

社会人のための楽しい物理入門

第3章：波動・音波・光波（1）

HENLOU

2009年9月24日

目次

第3章 波動・音波・光波	4
3.1 波動	4
3.1.1 単振動	4
3.1.2 波動	4
3.1.3 波の方程式（波動関数）	5
媒質の各点の運動の方向と速さ	6
波動関数	6
3.1.4 重ね合わせの原理	7
3.1.5 波の干渉	7
3.1.6 うなり	9
3.1.7 定在波	10
3.2 弦と気柱の振動	13
3.2.1 弦の振動	13
弦を伝える波の速さ	14
3.2.2 気柱の振動	16
(1) 閉管での気柱の振動	16
(2) 開管での気柱の振動	17
3.3 音波の振動数と音の強さ	18
(1) 音波の振動数	18
(2) 音の強さ	18
3.4 ドップラー効果	18
3.4.1 音源が近づく／遠ざかる場合のドップラー効果	19
(1) 音源が一定の速さで近づく場合のドップラー効果	19
(2) 音源が一定の速さで遠ざかる場合のドップラー効果	20
3.4.2 音源も観測者も共に動いている場合のドップラー効果	21
(1) 観測者が動く音源の前を走っている場合のドップラー効果	21
(2) 動く音源を観測者が追いかける場合のドップラー効果	22
(3) その他のケースのドップラー効果	22
3.4.3 斜めドップラー効果	23
その他備考	24
3.5 波の回折・反射と屈折	25
3.5.1 波の進行方向と波面	25
3.5.2 ホイヘンスの原理	25
波の回折	26
波の反射と屈折	27
波の全反射	29
3.6 光の反射と屈折	29
3.6.1 絶対屈折率	30
3.6.2 光の反射と屈折	30
屈折光線の逆進	30

	累屈折	30
	全反射と臨界角	31
3.6.3	フェルマーの原理	31
	光路長	32
	フェルマーの原理とスネルの法則	32
3.6.4	像の浮き上がり	33
3.7	光の干渉と回折	33
3.7.1	光の反射と位相の変化	33
3.7.2	薄膜による光の干渉	34
	光の干渉条件	34
	ニュートン・リング	35
3.7.3	グリマルディの実験	36
3.7.4	2つの細隙で回折した光の干渉	36
3.8	光の偏り (偏光)	37
3.8.1	反射による偏光	38
3.9	光のドップラー効果	38

第3章 波動・音波・光波

3.1 波動

3.1.1 単振動

単振動の話は第1章力学のセクション1.6で詳細に取り扱ったので、ここではポイントを絞って話を進めることにします。

A. 単振動とはどんな運動か？

単振動とは、“質点が等速円運動している様子を壁に投射した質点の影（正射影といいます）の運動である”ということですね。

B. 単振動の運動方程式と解は？

質点の質量を m ，加速度を a ，変位を x とすると，運動方程式とその解は次式で与えられます。

$$ma = -kx, \quad x = A \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \alpha\right) = A \cos(\omega t + \alpha) \quad \left(\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}\right)$$

C. 単振動を特長付ける物理量はどんなものがあるか？

振幅 (A)，初期位相 (α)，周期 (T)，振動数 (ν)，角振動数 (ω) があり，周期 T と角振動数，振動数の関係は次の通りです。

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \quad \nu = \frac{1}{T}$$

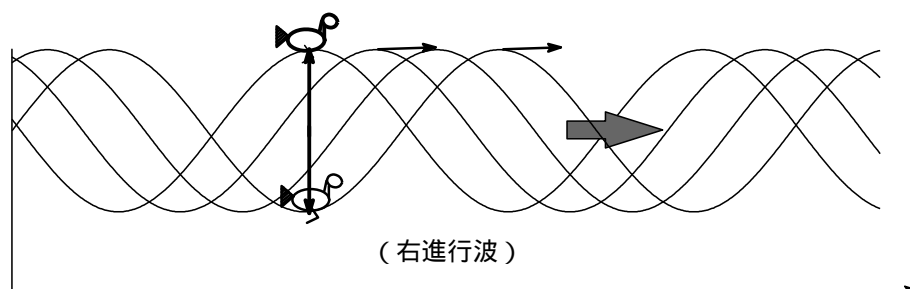
3.1.2 波動

波動 (wave) とは何らかの物理量の周期的変化 (振動) が空間方向に伝播する現象のことをいい，波動を伝えるものを媒質といいます。例えば池に小石を投げて広がる波 (紋) は水を媒質としていますし，太鼓を叩くと空気が振動して音が聞こえますが，それは空気が媒質になっています。このように，波は媒質の運動により伝わっていきますが，媒質の運動方向と波の伝わる方向が互いに直角となっている波を横波といい，平行な波を縦波と呼んでいます。

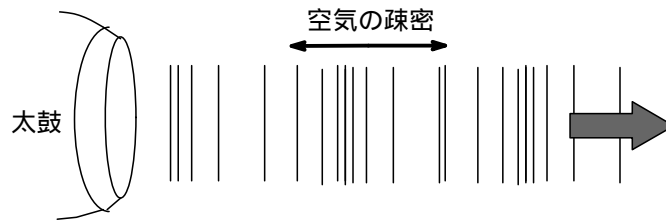
横波 水面の波は横波の典型的な例です。例えば風呂場にアヒルのおもちゃを浮かばせて波立たせると波の山・谷は同心円状に広がっていきますが，アヒルは元の位置で上下しているだけです。

水面に浮かんだアヒルは定点位置を上下するだけだが

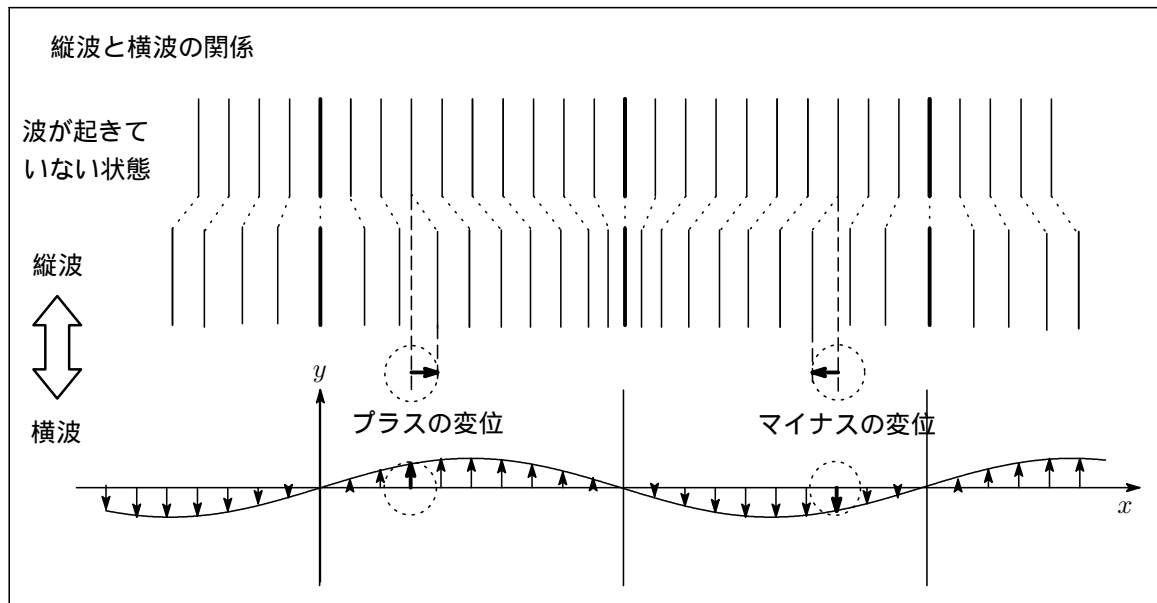
“波”は右方向へ進んでいく



縦波 縦波は別名疎密波ともいわれます。太鼓を叩くと太鼓の振動に合わせて周りの空気（媒質）の密度は疎密に変化します。この疎密に変化する方向と波が伝わる方向が一致しています。バネの振動も縦波ですね。



縦波と横波の関係 縦波と横波は別の波か。。。?と思うかも知れませんが、実は“波”としては同じ、つまり同じ運動方程式で記述できます。媒質の変位（揺れ幅）という点に注目して下図を見てください。結局、媒質の時間的な変位を表す方程式は同じということが分かります。



《註》横波と縦波のアニメーションはココ（中川のビジュアル物理教室）を参照されたし。

<http://www.ne.jp/asahi/tokyo/nkgw/gakusyu/hadou/tate-yoko-wave/wave1.html>

波動と振動の違いについて

さて、振動と波動の違いについて見てみましょう。波動とは“動”という文字が入っているように動きがあるわけで、波動とは変化が空間的に伝わるものということになり、一方、振動はそうでないものということになります。例えばバネに重りをぶら下げて手で少し引っぱって放すと重りは振動しますね。しかし、重り以外のものに振動が伝わるわけではないので、これは波動ではなく振動ということになります。笛を吹くと近くの空気が振動します。振動した空気もその隣の空気を振動させ、それがまたその隣の空気も振動させて... というように音という波が引き起こされて音が伝わっていきます。これは上で見た縦波という波動ですね。

3.1.3 波の方程式（波動関数）

進行している波の媒質の変位を y とし、時刻 t における位置 x との関係を表す方程式を波の方程式といい、 y は時間 t と座標 x の関数でこれを波動関数と呼んでいます。今、媒質の各点が振幅 A 、角振動数 ω 、

周期 T ，振動数 ν で単振動し， x の正の向きに速さ v で進んでいるとします。初期位相 $\alpha = 0$ の場合，点 P における時刻 t での変位 y を求めましょう。原点 $x = 0$ で初期位相は 0 なので，時刻 t における原点での変位を y_0 とすると

$$y_0 = A \sin \omega t = A \sin \frac{2\pi}{T} t$$

波は速さ v で x の正の方向に進むので，原点 O から距離 x にある点 P まで波形が進む時間を Δt とすると

$$\Delta t = \frac{x}{v}$$

つまり，点 P にある媒質は原点 O にある媒質より時間 Δt だけ遅れて振動することになります。このことは，時刻 t における原点 O の Δt だけ前の時刻，つまり $t - \Delta t$ での変位と同じということになります。ということで，点 P における変位 y は

$$y = A \sin \omega (t - \Delta t) = A \sin \omega \left(t - \frac{x}{v} \right) \quad (3.1.1)$$

で表されます。

媒質の各点の運動の方向と速さ

(1) 速さ (v)，周期 (T)，波長 (λ) の関係：媒質のある点が 1 回単振動，つまり振動が一周する間に空間的には波長 λ 進んでいるので，波の進行速度 v は

$$v = \frac{\lambda}{T} \quad (3.1.2)$$

(2) 速さ (v)，振動数 (ν)，波長 (λ) の関係：媒質のある点が 1 秒間に ν 回振動すれば，波は 1 秒間に ν 個やってくるので，波形は 1 秒間に $\nu\lambda$ 進むことになります。したがって，波の進む速さ v は

$$v = \nu\lambda \quad \left(\nu = \frac{1}{T} \right) \quad (3.1.3)$$

これらの関係式を使うと (3.1.1) は， $\omega = 2\pi\nu$ なので

$$y = A \sin \omega \left(t - \frac{x}{v} \right) = A \sin 2\pi\nu \left(t - \frac{x}{v} \right) = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \quad (3.1.4)$$

と表すことができます。

波動関数

波動関数 y は時間 t と座標 x の 2 つの変数の関数です。これをグラフで描くと 3 次元座標として縦軸に y ，横軸に時間軸 t と距離軸 x をとると右図のように表されます。 x 軸に沿った 2 次元 (x, y) 平面で見ると

$$\begin{aligned} y &= A \sin 2\pi \left(\frac{-x}{\lambda} \right) = A \sin \left(-\frac{2\pi}{\lambda} x \right) \\ &= -A \sin kx, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

また，時間軸に沿った 2 次元 (y, t) 平面で見ると

$$\begin{aligned} y &= A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} \right) = A \sin \left(\frac{2\pi}{T} t \right) \\ &= A \sin \omega t \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

$2\pi/\lambda$ は単位長さあたり何個の波が含まれているか（正確には何ラジアン分の波が含まれているか）を表すので、この波の個数を波数と呼びます。波数 k を使うと波動関数は

$$y = A \sin(\omega t - kx) \quad (3.1.7)$$

と表すことができます。 x 軸の負の向きに進む波は従って

$$y = A \sin(\omega t + kx) \quad (3.1.8)$$

と表せます。時刻 $t = 0$ での原点の位相（初期位相）が φ とすると、時刻 t における原点の変位は

$$y_0 = A \sin(\omega t + \varphi)$$

なので、任意の点 x の変位は波の進行方向により

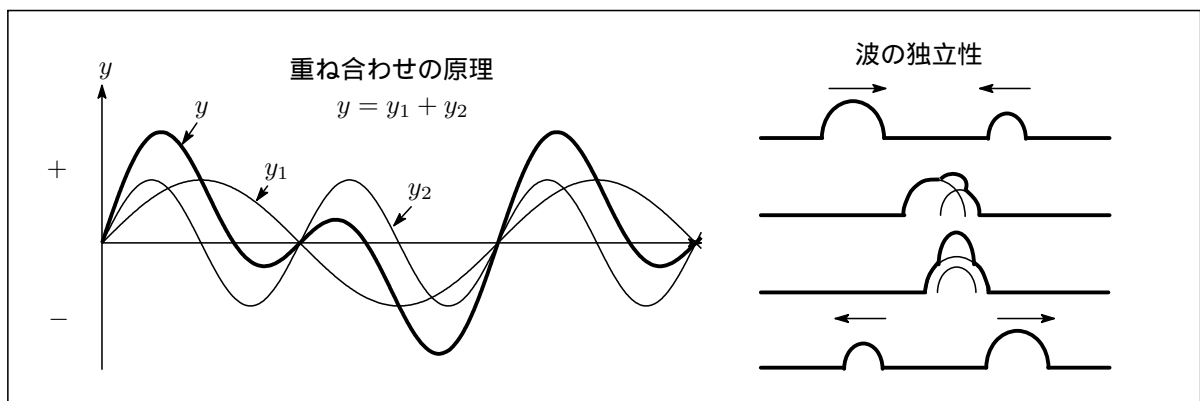
$$\begin{cases} \text{波が } +x \text{ の向きに進む場合： } y = A \sin(\omega t - kx + \varphi) \\ \text{波が } -x \text{ の向きに進む場合： } y = A \sin(\omega t + kx + \varphi) \end{cases} \quad (3.1.9)$$

3.1.4 重ね合わせの原理

両方から進んできた2つの波が重なっているときの変位は、「2つの波が別々に進んでいるときの変位の和になる」。これが重ね合わせの原理といわれるもので、数式で表すと、変位 y_1 の波と変位 y_2 の波が重なった合成波の変位 y は

$$y = y_1 + y_2 \quad (3.1.10)$$

となります。図を見ると2つの波が重ね合わさった結果、波の強さが強めあったり弱めあったりしていることが分かりますが、この現象を干渉といいます。2つの波が出会っても一方の波が他方の波の進行を妨げたり、影響を与えたりすることはありません。出会って重なっても、その後は波はお互いを素通りしてそのまま進んでゆきます。波のこの性質のことを波の独立性と呼んでいます。



