a として

$$\begin{cases} x\text{ 方向：} & Ma = Mg\sin\theta - F \\ y\text{ 方向：} & 0 = R - Mg\cos\theta \end{cases}$$

次ぎに円柱（円筒）の回転運動の方程式は，慣性モーメントを I，角速度を ω とすると，円柱（円筒）は摩擦力 F による力のモーメント (rF) が働いているので

$$I\beta = rF\,, \quad \beta = \frac{d\omega}{dt}$$

また，加速度 a と角速度の関係は

$$a = r\beta$$

なので，これらの式より a を求めると

$$a = \frac{Mgr^2\sin\theta}{Mr^2 + I}$$

が得られます。中空の円筒，均質の円柱の慣性モーメントを入れると

(1) 中空の円筒で $I = Mr^2$ の場合，$a_1 = \frac{1}{2}g\sin\theta$

(2) 均質の円柱で $I = \frac{1}{2}Mr^2$ の場合，$a_2 = \frac{2}{3}g\sin\theta$

が得られます。加速度の大小は $a_1 < a_2$ で，円筒の方の加速度が小さくなります。これは，円筒と円柱の質量が同じ場合，円筒の慣性モーメントは円柱より大きくなり，$I\beta = rF$ の関係から β が小さくなり，$a = r\beta$ より加速度が小さくなることがその要因です。
静止位置から h 下がったとき，斜面上では距離 s 進んだとすると $h = s\sin\theta$ そのときの速さを v とすると

$$\begin{cases} \text{円筒：} & v_1^2 = 2a_1 s \longrightarrow v_1 = \sqrt{gh} \\ \text{円柱：} & v_2^2 = 2a_2 s \longrightarrow v_2 = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{gh} \end{cases}$$

[51] 摩擦力がなければ斜面上を転がらずに滑り落ちる。

【問題 29】 スケートのスピンで手を広げ足を開いた状態から手を真上に上げて伸ばし，足をせばめた状態にしたところ，慣性モーメントは $1/n$ $(n>1)$ になったという。次の問いに答えよ。

(1) 回転の角速度は何倍になるか

(2) 回転運動のエネルギーは何倍になるか

【答】

(1) 手足を開いたときの慣性モーメントを I_1，角速度を ω_1，体を真っ直ぐにしたときの慣性モーメントを I_2，角速度を ω_2 とすると，題意より $I_2/I_1 = 1/n$。角運動量保存則より $I_1\omega_1 = I_2\omega_2$ なので

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{I_1}{I_2} = n$$

(2) 回転の運動エネルギーを E_1, E_2 とすると

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{(1/2)I_2\omega_2^2}{(1/2)I_1\omega_1^2} = n$$

1.15 滑車

1.15.1 定滑車と動滑車

固定されている滑車を**定滑車**，ロープを動かすと連動して動く滑車を**動滑車**といいます。定滑車は力の向きを変え，動滑車は小さな力で重いものを移動させることができます。

■定滑車

重さ W の物体を持ち上げる力を P とすると，固定点 O 回りのモーメントの釣り合いの式より

$$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{P} = \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{W} \longrightarrow P = W$$

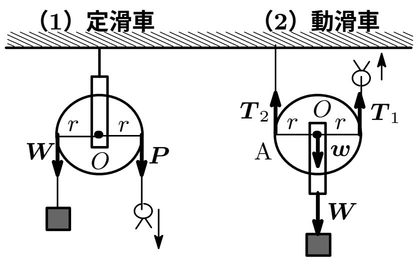
で，力の大きさは変わらないが向きが変る。

■動滑車

滑車の重さを w，引き上げるに要する力を T_1 とすると，点 A の回りのモーメントの釣り合いの式より

$$2\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{T}_1 - \boldsymbol{r}\cdot(\boldsymbol{w}+\boldsymbol{W}) \longrightarrow T_1 = \frac{1}{2}(w+W)$$

これから，引き上げる力は総重量の半分になることがわかります[52]。



モーメントの釣り合いの式

(1) O 点回り：$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{W} = \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{P} \longrightarrow W = P$

(2) A 点回り：$\boldsymbol{2r}\cdot\boldsymbol{T} - \boldsymbol{r}\cdot(\boldsymbol{w}+\boldsymbol{W}) \longrightarrow T = \frac{1}{2}(w+W)$

連続している綱の張力はどの部分においても等しい

$T_1 = T_2 = T$

別解として，力の釣り合いを考えると，連続している綱の張力はどの部分においても等しいので，$T_1 = T_2 = T$ とおいて

$$2T - (w+W) = 0 \longrightarrow T = \frac{1}{2}(w+W)$$

by $\mathscr{KENZOU}$

（了）

[52] 重りを高さ h 引き上げるにのに動滑車の場合は $2h$ 牽引する必要があり，引っぱる力は半分になっても距離は 2 倍になるので，定滑車の場合と仕事の増減はありません。