3.1.5 波の干渉

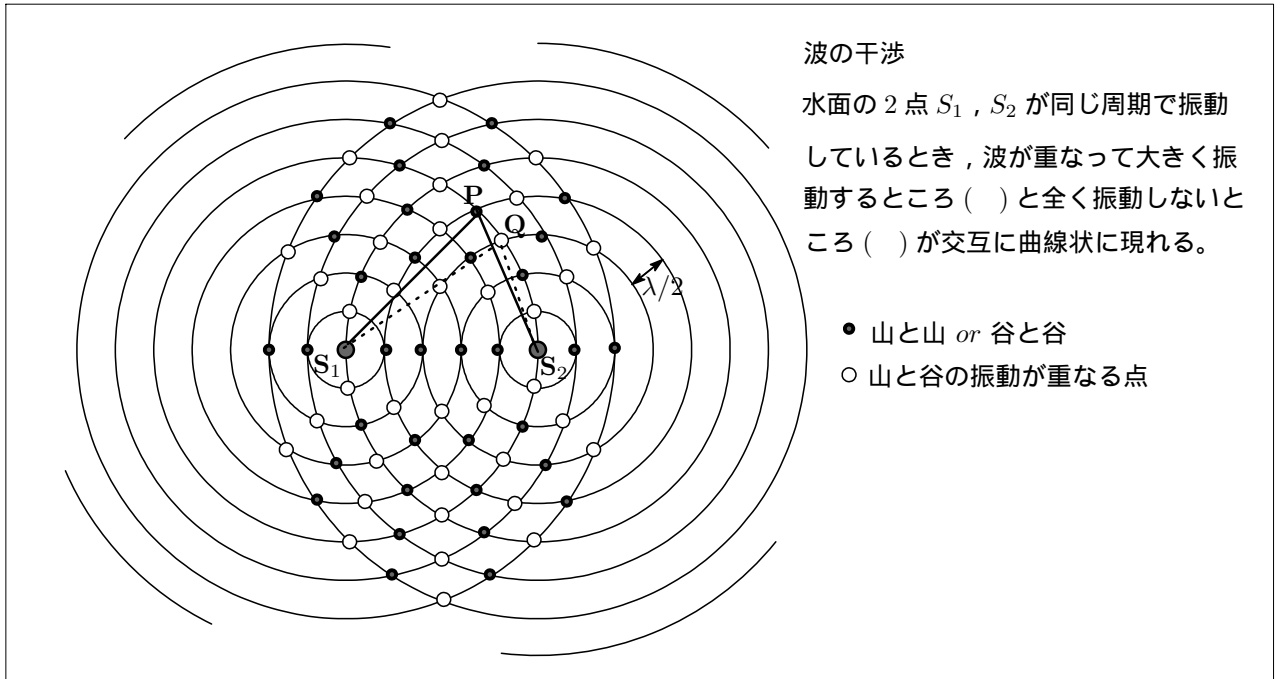
お風呂なんかで経験済みと思いますが、水面の2箇所 S_1, S_2 が同じ周期で振動させた場合、 S_1, S_2 を中心とした2つの円形の波が連続的に発生し、これらの波が重なり合って振幅が大きくなる場所と全く振動しない場所が交互に現れます。下図に示すように、水面上の1点を P とし、 P から振動源 S_1, S_2 までの距離をそれぞれ l_1, l_2 とします。水面波の波長を λ とすれば、距離 l_1 と l_2 の距離の差が波長の整数倍、言い換えると半波長の偶数倍のところでは、山と山、あるいは谷と谷が重なりあうので振幅が2倍の振動をします。この条件を数式で表すと

$$\text{腹： } |l_1 - l_2| = 2n \frac{\lambda}{2} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (3.1.11)$$

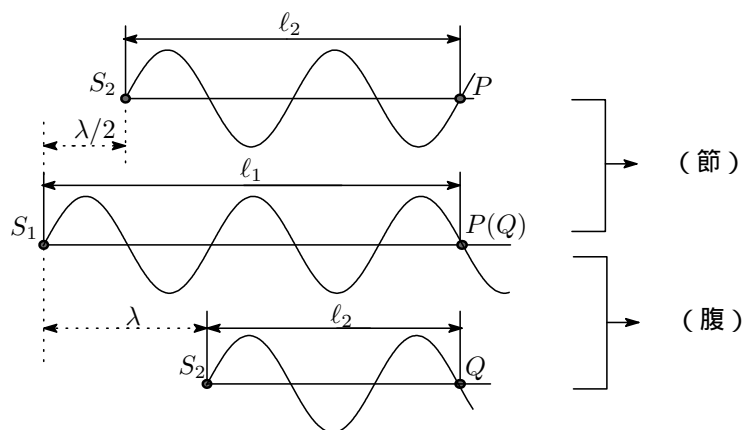
今、距離の差を問題にしていますから左辺は絶対値が付きます¹。このような点を腹といいます。一方、距離の差が半波長の奇数倍のところでは山と谷が重なるので振動が打ち消され、全く振動しくなくなります。このような点を節といいます。

$$\text{節： } |\ell_1 - \ell_2| = (2n + 1) \frac{\lambda}{2} = (n + 1/2)\lambda \quad (3.1.12)$$

ところで2点間の距離の差が一定の軌跡は双曲線なので、腹や節の点は S_1, S_2 を焦点とする双曲線上に並ぶことになります。



上図の点 P, Q での状況を具体的に表すと次のようになります。



重ね合わせの原理を使って波の干渉を数学的に取り扱ってみましょう。波の式として次の (3.1.4) を使います。

$$y = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

そうすると S_1 から P に向かう波の点 P での変位を y_1 、同様に S_2 から P に向かう波の点 P での (同時

¹ 大きいほうから小さいほうを引けばよい。

刻での) 変位を y_2 とすると

$$\begin{cases} S_1 \rightarrow P : y_1 = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{\ell_1}{\lambda} \right) \\ S_2 \rightarrow P : y_2 = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{\ell_2}{\lambda} \right) \end{cases} \quad (3.1.13)$$

点 P で観測される波はこの 2 つの波が重ねあわされたもので, 合成された波の変位を y とすると, 三角関数の加法定理を使って

$$\begin{aligned} y &= y_1 + y_2 = A \left\{ \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{\ell_1}{\lambda} \right) + \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{\ell_2}{\lambda} \right) \right\} \\ &= 2A \cos 2\pi \left(\frac{\ell_2 - \ell_1}{\lambda} \pi \right) \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{\ell_1 + \ell_2}{2\lambda} \right) \\ &= A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{\ell}{\lambda} \right), \quad \text{但し } A = 2A \cos 2\pi \left(\frac{\ell_2 - \ell_1}{\lambda} \pi \right), \quad \ell = \frac{\ell_1 + \ell_2}{2} \end{aligned} \quad (3.1.14)$$

A は合成波の振幅で, この値は ℓ_1 と ℓ_2 の行路差が波長の整数倍 + 半波長分ずれていれば “ $2A$ ”, 波長の整数倍だけのずれの場合は “ 0 ” となります。これが先ほどの腹と節になります。

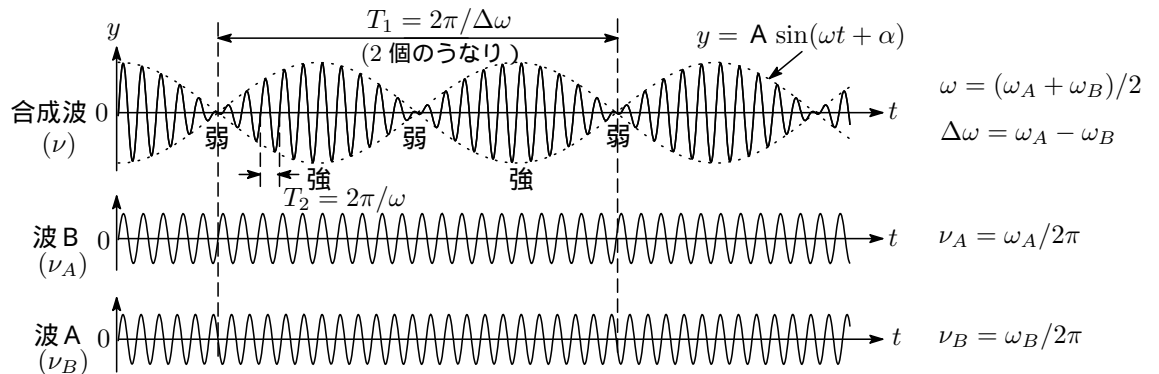
$$\begin{cases} |\ell_2 - \ell_1| = \left(n + \frac{1}{2}\right) \lambda & \rightarrow \cos \left(\frac{\ell_2 - \ell_1}{\lambda} \pi \right) = 0 \\ |\ell_2 - \ell_1| = n\lambda & \rightarrow \cos \left(\frac{\ell_2 - \ell_1}{\lambda} \pi \right) = 1 \end{cases}$$

上の場合は, 2 つの波は振動源で同じ位相のケースでした。それでは逆位相の場合はどうなるでしょうか, 各自で追求してみてください²。答えは次の通りです。

$$\begin{cases} |\ell_2 - \ell_1| = \left(n + \frac{1}{2}\right) \lambda & \rightarrow \sin \left(\frac{\ell_2 - \ell_1}{\lambda} \pi \right) = 1 \\ |\ell_2 - \ell_1| = n\lambda & \rightarrow \sin \left(\frac{\ell_2 - \ell_1}{\lambda} \pi \right) = 0 \end{cases}$$

3.1.6 うなり

同じ方向に進むわずかに振動数が異なる 2 つの波 (波 A, 波 B) が干渉するとうなりが発生します。例えば振動数がわずかに異なる 2 つの音叉を同時に鳴らすと, 音は強くなったり弱くなったりすることは音楽の授業などで経験しましたね。ウオーン, ウオーンと周期的に音の強弱が発生しますが, これがうなりです。うなりのできる様子を下図に示します³。



² $y_1 = A \sin 2\pi(t/T - \ell_1/\lambda)$, $y_2 = -A \sin 2\pi(t/T - \ell_2/\lambda)$ とおく。

³ 音は縦波で, 図は横波ではないか! と疑問に思われるかも知れないが, 基本的に同じなので分かりやすい方で説明しています。

1秒間に発生するうなりの数を n とした場合, n と 2つの振動体の振動数 ($\nu_A, \nu_B, \nu_A > \nu_B$) との関係を下に調べてみます。振幅は同じで周波数はわずかに異なる 2つの波 A と波 B の式をそれぞれ

$$\begin{cases} A & : y_1 = a \sin(\omega_A t - k_A x) \\ B & : y_2 = a \sin(\omega_B t - k_B x) \end{cases} \quad (3.1.15)$$

とすると, 合成波は重ね合わせの原理と三角関数の加法定理を使って

$$\begin{aligned} y &= y_1 + y_2 = a \sin(\omega_A t - k_A x) + a \sin(\omega_B t - k_B x) \\ &= 2a \cos\left(\frac{\omega_A - \omega_B}{2} t - \frac{k_A - k_B}{2} x\right) \sin\left(\frac{\omega_A + \omega_B}{2} t + \frac{k_A + k_B}{2} x\right) \\ &= 2a \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2} t - \alpha\right) \sin(\omega t + \alpha) = A \sin(\omega t + \alpha) = A \sin\left(\frac{2\pi}{T_1} t + \alpha\right) \end{aligned} \quad (3.1.16)$$

となります⁴。ただし, $\Delta\omega = \omega_A - \omega_B$, $\omega = (\omega_A + \omega_B)/2$, $\alpha = (k_A - k_B)x/2$, $T_1 = 2\pi/\omega$ 合成波 (3.1.16) の振幅 A は

$$A = 2a \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2} t - \alpha\right) = 2a \cos\left(\frac{2\pi}{T_2} t - \alpha\right), \quad T_2 = 2\pi\left(\frac{2}{\Delta\omega}\right) \quad (3.1.17)$$

で, $\Delta\omega \sim 0$ ということから, 周期 T_2 が大変長い非常にゆっくりした変動をすることが分かります。合成波の振幅 A の振動数を ν とすると, (3.1.17) より

$$\begin{aligned} \nu &= \frac{1}{T_2} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\Delta\omega}{2}\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\omega_1}{2\pi} - \frac{\omega_2}{2\pi}\right) \\ &= \frac{\nu_A - \nu_B}{2} \quad (\nu_A, \nu_B: \text{波 } A, B \text{ の振動数}) \end{aligned} \quad (3.1.18)$$

と表されます。振動数は1秒間当たりの振動の数で, 1振動あたりの振幅の最大は2個あるので(上図参照), 1秒間あたりのうなりの数を n とすると

$$n = 2\nu = \nu_A - \nu_B, \quad (\nu_A > \nu_B) \quad (3.1.19)$$

となって, n は2つの振動体の振動数 ν_A と ν_B の差に等しいということになります。

3.1.7 定在波

波(正弦波)が媒質の端(これを境界面といいます)に向かって進んでおり, その端で反射する場合を考えます。媒質の端が動きやすいときを自由端, 動きにくい(動かない)ときを固定端といいます⁵。今, $x=0$ の媒質が振幅 a , 周期 T で振動し, 時刻 t における変位が

$$y_1 = (0, t) = a \sin \frac{2\pi}{T} t$$

で表され, この振動が x 軸の正の方向へ伝わって $x=L(>0)$ の端で反射されるとします。入射波と反射波はその伝わる速さがともに v として, 入射波の位置 x , 時刻 t での変位を $y_1(x, t)$ とすると, 原点 $x=0$ の変位が位置 x まで伝わるのに x/v だけ時間がかかるので⁶

$$y_1(x, t) = y\left(0, t - \frac{x}{v}\right) = a \sin \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{x}{v}\right)$$

と表せます。

(1) 自由端の場合

$x=L$ を自由端とすると, 端に達した波は自由に動けるので 入射波の変位がそのまま反射 されます。つ

⁴ $y =$ “ ゆっくり変動する振幅項 ” \times “ 振動項 ” となります。

⁵ “ 動きにくい ” という表現は曖昧な表現ですが, 今の場合, “ 動かない ” と同義と捉えておいてください。

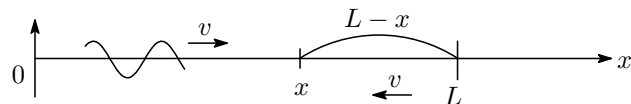
⁶ (3.1.1) を参照してください。

まり入射波と反射波の間で位相の変化はありません。具体的なイメージとして、例えば防波堤に打ち寄せ
る波は防波堤のところでチャブチャブしていますね。あれを思い浮かべてください。下図は Mathematica
で描いた自由端での波の反射と合成波のアニメーション分解図（青色：合成波，緑：進行波，赤：反射波）
です。左上 左下 右上 右下の流れで眺めてください。

さて，入射波の $x = L$ での変位は

$$y_1(L, t) = a \sin \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{L}{v} \right)$$

ですね。



反射波が $x = L$ から x まで伝わるのに時間は $(L - x)/v$ だけかかるので，反射波の変位 y_2 は

$$\begin{aligned} y_2(x, t) &= y_2 \left(L, t - \frac{L - x}{v} \right) = y_1 \left(L, t - \frac{L - x}{v} \right) \\ &= a \sin \frac{2\pi}{T} \left\{ \left(t - \frac{L - x}{v} \right) - \frac{L}{v} \right\} = a \sin \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{2L - x}{v} \right) \end{aligned}$$

と表せます。合成波を $y(x, t)$ とすると

$$\begin{aligned}y(x, t) &= y_1(x, t) + y_2(x, t) = a \sin \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{x}{v} \right) + a \sin \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{2L - x}{v} \right) \\ &= 2a \cos \frac{2\pi}{T} \frac{L - x}{v} \cdot \sin \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{2L - x}{v} \right) = A \sin \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{2L - x}{v} \right)\end{aligned}$$

ただし, A は合成波の振幅で $A = 2a \cos \left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{L - x}{v} \right)$

合成波の節は $A = 0$, 腹は $A = \pm 2a$ となるところなので, $n = 0, 1, 2, \dots$ として

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{節} : \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{L - x}{v} = \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi \rightarrow L - x = \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\lambda}{2} \\ \text{腹} : \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{L - x}{v} = n\pi \rightarrow L - x = n \cdot \frac{\lambda}{2} \end{array} \right.$$

ここで $v = \lambda/T$ を使いました。

(2) 固定端の場合

固定端では媒質の振動はないので, $x = L$ での反射波の変異は入射波の変位と符号が逆転します (合成波の変位は 0)。アニメの分解図を載せておきます。この見方は上と同じです。

さて, 自由端の場合と異なる点は $x = L$ での反射波の変異が入射波の変位と逆符号になるという点

だけですから，反射波の変位 $y_2(x, t)$ は

$$y_2(x, t) = -a \sin \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{2L - x}{v} \right)$$

と表せます。そうすると合成波 y の式は

$$\begin{cases} y_1 = a \sin \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{x}{v} \right), & y_2 = -a \sin \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{2L - x}{v} \right) \\ y = y_1 + y_2 = 2a \sin \frac{2\pi}{T} \frac{L - x}{v} \cdot \cos \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{L}{v} \right) = A \cos \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{L}{v} \right), & A = 2a \sin \frac{2\pi}{T} \frac{L - x}{v} \end{cases}$$

となります。A は合成波の振幅で，自由端の場合は \cos でしたが固定端の場合は \sin となっている点に留意ください。固定端 $x = L$ での合成波の振幅は $A = 0$ で節になっていますね。固定端の場合， $x = 0$ で腹になる条件は

$$A = 2a \sin \frac{2\pi}{T} \frac{L}{v} = \pm 2a \rightarrow \frac{2\pi}{T} \frac{L}{v} = \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi, \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$vT = \lambda$ なので，

$$L = \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\lambda}{2}$$

となります。また，両端固定の場合には $x = 0$ も節になるので

$$A = 2a \sin \frac{2\pi}{T} \frac{L}{v} = 0 \rightarrow \frac{2\pi}{T} \frac{L}{v} = n\pi \rightarrow L = n \cdot \frac{\lambda}{2}, \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

《メモ》 - - - - -

自由端と固定端の場合の反射の状況を簡単にまとめておきます。

実線の波を実在波，破線の波は境界面の向こう側から向かってくる仮想の波とします。そうすると波が境界面で反射することは境界面で実在波と仮想波が入れ替わるということになります。

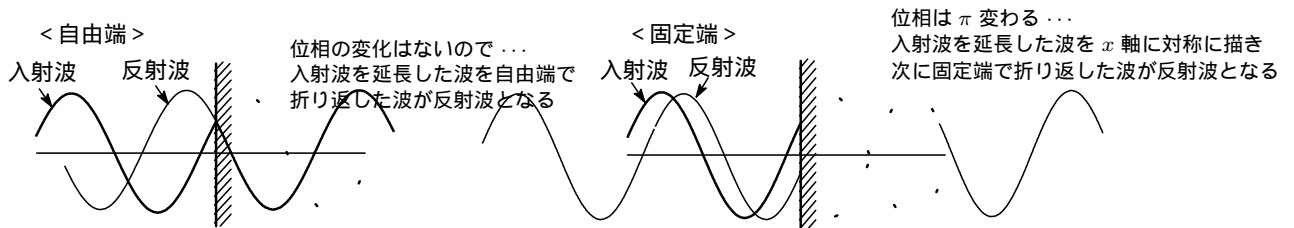
ココ のサイトも参照ください。

<http://www.wakariyasui.sakura.ne.jp/2-1-0-0/2-1-2-3teiyouha.html>

<http://homepage3.nifty.com/qazu/wave.htm>

<http://homepage3.nifty.com/qazu/wave.htm> java applet のソースコードも公開されてます。

アニメーションを駆使した大変分かりやすい解説が載っています。



3.2 弦と気柱の振動

3.2.1 弦の振動

一様な弦の両端を固定し，弦の一方の末端を音叉に結び付けて横波を発生させます。そうすると，弦を左右に伝わる横波が両端で固定端反射し，両端が節となる定常波が生じます。腹が1個の振動を基本振動（固有振動）といい，これは最も低い振動数で，波長 λ の $1/2$ が弦の長さ L となります。次に，腹が2個，つまり波長 λ の長さが弦の長さ L となる振動を2倍振動，腹が3個，波長 λ の $3/2$ 倍が L に等しい振動を3倍振動，以下，腹が n 個，波長の $n/2$ 倍が弦の長さ L に等しい振動を n 倍振動といいます。

くどいようですが上の状況を数式を使って調べてみます（不要な方は飛ばしてください）。弦に沿って A から B へ進む正弦波を y_{in} ， B 端で反射されて A 端へ向かう波を y_{out} とします。2つの波の位相差は

π ですね。

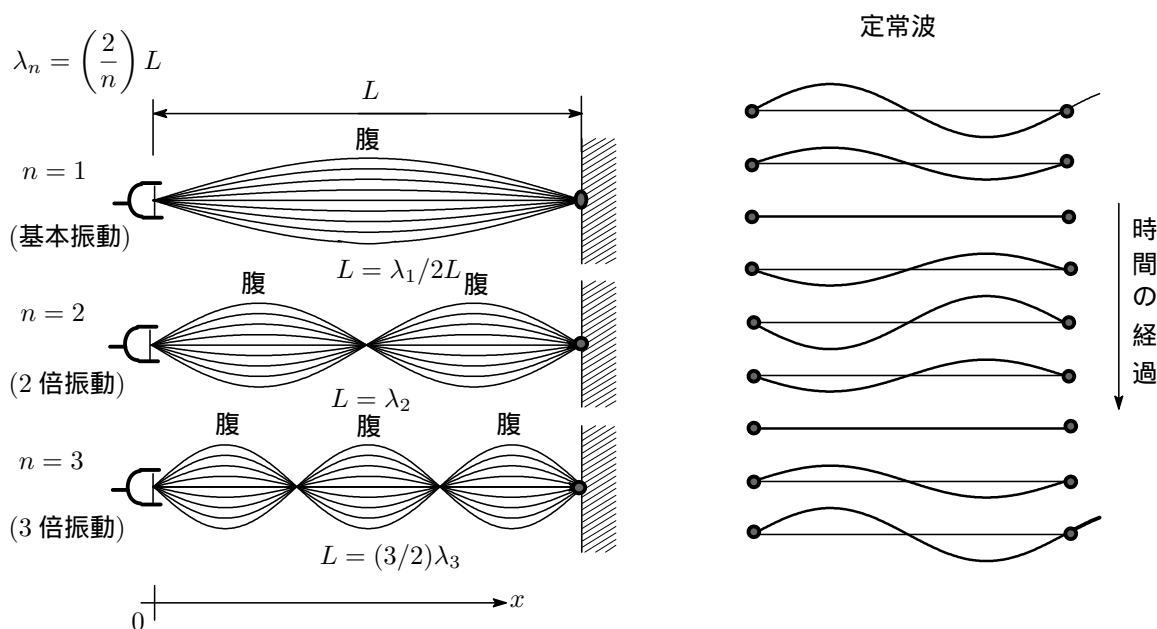
$$\begin{cases} y_{in} = a \sin \left\{ 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \right\} \\ y_{out} = a \sin \left\{ 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} \right) + \pi \right\} \end{cases}$$

と書けます。合成波（定常波）はこれらの重ね合わせなので

$$\begin{aligned} y &= y_{in} + y_{out} = a \sin \left\{ 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \right\} + a \sin \left\{ 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} \right) + \pi \right\} \\ &= 2a \sin \left(2\pi \frac{t}{T} + \frac{\pi}{2} \right) \cos \left(2\pi \frac{x}{\lambda} - \frac{\pi}{2} \right) = 2a \sin \left(2\pi \frac{x}{\lambda} \right) \cdot \cos \left(2\pi \frac{t}{T} \right) \\ &= A \cos 2\pi \frac{t}{T}, \quad A = 2a \sin 2\pi \frac{x}{\lambda} \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

となります。A は合成波の振幅ですね。これは場所 x によってその大きさが異なり、次のようになります。

$$n = 1, 2, 3, \dots \begin{cases} \text{腹の位置 (振幅最大)} : x = \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\lambda}{2} & : A = 2a \text{ or } -2a \\ \text{節の位置 (振幅 0)} : x = n \cdot \frac{\lambda}{2} & : A = 0 \end{cases} \quad (3.2.2)$$



弦の長さを L とした場合， n 倍振動の波長 λ_n は

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \quad (3.2.3)$$

で与えられます。

弦を伝える波の速さ

弦を伝える波の速さ v を求めていきます⁷。弦の微小部分 Δx に注目します。線密度 ρ ，張力 S の弦を伝える波の振幅 a ，速度 v ，波長 λ とし，時刻 t で $x = 0$ の位置に波の変位が正に最大であったとすると，そのときの波の式は

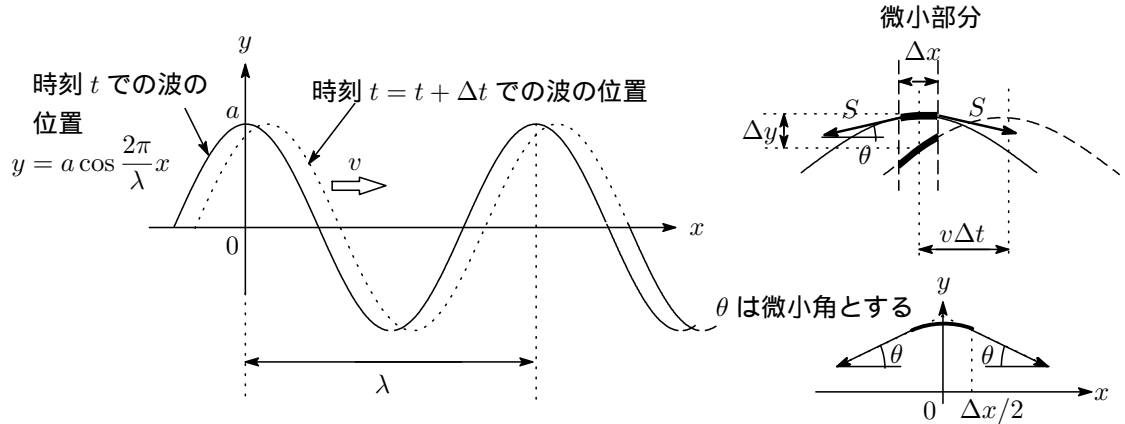
$$y = a \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} x \right) \quad (3.2.4)$$

⁷ 波動方程式を解けば容易に求まりますが，偏微分方程式の知識が必要になるのでここではやりません。

で与えられます。時間 Δt 後に波は $v\Delta t$ 進むので、微小部分が y 軸方向に移動する距離 Δy は

$$\Delta y = a \cos \frac{2\pi}{\lambda}(v\Delta t) - a = a \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{2\pi}{\lambda} v\Delta t \right)^2 - 1 \right\} = -\frac{2\pi^2 v^2}{\lambda^2} a (\Delta t)^2 \quad (3.2.5)$$

ここで、 A が非常に小さい場合に成り立つ近似式 $\cos A \doteq 1 - (1/2)A^2$ を使いました。



次に微小部分 Δx の両端に掛かる弦の張力 S の y 成分を求めます。張力 S の向きは $x = (1/2)\Delta x$ での接線の向きなので、接線と x 軸のなす角を θ とすれば、張力 S の y 軸成分 S_y は $S_y = S \sin \theta$ となります。 $x = (1/2)\Delta x$ での接線の傾きは y を x で微分したもので、これは $\tan \theta$ に等しいから

$$\begin{aligned} \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=(1/2)\Delta x} &= -\frac{2\pi a}{\lambda} \sin \left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{1}{2} \Delta x \right) = -\frac{2\pi a}{\lambda} \sin \left(\frac{\pi}{\lambda} \Delta x \right) \\ &= \tan \theta \doteq \sin \theta \end{aligned}$$

最後の式は θ が微小角の場合に成り立つ近似式 $\tan \theta \doteq \sin \theta$ を使いました。ということで張力 S_y は

$$S_y = S \sin \theta = -\frac{2\pi a S}{\lambda} \sin \left(\frac{\pi}{\lambda} \Delta x \right) \doteq -\frac{2\pi^2 a S \Delta x}{\lambda^2}$$

S_y の合力 F_y は微小部分の両端に掛かる S_y の合力なので

$$F_y = 2S_y = -\frac{4\pi^2 a S \Delta x}{\lambda^2}$$

F_y は微小部分 Δx に働く力の y 成分です。この力により微小部分が Δt の間に y 軸方向へ Δy 変位し、その運動を等加速度運動と仮定すると、運動方程式は y 軸方向の加速度を α_y として

$$(\rho \Delta x) \alpha_y = F_y = -\frac{4\pi^2 a S \Delta x}{\lambda^2}$$

これから、加速度 α_y は

$$\alpha_y = -\frac{4\pi^2 a S}{\rho \lambda^2}$$

さて、 Δt の間に Δy 移動したので、等加速度運動の公式より

$$\begin{aligned} \Delta y &= v_0 \Delta t + \frac{1}{2} \alpha_y (\Delta t)^2 = \frac{1}{2} \alpha_y (\Delta t)^2 \quad (\because v_0 = 0) \\ &= -\frac{1}{2} \frac{4\pi^2 a S}{\rho \lambda^2} (\Delta t)^2 \end{aligned}$$

一方、(3.2.5) より

$$\Delta y = -\frac{2\pi^2 v^2}{\lambda^2} a (\Delta t)^2$$

上の2つの式より弦を伝わる波の速さ v は

$$v = \sqrt{\frac{S}{\rho}} \quad (3.2.6)$$

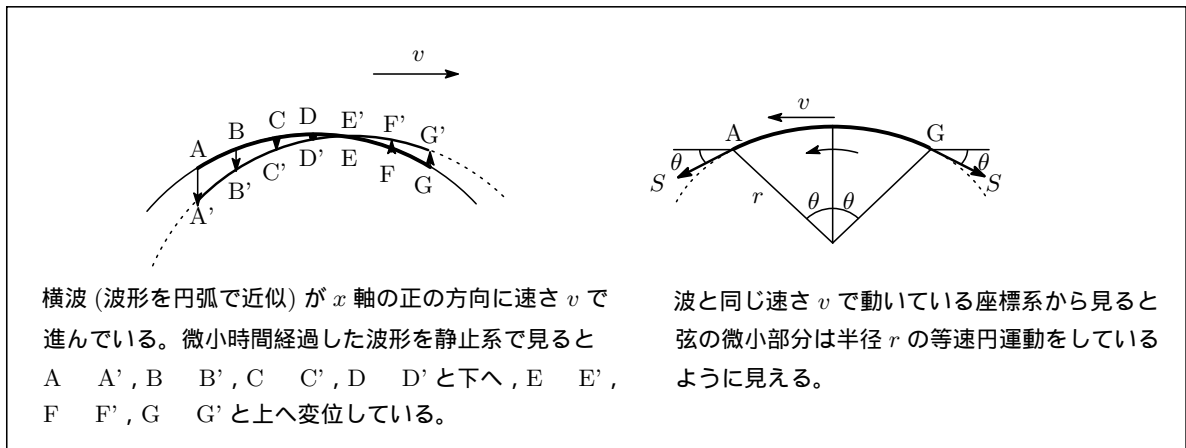
と求まります。弦の張力が強いほど、また、弦が軽いほど、波は速く伝わるのが分かりますね。弦の振動数 ν_n は (3.1.3) より

$$\nu_n = \frac{n}{2L}v = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{S}{\rho}}, \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (3.2.7)$$

となります。

《メモ》別解 - - - - -

弦を伝わる波を媒質の円運動の一部と考えて、等速円運動の運動方程式から波の速さ v を求める方法を紹介しします。波の変位は十分小さいものとします。



弦の微小部分 AG が半径 r で円運動していると考えると⁸、微小部分の質量は $2\rho r\theta$ 、中心力は $2S \sin \theta$ となるので、運動方程式は

$$2S \sin \theta = 2\rho r\theta \frac{v^2}{r} \rightarrow 2S\theta = 2\rho r\theta \frac{v^2}{r} \quad (\because \theta \neq 0) \implies v = \sqrt{\frac{S}{\rho}}$$

3.2.2 気柱の振動

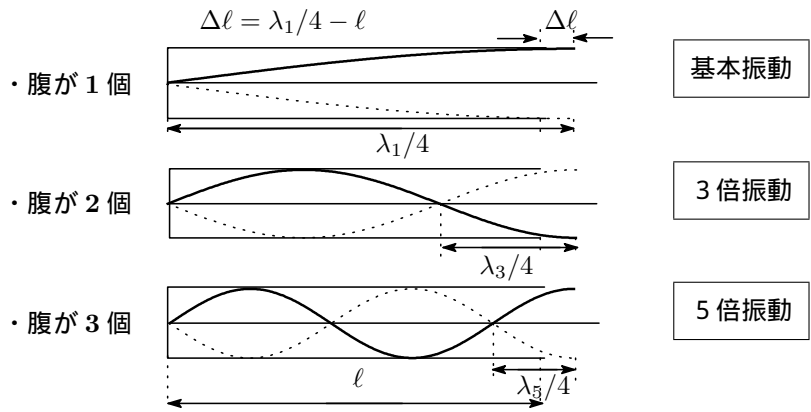
一つの管の中の空気の一部を振動させると音波となって伝わり、管の端で反射して入射波と反射波とが干渉し定常波ができます。この定常波を気柱の振動といいます。定常波の様子は、瓶のように一端が閉じた閉管の場合と、笛のように両端が開いた開管の場合とでは異なります。

(1) 閉管での気柱の振動

開端から入射した音波が閉じた端（閉端）で固定端反射して干渉し、開端が腹、閉端が節になる定常波ができます。開端での腹の位置は、開端から少し外へずれ⁹、このズレを開口端補正 Δl といいます。

⁸ 等速座標系では運動方程式は不変ですね。

⁹ 管から少しはみ出した部分までが気柱として振動する。なぜ開口端補正 Δl というものがでてくるのかの議論は結構難しく、いろいろ知識が必要になるので省略します。



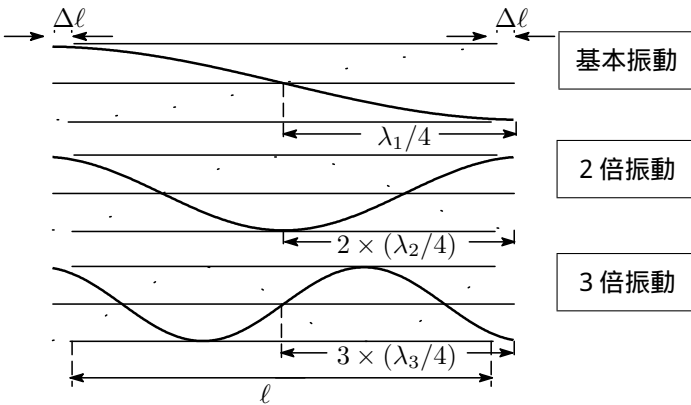
定常波の最も低い振動を基本振動といいます。これは腹が開端に1個だけできているものですね。開端以外にさらに1個の腹ができている（合計2個の腹）とき、3倍振動といい、一般に、開端のところを含め全部で n 個の腹ができているとき、 $2n - 1$ 倍振動といいます。それらの振動の振動数 ν は、 V を空気中の音速として以下のようにになります。

$$\left\{ \begin{array}{l} n \\ 1: \frac{\lambda_1}{4} = l + \Delta l, \quad \nu_1 = \frac{V}{\lambda_1} = \frac{V}{4(l + \Delta l)} \quad (\text{基本振動}) \\ 2: \frac{\lambda_3}{4} = \frac{l + \Delta l}{3}, \quad \nu_2 = \frac{V}{\lambda_3} = \frac{3V}{4(l + \Delta l)} \quad (\text{2倍振動}) \\ 3: \frac{\lambda_5}{4} = \frac{l + \Delta l}{5}, \quad \nu_3 = \frac{V}{\lambda_5} = \frac{5V}{4(l + \Delta l)} \quad (\text{3倍振動}) \\ \vdots \\ 5: \frac{\lambda_n}{4} = \frac{l + \Delta l}{2n - 1}, \quad \nu_n = \frac{V}{\lambda_{2n-1}} = \frac{(2n - 1)V}{4(l + \Delta l)} \quad (n \text{ 倍振動}) \end{array} \right. \quad (3.2.8)$$

【註】図は横波のように描いているが、それは分かりやすいように書いているだけで、実際は音は疎密波の縦波であることに注意。つまり腹が“疎”で節が“密”になります。

(2) 開管での気柱の振動

開端の一端から入射した音が他端で自由端反射して戻り、再びもとの開端で自由端反射を繰り返して両端が腹になる定常波ができます。この場合、開口端補正 Δl が両端にできます。



これから n 番目の振動数 ν_n と波長 λ_n は $\nu = V/\lambda$ より

$$\begin{cases} \nu_n = \frac{V}{\lambda_n} = \frac{n}{2(\ell + \Delta\ell)}V & (n = 1, 2, \dots) \\ \lambda_n = \frac{2}{n}(\ell + \Delta\ell) \end{cases} \quad (3.2.9)$$

ところで、開口端でなぜ反射が起こるのか、反射せずに外部へ抜けでてしまうのでは？と疑問をもたれるかも知れませんが、このあたりの事情は次の通りです。音波は疎密波で、疎の部分は空気の密度が小さく圧力が低く、密の部分は空気の密度が高くて圧力が高い状態になっています。さて、管の内部を左へ右へ進んできた音波の“密”な部分が開口端に達すると、その部分の空気は管の外部の空気圧より高いので管の外に流れだし、その結果、開口端部の空気は“密” “疎”に変化すると共に“疎”が管内を右へ左へと進行し始めます。同様に音波の“疎”の部分が開口端に達すると内外の圧力差により管の外部から空気が流れ込んできて“疎” “密”に変化し、“密”が管内を右へ左へと進行し始めます。こうして開口端での反射が起こります¹⁰。そして定常波は入射波と反射波の干渉の結果生まれてきます。開端部での定常波は常に腹（疎密の“疎”）になっていますが、開口端の部分の空気は自由に動けるので、“密（節）”になって圧力が大きくなる方向としても管外の空気圧とのバランスで抑制され、その部分の圧力変化は常に小さくなる方向に向かいます（“腹”）。空気の変位は大きくても圧力の変化は小さいということですね。尚、閉端部では空気は動けないので変位は小さく、他の部分から空気が変位してくると動けないので圧力は高まり、“密”となります。

3.3 音波の振動数と音の強さ

(1) 音波の振動数

人間が聞こえる音の振動数（可聴振動数）は $20 \sim 20000\text{Hz}$ の間といわれています¹¹。それより大きい振動数の音波を超音波といい、耳には聞こえませんがいろいろ利用されています（超音波洗浄機等々）。逆に可聴振動数より低い音は超低周波といいます。ちなみに、こうもりは $30\text{kHz} \sim 100\text{kHz}$ と人間の可聴域を大幅に超える超音波のみを聞き取ることができるといわれています。

音の高低は音波の振動数で決まり、振動数が大きいほど高い音となります。音楽で1オクターブの音とか言いますが、これは振動数の比が2倍の音（2倍音）です。

(2) 音の強さ

音波の振幅の大小が音の強さを決めます。大きい声は音波の振幅が大きく、高い声は振動数が高いということです。さて、詳しいことは省略しますが、音の強さとは振動の持つエネルギーのことで、音のエネルギーは振幅の2乗と振動数の2乗の積に比例します。

3.4 ドップラー効果

向こうから電車がゴトゴトと音をたてて近付いてくるときは大きな音が聞こえますが、逆に遠ざかるときは急に音が小さく聞こえます。これが有名なドップラー効果です。最もドップラー¹²が唱えたドップラー効果は連星から放射される光の波長の変化（地球に近づく星の光は青く（青方偏移）、逆に遠ざかる星の光は赤く（赤方偏移）見える）を説明するために導入されたもので、音のドップラー効果の方は1845

¹⁰ 端のように振動に対する条件（境界条件）が不連続的に変化しているところでは一般に反射が起こることが知られていますが、この詳しい説明はこのレベルを超えるので省略します。

¹¹ Hz：ヘルツと読みます。1Hzは、1秒間に1回の振動数と定義され、例えば20kHzといえば1秒間に20000回の疎密を繰り返す音となります。

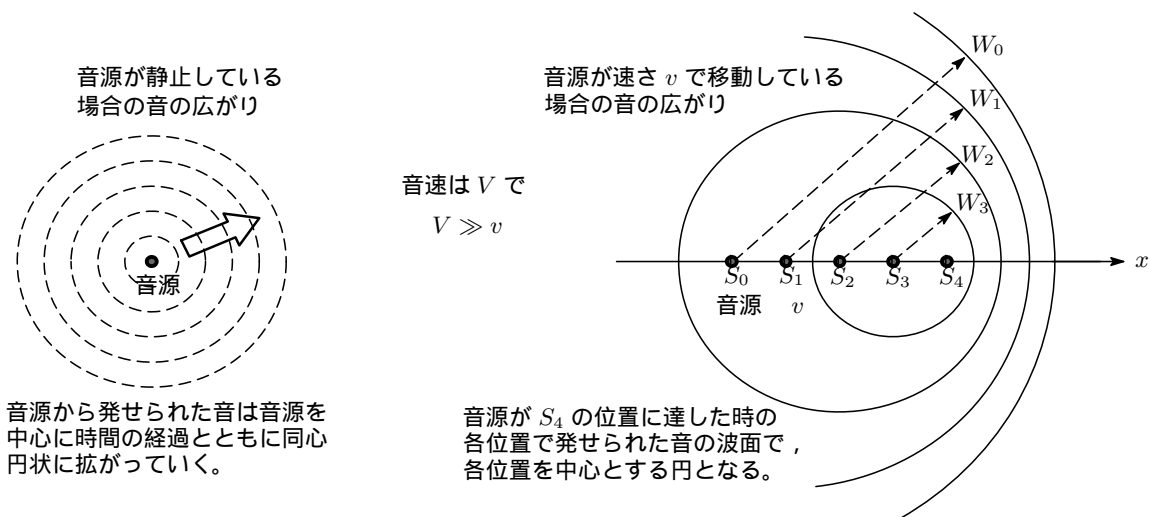
¹² Johann Christian Doppler（1803年11月29日 - 1853年3月17日）オーストリアの物理学者、数学者、天文学者

年にオランダの化学者・気象学者であるクリストフ・ボイス・バロット¹³によって確かめられました。

さて、(音の)ドップラー効果はなぜ起こるのでしょうか。ここでは、風はなく、音源と観測者が同一線上を運動する場合を考えてみます。音源として救急車の警笛音を取り上げることにします。音源が移動しながら音を発するとき、音源の進行方向に進む音は波長が短くなり、反対に音源の進行方向と逆方向に進む音は波長が長くなります(観測者は止まっているとします)。音速¹⁴ V が一定ならば波長 λ と振動数 ν は $\lambda = V/\nu$ と反比例の関係にあるので、進行方向に進む音は周波数が高く(高い音)、進行方向と逆方向に進む音は周波数が低く(低い音)なります。

3.4.1 音源が近づく / 遠ざかる場合のドップラー効果

音源が静止している場合の音源から発せられた音の波紋と音源が速さ v で x 軸の正の方向に動いている場合の音の波面¹⁵を下図に示します。



(1) 音源が一定の速さで近づく場合のドップラー効果

音源が観測者に速さ v で近づく場合を考えます。下図を参照ください。音速を V として、1秒間に音源が S_0 の位置から S_4 の位置に達したとします。そうすると前方の波面 A では距離 $V - v$ の中に ν 個の振動が含まれることになるので、波長を λ_A とすると

$$\lambda_A = \frac{V - v}{\nu}$$

となり、音源が静止していた場合の波長 $\lambda = V/\nu$ より短くなります。観測者は λ_A の波長の音を聞くことになり、聞こえる音の振動数 ν_A は

$$\nu_A = \frac{V}{\lambda_A} = \frac{V}{V - v} \nu \tag{3.4.1}$$

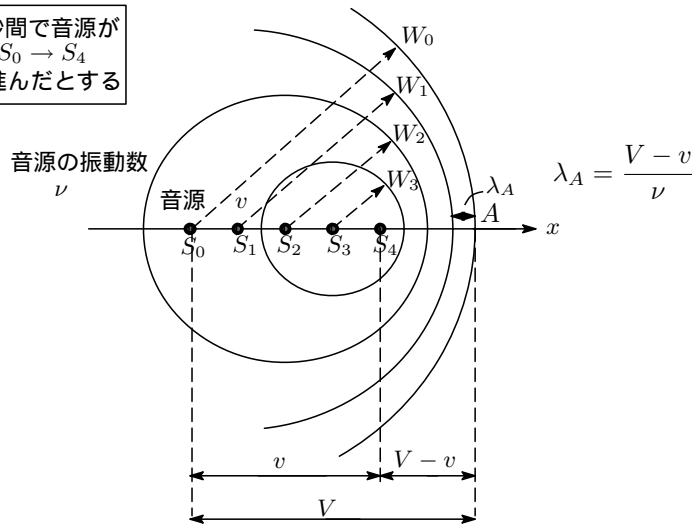
となり、音源より高い音として聞こえることとなります。

¹³ Christophorus Henricus Diedericus Buys Ballot (1817年10月10日 - 1890年2月3日)

¹⁴ 1気圧・摂氏 t における音速は $V = 331.5 + 0.61t$ で与えられ、¹⁵では約340m/sとなります。

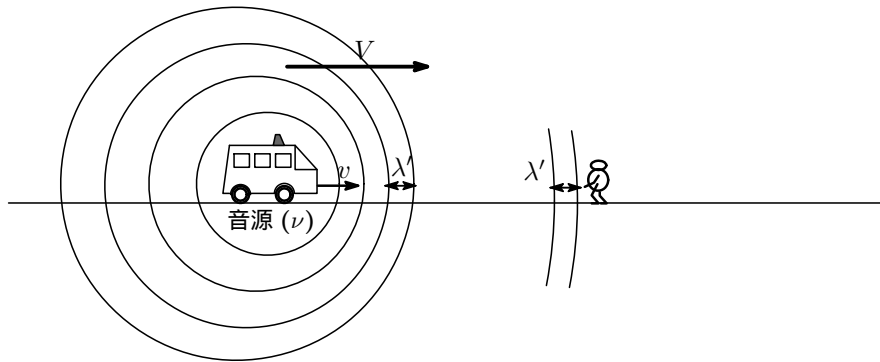
¹⁵ 媒質の位相の等しい隣り合った点を連ねてできる面を波面といいます。

1秒間で音源が
 $S_0 \rightarrow S_4$
に進んだとする



同じことですが、相対運動を考えると次のように説明できます。

音源が近づく場合



音源から見た音の速さは $V - v$ です。音源の振動数を ν 、波長を λ' とすると、公式 $V = \nu\lambda$ なので

$$V - v_0 = \nu\lambda'$$

と書けます。観測者にとっては音速は V で、耳に聞こえる音は（皺の寄った？）波長 λ' の音ですから、その振動数を ν' とすると

$$V = \nu'\lambda'$$

となり、上の2式より観測者の聞く振動数 ν' を求めると

$$\nu' = \frac{V}{V - v} \nu \quad (3.4.2)$$

で(3.4.1)と同じ式となります。相対運動を考えると、次の音源が遠ざかる場合の取り扱いが容易にできるようになります。

(2) 音源が一定の速さで遠ざかる場合のドップラー効果

音源が観測者から遠ざかる場合を考えます。速さ v で観測者から遠ざかる音源から発せられた後方に伝わっていく音は音源からみて音の速さは $V + v$ となるので、音源の振動数を ν とすると、音源については

$$V + v = \nu\lambda'$$

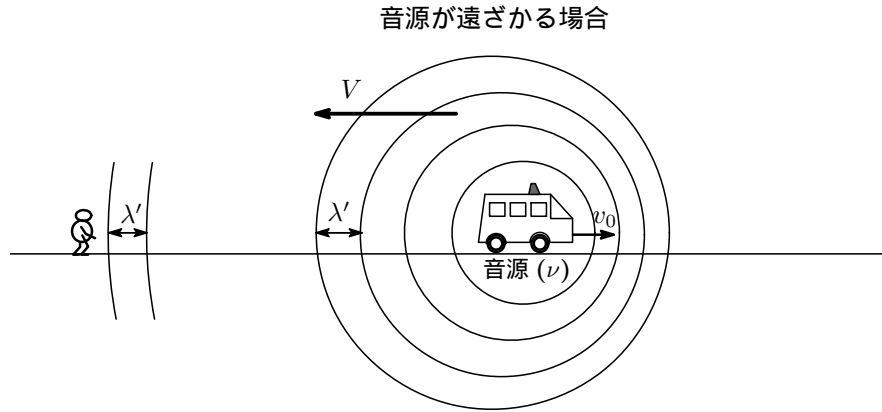
観測者の耳に聞こえる音は（間延びした）波長 λ' の音なので

$$V = \nu' \lambda'$$

となり，上 2 式より観測者の聞く振動数 ν' を求めると

$$\nu' = \frac{V}{V+v} \nu \quad (3.4.3)$$

これから $\nu' < \nu$ より音源の音より低い音として聞こえることになります。



3.4.2 音源も観測者も共に動いている場合のドップラー効果

(1) 観測者が動く音源の前を走っている場合のドップラー効果

観測者が速さ v_0 で x 軸の正の方向に進んでおり，音源が速さ v で同一直線上を観測者と同じ方向に進んでいる場合のドップラー効果を調べます。この場合，観測者から見た音速は $V - v_0$ で，音源から見た音速は $V - v$ となりますね。そうすると観測者の聞く音の振動数を ν' として

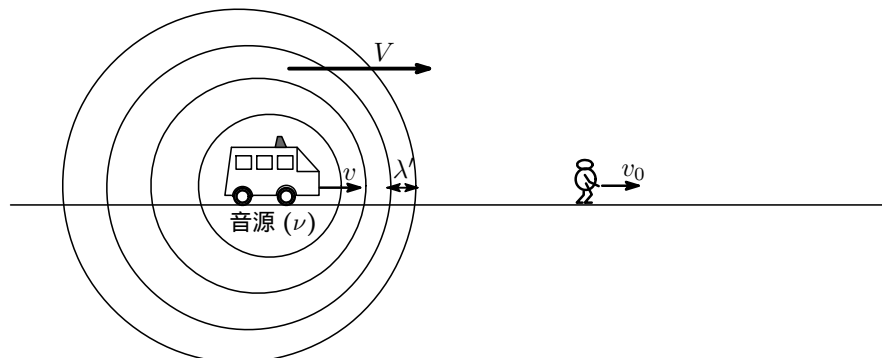
$$\begin{cases} \text{音源} & : & V - v = \nu \lambda' \\ \text{観測者} & : & V - v_0 = \nu' \lambda' \end{cases}$$

が成り立ちます。上の 2 式より λ' を消去して整理すると

$$\nu' = \frac{V - v_0}{V - v} \nu \quad (3.4.4)$$

が得られます。

観測者と音源が同一直線上を同じ方向に進む場合



$v > v_0$ ならば、つまり音源の速さが観測者の速さより早い場合は $\nu' > \nu$ となって観測者は高い音を聞くことになり、逆に $v < v_0$ 、音源の速さが観測者の速さより遅い場合は $\nu' < \nu$ となって観測者は低い音を聞くこととなります¹⁶。

(2) 動く音源を観測者が追いかける場合のドップラー効果

この場合は、音源から見た音の速さは $V + v$ 、また、観測者から見た音の速さは $V + v_0$ となりますね。そこで

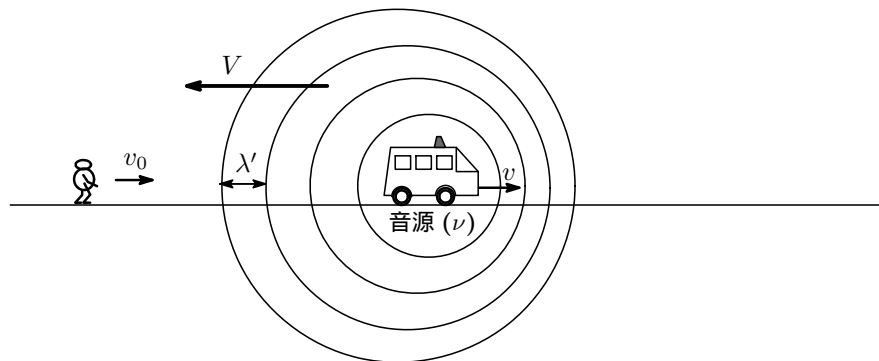
$$\begin{cases} \text{音源} & : & V + v = \nu \lambda' \\ \text{観測者} & : & V + v_0 = \nu' \lambda' \end{cases}$$

となり、これから

$$\nu' = \frac{V + v_0}{V + v} \nu \tag{3.4.5}$$

が得られます。

動く音源を観測者が追いかける場合



(3) その他のケースのドップラー効果

音源と観測者が同一直線上を動く場合のその他のケースとして次の4つが考えられ、それぞれのケースの結果を簡潔にまとめておきます。

(イ) 音源は静止、観測者が音源に近づく

$$\begin{cases} \text{音源} & : & V = \nu \lambda' \\ \text{観測者} & : & V + v_0 = \nu' \lambda' \end{cases} \longrightarrow \nu' = \frac{V + v_0}{V} \nu \tag{3.4.6}$$

(ロ) 音源は静止、観測者が音源から遠ざかる

$$\begin{cases} \text{音源} & : & V = \nu \lambda' \\ \text{観測者} & : & V - v_0 = \nu' \lambda' \end{cases} \longrightarrow \nu' = \frac{V - v_0}{V} \nu \tag{3.4.7}$$

(ハ) 音源と観測者が共に近づく

$$\begin{cases} \text{音源} & : & V - v = \nu \lambda' \\ \text{観測者} & : & V + v_0 = \nu' \lambda' \end{cases} \longrightarrow \nu' = \frac{V + v_0}{V - v} \nu \tag{3.4.8}$$

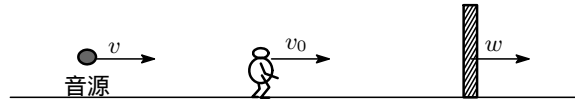
(ニ) 音源と観測者が共に遠ざかる

$$\begin{cases} \text{音源} & : & V + v = \nu \lambda' \\ \text{観測者} & : & V - v_0 = \nu' \lambda' \end{cases} \longrightarrow \nu' = \frac{V - v_0}{V + v} \nu \tag{3.4.9}$$

¹⁶ 音源と観測者の相対運動を考えれば一方は音源が近づく場合にあたり、他方は音源が遠ざかる場合にあたりますね。

おまけとして壁に反射する場合を考えてみましょう。

音源から出た音が壁に反射して
観測者に届く



音源と観測者と壁がそれぞれ v, v_0, w の速さで同一直線上を同じ方向に動いているとします。まず、音源と壁に注目し、壁に耳があるとすれば、壁耳の聞く音の周波数を ν_w として (3.4.4) が使えます。その結果

$$\nu_w = \frac{V - w}{V - v} \nu$$

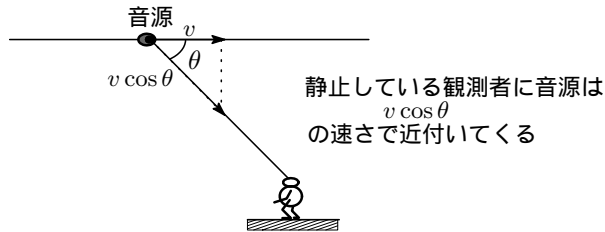
となります。次に観測者と壁に注目すると、観測者は速さ w で動く壁を追いかけいています。壁を振動数 ν_w の新たな音源とみなすと (3.4.5) が使えて

$$\nu' = \frac{V + v_0}{V + w} \nu_w = \frac{V + v_0}{V + w} \cdot \frac{V - w}{V - v} \nu$$

となります。

3.4.3 斜めドップラー効果

音源が静止している観測者に対して斜めに動く場合を考えます。

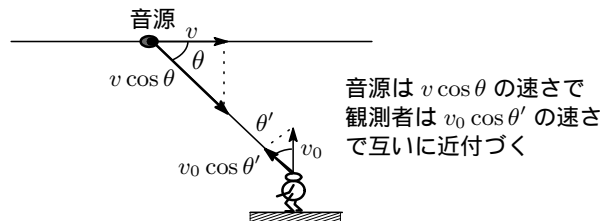


この場合、静止している観測者に音源が速さ $v \cos \theta$ で近付いてくることになり、(3.4.1) より観測者の聞く音の振動数は

$$\nu' = \frac{V}{V - v \cos \theta} \nu \quad (3.4.10)$$

となります。

次に、観測者も速さ v_0 で音源の進行方向に直角の方向に音源に向かって進む場合を考えます。



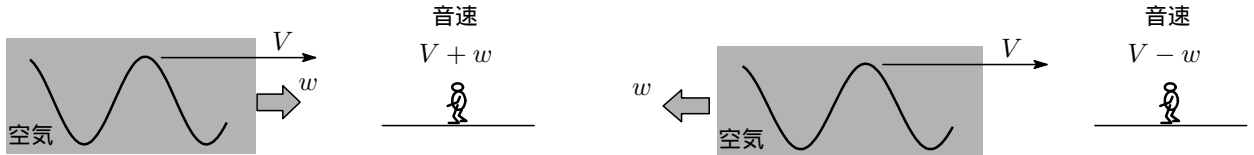
この場合は、音源は $v \cos \theta$ で、観測者は $v_0 \cos \theta'$ の速さで互いに近づくことになるので、(3.4.8) が使えて観測者の聞く音の振動数は

$$\nu' = \frac{V + v_0 \cos \theta'}{V - v \cos \theta} \nu \quad (3.4.11)$$

となります。

その他備考 —————

- (1) 風の影響 音波の媒質である空気が風で動いていると音速はその分変化します。無風状態での音速を V , 風の速さを w とすると, 音波の進む向きと風の向きが同じであれば音速は $V + w$ となり, 逆向きであれば音速は $V - w$ となります¹⁷。

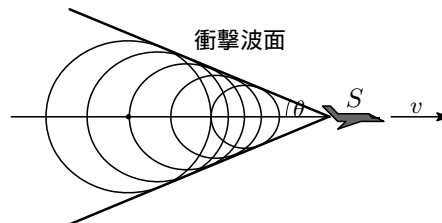


- (2) 音源が音速 V より速く動く場合 いままで暗黙の了解事項(?)として音源の速さは音速よりずっと遅い ($v \ll V$) としてきました。しかし, 世の中, 超音速ジェット機というのがあり, ジェット機の速さは音速を超えます。このような場合, ドップラー効果はどうなるのでしょうか。音源が静止している観測者に近付く場合のドップラー効果の式 (3.4.1) に入れて計算すると $V < v$ なので負の振動数と妙な結果が得られますが, もともと音はジェット機より遅れてやってくるのでこの式は適用できませんね。

さて, §3.4.1 の右図を見てください。右のほうに寄った波面の皺(しわ)はジェット機が音波速と同じになったときある限界点に達しますね(もうこれ以上皺ができない)。この瞬間爆発的な圧力波が生じ, これは衝撃波と呼ばれます。衝撃波面は音源(ジェット機) S を頂点とする円錐状になり, 頂角の半分の角 θ は

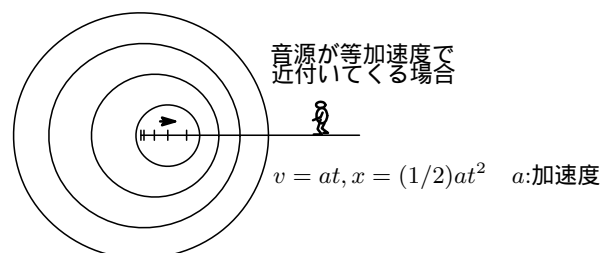
$$\sin \theta = \frac{V}{v}$$

で与えられます。



さて, 衝撃波が通り過ぎた後は, 音源が観測者から遠ざかる場合のドップラー効果となり, (3.4.3) の式で計算できます。

- (3) 音源が等加速度運動している場合 ドップラー効果の話の場合, 音源は等速運動の場合のみ取り扱われます。しかし, 等加速度運動している場合はどうなるのか気になりますか?



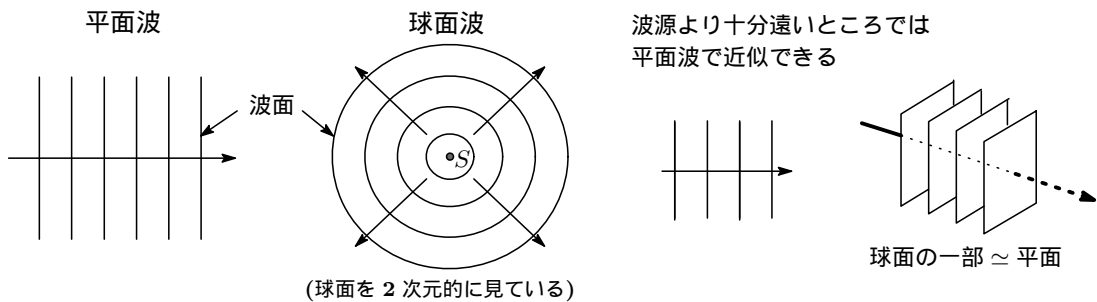
¹⁷ 音波は縦波の疎密波ですが, 便宜上横波で描いています。

ということで作図で確かめました。図を見ると次第に振動数が高くなっていくのが分かります。

3.5 波の回折・反射と屈折

3.5.1 波の進行方向と波面

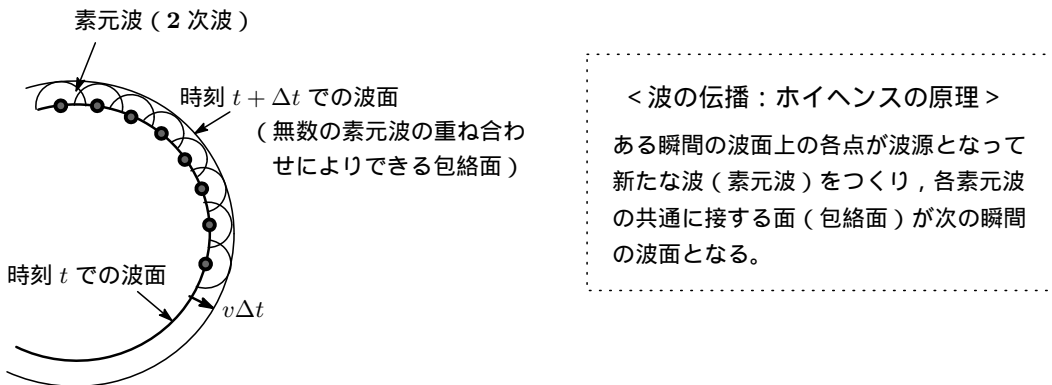
いままでは x 軸方向に伝播する波のみを考えてきましたが、一般的には波は 3 次元空間を伝播します。ある時刻で、位相の等しい点を連続的につないでできる面を波面、波面に垂直な線を射線といい、これは波面が移動する方向を示します。波面が平面になる波を平面波、波面が球面となる波を球面波といいます¹⁸。



また、水面に石を落とすと波は円形に広がっていきますが、この波を円形波といいます。

3.5.2 ホイヘンスの原理

ホイヘンス¹⁹の原理は波の伝播について述べたもので、「波の伝播は、ある時刻における波面上の各点を波源とする、伝播してきた波と同じ振動数で同じ速さを持つ 2 次的な球面波が生まれ、それらが重なった波の波面が次の瞬間の波面となって伝播していく」というものです。第 2 の新しい波を素元波とか 2 次波といいます。先ほど球面波は波源 S を中心とした同心球面状に広がっていくことを言いましたが、これをホイヘンスの原理を使って図説すると次のようになります。



ホイヘンスの原理を使うと波の伝播、反射、屈折、回折などの現象を説明することができます。ただし、光の回折現象を“ホイヘンスの原理”だけで上手く説明はできない欠陥を持っており、この点を改良したのが ホイヘンス - フレネルの原理 で、一般にはこれをホイヘンスの原理といっています²⁰。

¹⁸ 球面波でも波源より十分遠く離れたところでは平面波で近似できます。

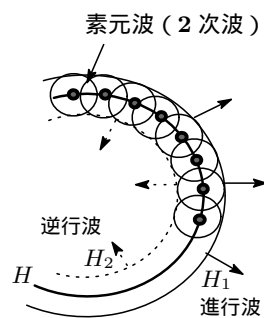
¹⁹ Christiaan Huygens : 1629-1695 年 オランダの数学者、物理学者、天文学者。

²⁰ ホイヘンスの原理の数学的に厳密な表現は Kirchhoff (Gustav Robert Kirchhoff : 1824-1887, ドイツの物理学者) により与えられ、Kirchhoff の積分表示といわれます。

メモ1：ホイヘンスがどのようにしてその原理を見つけたか、少し紹介しておきます。当時、光の本性についてニュートンは粒子説、ホイヘンスは波動説を唱えました（粒子と波動、まさに量子力学の先駆け？）。ホイヘンスは、光の本質は何らかの媒質における波動であるとし、光の波を伝える仮想的な媒質としてエーテルの存在を主張しました。光は縦波の性質を持ち、振動を伝える媒質のエーテルは弾性的な微粒子からできており、波はエーテル粒子の弾性衝突により進むと考えました。この結果、エーテルの微粒子は各球面波の中心となり、伝播する波の波面は無数の球面波（素元波）の波面に共通に接する曲面（包絡面）であると考えられています。ホイヘンスはこの原理を使って、光の直進、反射、屈折の法則を導くことに成功しました。尚、ホイヘンスの原理で考える素元波は波面を構成する手段として仮想的に考えるものであって、それ自体が観測されるものではありません。

蛇足：その後の研究により、光は横波であり、また、エーテルの存在はアインシュタインの特殊相対性理論により否定されていることはご存知の通りです。

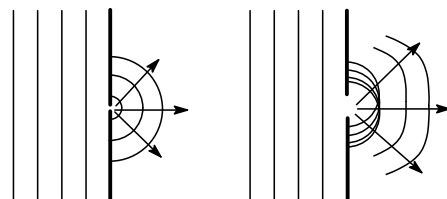
メモ2：素元波の包絡面で形成される波面が進行方向の波の波面となりますが、実は波の進行方向の後ろの素元波の包絡線になぜ次の波面ができないのか？というのがホイヘンスの原理と欠点とされ、これはホイヘンス自身にも説明できない点でした。このホイヘンスの原理の欠陥を解決し、逆光波は存在しないことを明らかにしたのがフレネルです。彼はホイヘンスの原理では考慮されなかった素元波の干渉を考慮し、素元波が互いに干渉し合う結果、逆行波は存在し得ないことを明らかにしました。それから約200年後、キルヒホッフによりホイヘンス-フレネルの原理を光の波動方程式と結びつけた数学的定式化がなされました。



<ホイヘンスの原理の欠陥>

素元波の包絡面 H_1 が進行波の波面となって波は進行していくが、素元波の包絡面 H_2 も同時に形成されるはずで、この包絡面 H_2 による逆行波も生じるが、現実には存在しない。

《メモ3》ホイヘンスの原理と回折現象



隙間が微孔だとその間にできる素元波の波源は少ないので隙間を抜けた波は球面波となって拡がる。

一方、隙間がひろいと沢山の素元波の波源ができるので隙間を抜けた波は平面波的な波となって拡がる。

いずれにしても衝立の向こうの音が聞こえるのはこのおかげです。

波の回折

波が障害物の背後にまで回って伝播する現象を波の回折といいます。回折は波動に特有の現象であり、回折現象が見いだされればそれは波である証拠ということになります。平面波が一つのスリットをもつ衝立に入射したとき、スリットからでた波はどのように拡がっていくか（回折していくか）のイメージ図を右に示します。

さて、スリットの開口長の大小（波長との相対比較において）によって波の回折の具合はどのようなになるのでしょうか。開口長を短長に変えて行った場合の波の回折状況を次頁に示しています。

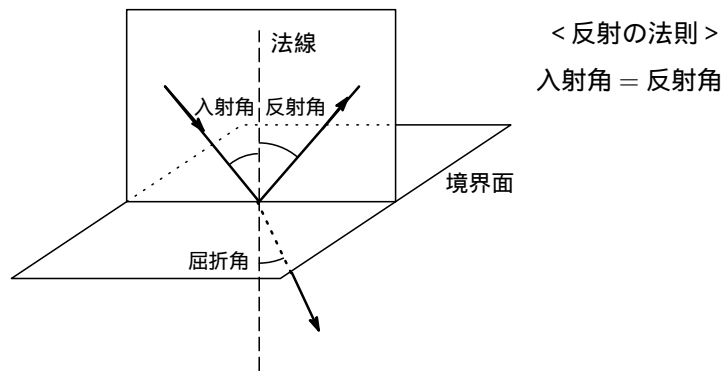
- (A) 開口長さが小さい… 波はスリットの裏側まで回りこんでいく (回折が大きい)。
- (B) 開口長さが中程度… 波のスリット裏側への回り込みは比較的少ない (回折は中程度)。
- (C) 開口長さが大きい… 波のスリット裏側への回り込みは少ない ~ 回り込みはなくなる (回折は小さいか殆ど回折しなくなる)。

波の反射と屈折

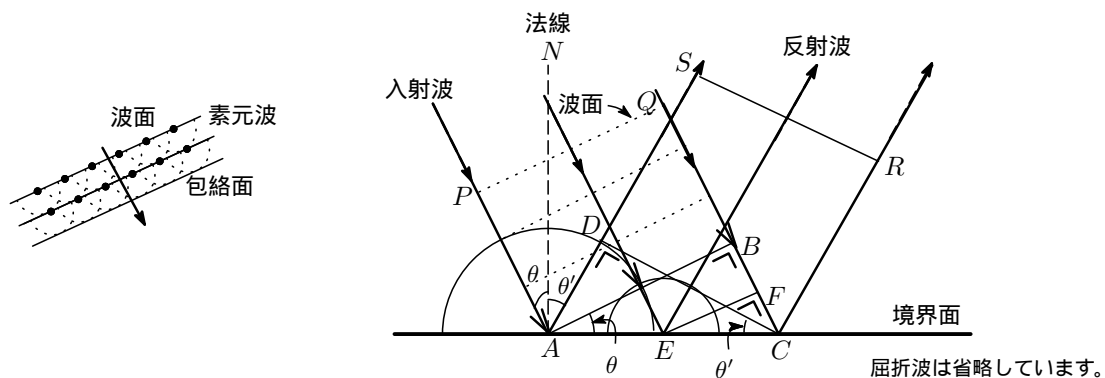
(1) 波の反射 波は違った媒質や物体 (これを境界面といいます) にあたると、反射したり屈折したりします。屈折する波が存在しない場合は入射波はすべて反射し、これを全反射といいます。

反射の法則: 「波が境界面に入射するとき、入射角と反射角は等しい」

この法則は、音波、光波などすべての波動について成立する基本的で大変重要な法則です。



反射の法則をホイヘンスの原理を使って説明します。下図を参照ください。



波が PA, QB の方向に進んでいるとします。 AB の波面上の各点が順次境界面 AC にぶつかっていきますが、そのぶつかる点が波源となって素元波が生じ、波 QB が境界面 C に達した時には点 A 、点 E を波源とする素元波は図のように拡がり、各素元波の重ねあわせでできた包絡面、つまり波面 CD を形成し、波は DS, CR の方向に進んでいます。入射角を θ 、反射角を θ' とすると、 $ADC \equiv CBA$ (合同) なので $BAC = DCA$ 。また、 $PAN = CAB$ 。これらのことから反射の法則である「入射角 $\theta =$ 反射角 θ' 」となることが証明されます。

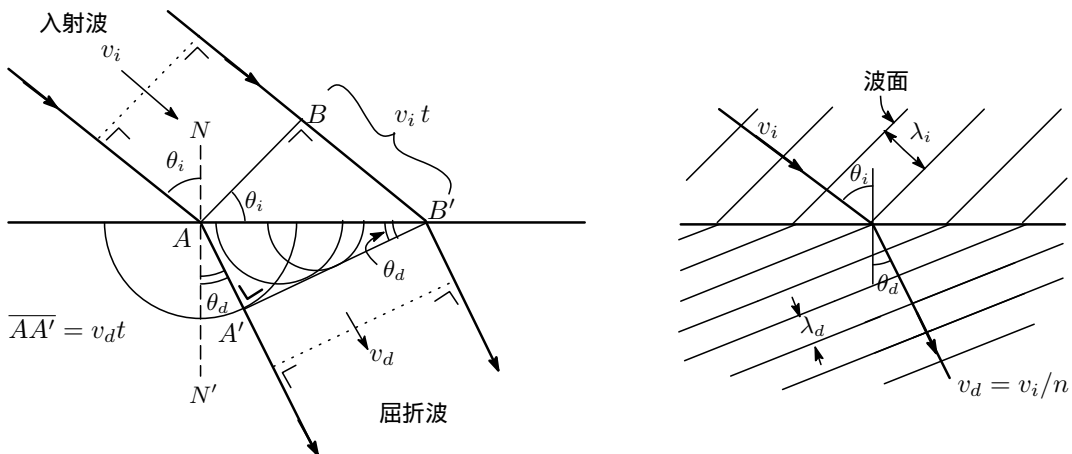
(2) 波の屈折 波は異なった媒質 () に入射するとき、境界面で進路が曲がります。これを波の屈折といいます。これは波の伝播速度が変わることが原因で、その結果波長も変わります。屈折の度合いはこれらの変化する量の比で表されます。尚、波が媒質 から媒質 へと進むとき、境界面の部分では双方とも同じ周期で振動していますので振動数が変わるということはありません。

屈折の法則 (スネル²¹の法則): 進路の曲がり具合は屈折率 n_{12} で表され、入射角 θ_i ($0 < \theta_i \leq \pi/2$), 屈折角を θ_d , また、媒質 , における波の速さをそれぞれ v_i, v_d とすると、屈折率 n_{12} は

$$\begin{cases} n_{12} = \frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_d} \\ n_{12} = \frac{v_i}{v_d} \end{cases} \quad (3.5.1)$$

で表されます。媒質 から媒質 への屈折率 n_{12} の値は、媒質 と媒質 について一定で、これを屈折の法則あるいはスネルの法則²²といいます。ちなみに光の空気 () に対する水 () の屈折率は $n_{12} \doteq 1.33$, 空気に対するガラスの屈折率は $n_{12} \doteq 1.5$ です。

屈折の法則をホイヘンスの原理を使って説明します。下図を参照ください。



B の波が t 秒後に B' まで来たとします。既に A に達していた波はホイヘンスの原理により点 A を波源とする素元波となつて t 秒後には半径 $\overline{AA'} = v_d t$ の半球面を形成しています。このとき、境界面の各点からでた素元波もそれぞれ半球面を形成し、それらの包絡線が屈折波の波面となります。図より

$$\frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_d} = \frac{\overline{BB'}/\overline{AB'}}{\overline{AA'}/\overline{AB'}} = \frac{\overline{BB'}}{\overline{AA'}} = \frac{v_i}{v_d} \quad (3.5.2)$$

これは先ほどでてきた (3.5.1) の式ですね。屈折に際して波の振動数は変化しないので²³, 振動数を ν とすると

$$\frac{v_i}{v_d} = \frac{\nu \lambda_d}{\nu \lambda_i} = \frac{\lambda_i}{\lambda_d} \quad (3.5.3)$$

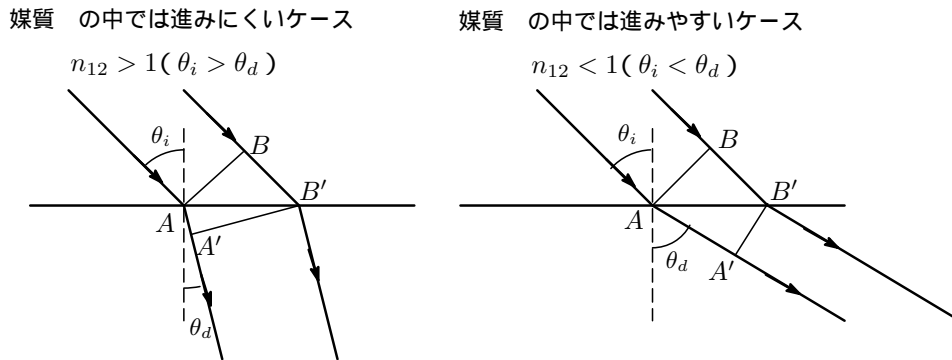
と表すことができます。進みにくい媒質に入った波は (進みにくいので) 速さを落とし、単位時間に進む距離が短くなる、つまり波長が短くなるわけです。くだいようですが、作図的には、(3.5.2) より $v_d < v_i \rightarrow \overline{AA'} < \overline{BB'}$ となつて、媒質 に入った波は法線方向にグッと折り曲げられること

²¹ Willebrord Snel van Roijen : 1591-1626 年 オランダの数学者・物理学者。水中の物体の浮かび上がりを観察し、空気中の長さとお水中の長さの比が見る方向に関係なく一定ということを見出し、1621 年にスネルの法則を発見。

²² ここでいう屈折率は媒質 に対する媒質 の屈折率で相対屈折率と呼ばれます。光の屈折の場合など、媒質 を真空とした場合の屈折率は絶対屈折率と呼ばれます。ただし、絶対屈折率は光についてのみの概念という点に注意ください。真空中では光以外の波は存在しないですから。

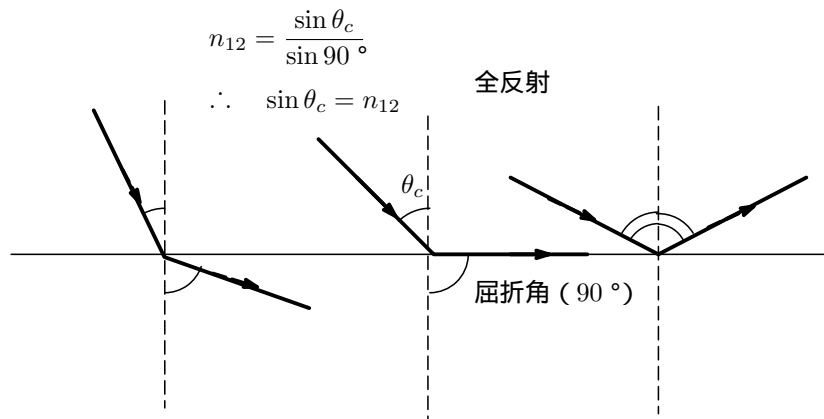
²³ 屈折時になぜ振動数は変化しないのかという疑問に対しては次のようなイメージでどうでしょうか。波が媒質 から に入るとき、媒質 での振動 (1 秒間あたり媒質 をコンコンと叩く回数というイメージ) により媒質 に同じ数だけの振動を与えるので、屈折前後で波の振動数は変化しない。

がわかります。同様に、媒質 n_1 が媒質 n_2 より進みやすければ、媒質 n_2 に入った波は逆に境界面の方にグッと折れ曲げられることがわかります。



波の全反射

全反射は波が界面で全部もとの媒質に反射する現象で、全反射は波の速さがより速く進む媒質に入る場合に生じます。そして全反射が始まる最小の入射角を臨界角 θ_c といい、このとき屈折角は 90° となります。臨界角を測定できれば、それから媒質 n_1 に対する媒質 n_2 の屈折率は、 $n_{12} = \sin \theta_c$ より求められます。



音波の空気中の速さは約 340m/s で水中では約 1500m/s とされています。したがって音波が空気から水で入射する場合、境界面の方向にグッと折れ曲がります。臨界入射角を越えると音波は全反射し、水中には伝播しません。先ほどの音波の速さより屈折率を求めると $n_{12} = 340/1500 = 0.23$ となり、臨界角は $\sin \theta_c = 0.23$ より $\theta_c = 13.3^\circ$ が得られます。余談ですが、魚釣りで“岸で大きな音を立てても魚は聞こえんよ～”といわれる根拠は音波の水面での全反射がある訳ですね。

3.6 光の反射と屈折

光はホイヘンスの予想と異なって横波で、これは X 線や γ 線などの電磁波の一種です。電磁波は空間の電場と磁場の変化によって形成された波で、この周期的な変動が空間に横波となって伝播していきます。つまり、空間そのものがエネルギーを持って振動する現象なので波を伝える媒質が何もない真空中でも伝わっていきます。(エーテルの存在は不要) 真空中の光速は通常 c と書かれます。 $c = 2.9979 \times 10^8\text{m/s}$ で、1 秒間に地球を 7 周半回転する速さですね。電磁波についての詳しいお話は電磁気学のセクションのところまでできますので、ここではこれ以上立ち入らないことにします。

3.6.1 絶対屈折率

光速²⁴はアインシュタインの特殊相対性理論より不変²⁵とされており、光速は不変だから真空以外の物質の中でも光速は真空中を伝播する速さと同じだと誤解されているムキもおられますが、真空以外の物質中では、光速は真空中より遅くなります²⁶。屈折率は(3.5.1)で示されたように各媒質中の波の速さの比でした。物質の屈折率を n とし、物質中での光速を c' とすると

$$n = \frac{c}{c'} (> 1) \quad (3.6.1)$$

で定義される値を絶対屈折率といいます。つまり、真空に対する物質の屈折率ですね。真空の絶対屈折率は1なので、物質の絶対屈折率は通常1より大きくなります。媒質 1 、 2 の絶対屈折率をそれぞれ n_1 、 n_2 とすると、 1 に対する 2 の屈折率 n_{12} は

$$n_{12} = \frac{n_2}{n_1} \quad (3.6.2)$$

となります。この証明は項の「累屈折」のところでやります。

3.6.2 光の反射と屈折

セクション 3.5 で学習したように反射の法則とスネルの法則が成立します。

屈折光線の逆進

媒質 1 から 2 へ入射する場合、入射角を θ_i 、屈折角を θ_d とすると、媒質 1 に対する媒質 2 の屈折率 n_{12} は $n_{12} = \sin \theta_i / \sin \theta_d$ で与えられました。逆に、媒質 2 に対する媒質 1 の屈折率を n_{21} とすると

$$\begin{cases} n_{12} = \frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_d} \\ n_{21} = \frac{\sin \theta_d}{\sin \theta_i} \end{cases} \longrightarrow n_{21} = \frac{1}{n_{12}} \quad (3.6.3)$$

となります。

累屈折

ここでは、次々と異なる媒質に光が伝播していく場合の累屈折について考えていきます。媒質 $1 \sim 3$ における光速をそれぞれ v_1 、 v_2 、 v_3 とすると(3.5.2)より

$$\begin{cases} n_{12} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v_1}{v_2} \\ n_{23} = \frac{\sin \beta'}{\sin \gamma} = \frac{v_2}{v_3} \\ n_{31} = \frac{\sin \gamma'}{\sin \alpha'} = \frac{v_3}{v_1} \end{cases} \longrightarrow n_{12} \cdot n_{23} \cdot n_{31} = 1 \quad (3.6.4)$$

また、図より $\beta = \beta'$ 、 $\gamma = \gamma'$ なので

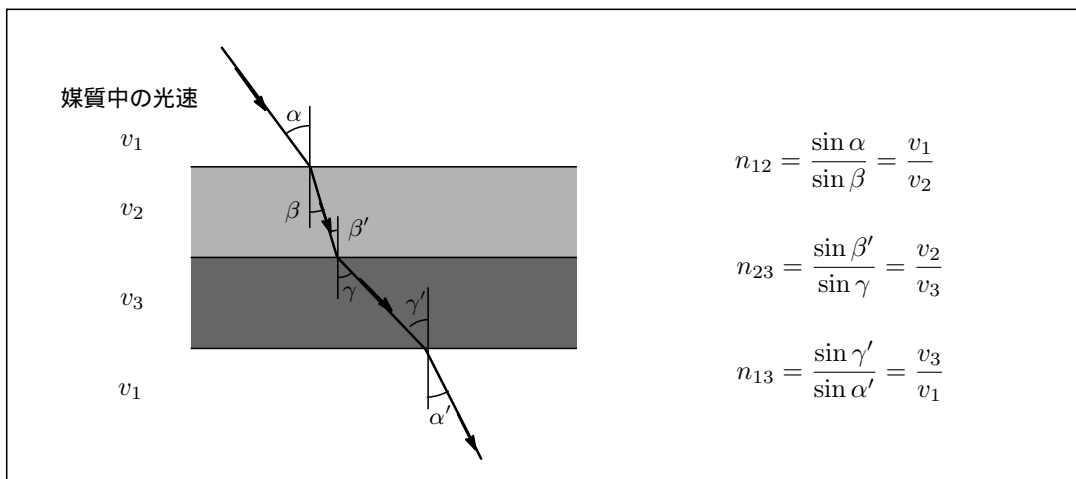
$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \times \frac{\sin \beta'}{\sin \gamma} \times \frac{\sin \gamma'}{\sin \alpha'} = 1 \longrightarrow \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha'} = 1 \quad \therefore \alpha = \alpha' \quad (3.6.5)$$

となることが分かります。

²⁴ 真空中の光速を通常 c と書きますが、

²⁵ 光速度は等速度運動する座標系(慣性座標系)から見ても一定。

²⁶ これは光の電磁場と媒質が相互作用するのでそれらに引っぱられて光速は遅くなるというイメージですね。



さて、上図で媒質を真空とすると n_{23}, n_{31} は (3.6.3) より絶対屈折率 $1/n_2, n_1$ となるので、(3.6.3) より

$$n_{12} \cdot \frac{1}{n_2} \cdot n_1 = 1 \quad \longrightarrow \quad n_{12} = \frac{n_2}{n_1}$$

これで (3.6.2) が証明されます。

全反射と臨界角

全反射は、屈折率の大きい媒質から小さい媒質へ光が入射する場合に起こります。全反射は起きる最も小さな入射角を臨界角といい θ_c で表しました。 n_1 を媒質の絶対屈折率、 n_2 を媒質の絶対屈折率とすると、臨界角 θ_c は次式で与えられます。

$$\theta_c = \sin^{-1} \left(\frac{n_2}{n_1} \right), \quad \text{ただし}^{27} \quad \frac{n_2}{n_1} < 1 \quad (3.6.6)$$

この式からも分かるように、 $n_1 < n_2$ の場合には全反射は起こりません。ちなみに、密媒質から疎媒質に光が入射する、例えば水 空気やガラス 空気の臨界角は次の通りです。

$$\left(\begin{array}{ll} \text{水 空気} & \theta_c = 48.5^\circ \\ \text{ガラス 空気} & \theta_c = 42^\circ \end{array} \right) \quad (3.6.7)$$

3.6.3 フェルマーの原理

光の反射。屈折の法則はホイヘンスの原理で説明できますが、1661年にフェルマー²⁸は「二点間を結ぶ光の経路は、その所要時間を最小にするものである」、つまり「光は最短光路を通る」という原理を発見しました。真空中では最短光路は文字通り一直線ですが、屈折率の異なる媒質中を通るとき、境界面で光の道筋が曲がり、最短光路は一直線ではなくなりますね²⁹。

真空中の光速を c 、任意の媒質中の光速を v とすると (3.6.1) より

$$v = \frac{c}{n} \quad (3.6.8)$$

n は媒質の絶対屈折率です。フェルマーの原理を使えば、ホイヘンスの原理を使わなくても屈折の法則を導くことができます。以下に、そのことを調べていきます。

²⁷ $\sin^{-1} x, \quad |x| \leq 1$

²⁸ Pierre de Fermat: 1601-1665年 フランスの数学者、法律家。“ n が2より大きい自然数であれば $x^n + y^n = z^n$ を満たす自然数 x, y, z は存在しない ”というフェルマーの定理で有名。ちなみに約350年後の1995年5月イギリスの数学者ワイルズによりその正しさが証明された。日本の数学者谷山・志村の貢献が大きい。

²⁹ このように光を波動として捉えるのではなく幾何学的な線として捉えるのを幾何光学といいます。

光路長

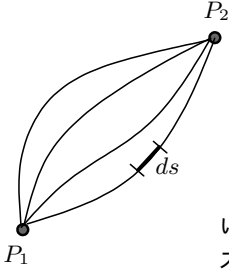
さて、ここで光路長という概念を導入します。普通、長さといえば幾何学的な距離を意味しますね。これに対して光路長というのは、同じ時間をかけて光が進む路（みち）の長さのことで、光が進む実際の“幾何学的な距離”が等しくなくても、光が同じ時間をかけてその距離を進むのであれば、それらの光路長は等しいということになります。いま、ある媒質中の2点 P_1, P_2 をとって、その間の微小な幾何学的な距離を ds とします。光の速さは v ですから ds を進むに要する時間を dt とすると $dt = ds/v$ で与えられます。光が P_1 から P_2 へ達するに要する時間を T とすると、これ微小時間を足し合わせればよい（積分）ので

$$T = \int_{P_1}^{P_2} \frac{ds}{v} = (1/c) \int_{P_1}^{P_2} n ds \quad (3.6.9)$$

と書けます。上の式の $\int_{P_1}^{P_2} n ds$ は距離の次元を持ち、光路長とか光学的距離と呼ばれます。

フェルマーの原理とスネルの法則

フェルマーの原理は「光は光路長が最小となるような道を通る」というもので、光路長は $\int_{P_1}^{P_2} n ds$ で与えられますから、この値が最小値をとる光路が実際に光が通る路ということになります。



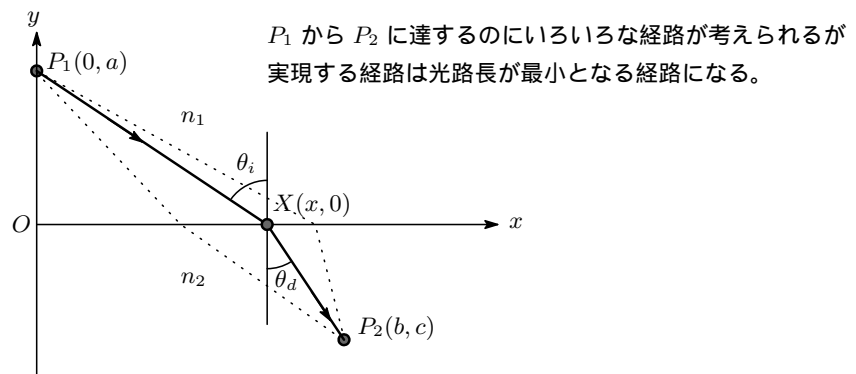
<フェルマーの原理>

光線が P_1 から P_2 まで行く時間を T とすると
実際には光線は $\delta T = 0$ となる路を通る。

$$\delta T = \delta \int_{P_1}^{P_2} (1/v) ds = (1/c) \delta \int_{P_1}^{P_2} n ds = 0$$

いろいろな経路が考えられるが $\delta T = 0$ となる経路（その経路よりちょっとでもズレると $\delta T \neq 0$ ）が実際の光の経路になります。

では、具体的にどうして求めるのかということですが、数学的には変分法という手法を使います。これにより屈折の法則が導かれますが、ここでは変分法の詳細には触れず直接的に屈折の法則を導出することにします。



媒質 n_1, n_2 の屈折率をそれぞれ n_1, n_2 とします。経路 $P_1 \rightarrow OX \rightarrow P_2$ の光路長を L とすると

$$L = n_1 \sqrt{x^2 + a^2} + n_2 \sqrt{(b-x)^2 + c^2}$$

与えられます。経路をわずかにずらすことは点 X の位置をずらすことにあたるので、 x を変化させたとき L が極値（最小値）となる条件を求めればよいこととなります。それは L を x で微分したものが 0

という条件となるので

$$\frac{dL}{dx} = \frac{n_1 x}{\sqrt{x^2 + a^2}} - \frac{n_2(b-x)}{\sqrt{(b-x)^2 + c^2}} = 0$$

図より

$$\begin{cases} \sin \theta_i = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} \\ \sin \theta_d = \frac{b-x}{\sqrt{(b-x)^2 + c^2}} \end{cases}$$

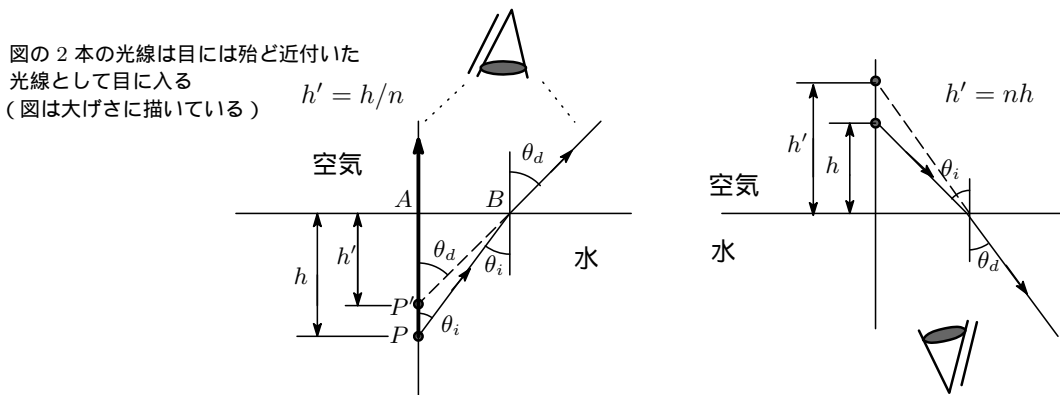
なので、上式を整理すると

$$n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_d \rightarrow \frac{n_2}{n_1} = n_{12} = \frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_d}$$

となり、屈折の法則（スネルの法則）が得られます。

3.6.4 像の浮き上がり

水を入れたコップの中に割り箸を入れると水中の割り箸が浮き上がって見えますね。ここではこの現象を考えます。



水中の深さ h にある物体を空气中から水面に垂直な方向から見た場合、物体は h' に浮き上がって見えます。ではどれだけ浮き上がって見えるかを求めます。空気から水の屈折率を n とすると、水から空気への屈折率は (3.6.3) より $1/n$ となります。スネルの法則より

$$\frac{1}{n} = \frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_d} = \frac{\overline{AB}/\overline{BP}}{\overline{AB}/\overline{BP'}} = \frac{\overline{BP'}}{\overline{BP}}$$

真上から見た場合は θ_d, θ_i とも殆ど 0 に等しいので

$$\frac{1}{n} = \frac{\overline{BP'}}{\overline{BP}} \div \frac{\overline{AP'}}{\overline{AP}} = \frac{h'}{h} \quad \therefore h' = \frac{h}{n}$$

となります。空気 水の屈折率は $n = 1.33$ なので $h' = h/1.33 \doteq 0.75h$ と約 25% 程浮き上がって見えることとなります。一方、水中から空气中を見れば（魚の目のように）実際の高さ h の n 倍、つまり $h' = nh$ の高さに見えることとなります。

3.7 光の干渉と回折

3.7.1 光の反射と位相の変化

光が屈折率 n_1 の媒質 から屈折率 n_2 の媒質 へ入射し、その境界面で反射または屈折するとき、反射光の位相は次のように変化します。尚、屈折光の位相は変化しません。

- $\left\{ \begin{array}{l} n_1 > n_2 \text{の時} \dots \text{反射光の位相は変化しない。} \\ n_1 < n_2 \text{の時} \dots \text{反射光の位相は}\pi[\text{rad}] \text{だけ変化する。言いかえると半波長ずれる。} \end{array} \right.$

光は屈折率の小さい媒質中では振動しやすく、屈折率の大きな媒質中では振動しにくいという性質を持っています。セクション 3.1.7 の「定在波」のところで

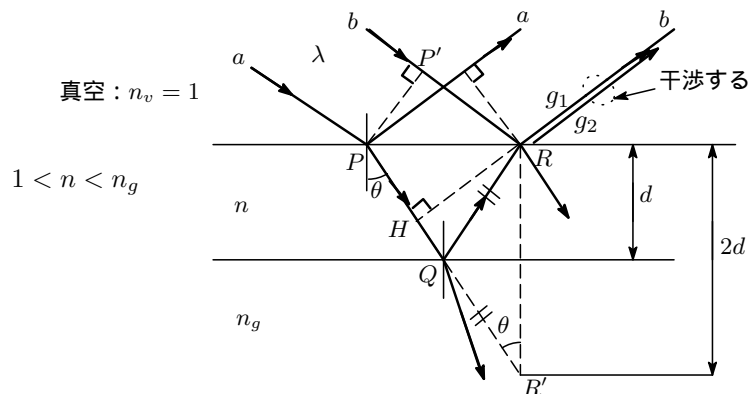
- $\left\{ \begin{array}{l} \text{自由端} \dots \text{反射波の位相は変化しない。} \\ \text{固定端} \dots \text{反射波の位相は}\pi[\text{rad}] \text{だけ変化する。言いかえると半波長ずれる。} \end{array} \right.$

というのがありましたが、これとのアナロジーで見ると面白いですね。

3.7.2 薄膜による光の干渉

光の干渉条件

真空中におかれた屈折率 n_g のガラスの表面に厚さ d 、屈折率 n の薄膜がコーティングされているとします。ただし屈折率は $1 < n < n_g$ の関係にあるものとします（真空の屈折率 $n_v = 1$ ）。真空中での光の波長を λ とし、薄膜に入射した光は図に示すように一部は境界面で反射し、一部は進入していきます。薄膜とガラスの境界点 Q で反射された光はガラスと真空の境界点 R で一部は反射し、一部は真空中に進み (g_2)、 b の反射光 g_1 と干渉します。



入射光 a が薄膜中の点 H に達したとき、入射光 b は薄膜の境界点 R に達します。そうすると出射光 g_2 は光路 $\overline{HQ} + \overline{QR} = \overline{HQ} + \overline{QR}' = \overline{HR}'$ 分余計に旅をしていることになります。光源の同じ点から出る 2 つの光線の通る経路の長さの差を光路差といいますが、今の場合、光路差はこの余計な旅の光路長でそれを Δ とすると

$$\Delta = n\overline{HR}' = 2nd \cos \theta \tag{3.7.1}$$

となります。 $1 < n < n_g$ より、光 a が点 Q で、また光 b が点 R で反射するとき、共に位相が π ずれませんから、反射光が干渉して明るくあるいは暗くなる条件は m を正の整数として

$$\left\{ \begin{array}{l} 2nd \cos \theta = m\lambda \quad (m = 1, 2, 3, \dots) \quad \dots \text{明るくなる} \\ 2nd \cos \theta + \frac{1}{2}\lambda = m\lambda \rightarrow 2nd \cos \theta = (m - \frac{1}{2})\lambda \quad \dots \text{暗くなる} \end{array} \right. \tag{3.7.2}$$

となります。

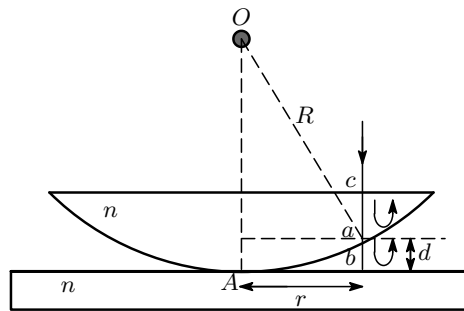
メモ 3 : 空気 (n_a) 石鹸膜 (n_s) 空気 (n_a) という場合は $n_a < n_s$ なので空気と石鹸膜の境界面での反射光の位相は π ずれませんが、石鹸膜 空気の境界面の反射光の位相は変化しません。したがって光路長 Δ が波長の整数倍となれば g_1, g_2 は互いに打ち消しあって暗くなり、一方、半波長の端数があれば重なり合って明るく

なります。

$$\begin{cases} 2nd \cos \theta = m\lambda & (m = 1, 2, 3, \dots) \quad \dots \quad \text{暗くなる} \\ 2nd \cos \theta = (m - \frac{1}{2})\lambda & \dots \quad \text{明るくなる} \end{cases} \quad (3.7.3)$$

ニュートン・リング

半径 R の球面をもつ平凸レンズと板ガラスを重ね、真上から単色光を当て上から眺めると同心円状の縞模様が見えます。この縞模様をニュートン・リングといいます³⁰。縞模様はレンズ下面で反射した光 a と板ガラスの上面で反射した光 b の干渉の結果生じます³¹。凸レンズの半径 R (曲率半径) はニュートンリングの半径を測定することから求められます。



レンズと板ガラスの間隔 d は

$$d = R - \sqrt{R^2 - r^2} = R - R\sqrt{1 - (r/R)^2} \doteq R - R\left(1 - \frac{r^2}{2R^2}\right) = \frac{r^2}{2R}$$

となります。ただし $|x| \ll 1 \rightarrow (1+x)^\alpha \doteq 1 + \alpha x$ の近似式を使いました。したがって光 b と c の光路差は

$$2d = \frac{r^2}{R}$$

となります。光がレンズの下面で反射する (a) ととき位相のずれはないですが、ガラス表面で反射する (b) とときには位相は π ずれますね。したがって明るく (明リング) / 暗く (暗リング) なる条件は m を正の整数として

$$\begin{cases} \text{明リング} \quad \dots \quad \frac{r^2}{R} = \left(m - \frac{1}{2}\right)\lambda & (m = 1, 2, 3, \dots) \\ \text{暗リング} \quad \dots \quad \frac{r^2}{R} = m\lambda \end{cases} \quad (3.7.4)$$

中心から m 番目の暗リングの半径を r_m とすると

$$r_{m+n}^2 - r_m^2 = (m+n)\lambda R - m\lambda R = n\lambda R$$

となつて、これから凸レンズの半径 R は

$$R = \frac{r_{m+n}^2 - r_m^2}{n\lambda} \quad (3.7.5)$$

³⁰ ニュートン (Isaac Newton: 1642- 1727, 英国) は明暗がガラス間の間隔によって周期的に決まることを見出しましたが、彼は光の粒子説を主張していたのでこの現象の説明に非常に苦慮したとのこと。

³¹ 写真はココ

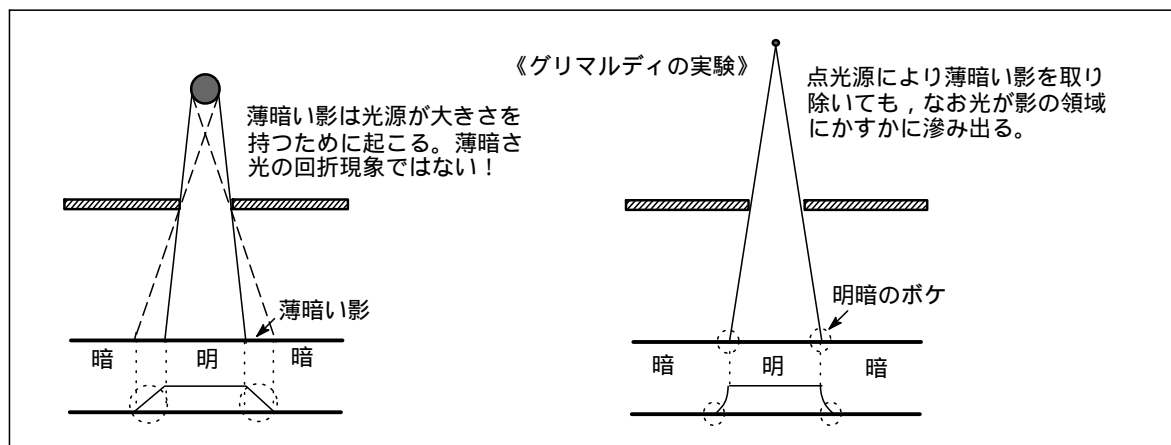
ニュートン・リングはレンズの曲率半径の測定やガラス表面が完全な平面になっているかなどの検査に利用されています。

【註1】 a と b の光の干渉を考えましたが、レンズ表面 c の影響は考えなくてよいのか？との疑問をもたれるかも知れません。簡単に説明をしておくと、 b と c の光路差は非常に小さいが、 a と b の光路差はそれに比べると非常に大きい。ガラス表面は必ずしも滑らかでなく、それによる乱反射が生じます。 b と c では光路差が小さいので乱反射の影響は小さく鮮明な干渉像を観察できますが、 a と b では光路差が大きいので乱反射の影響を受け、仮に干渉したとしても像がぼやけて見えることとなります。これらのことから a と b の光の干渉だけを考えればよいというわけです。

【註2】 入射光線が単色光でなくいろいろな波長の光が混じっていると、場所によって異なる色がついて見えます。

3.7.3 グリマルディの実験

今まで、“光は波動”ということ暗黙の前提としてきましたが、歴史的には既に触れたように粒子説と波動説との間で約1世紀にわたり長い論争が続いていました。物体に光を当てると、物体の影の輪郭の境界部（明と暗の境界部）がぼんやりして見えることはよく経験することと思います。このぼんやりして見えることが光の回折現象によると思いがちですが、じつは光源が有限の大きさを持つために起こっている現象なんです。



ホイヘンスの波動説が出る約20年前の1665年、グリマルディ³²は点光源を使った実験をおこない、光が影の領域にわずかににじみ出る（光の回折）ことを観察しています。その後、ヤングやフレネル、フラウンホーファーの実験により、光にも回折という波に共通した性質のあることが分かり、光の粒子説から波動説へと大きくパラダイムシフトしていくこととなります³³。

3.7.4 2つの細隙で回折した光の干渉

光の干渉を観察するヤング³⁴が考案した2つのスリットを用いる実験で、ヤングの実験と呼ばれます。右の図は2つのスリットを持つ衝立に平面波が入射し、スリットを通過して回折した波が互いに干渉する状況のイメージ図です³⁵。

さて、わずかな距離を隔てた2つのスリット S_1, S_2 をもつ衝立に、各スリットから等距離にある波源から球面

³² 1618-1663年 オランダの物理学者

³³ 光の本性はなかなか掴みにくく、現代物理学の量子力学によれば、光は粒子であると同時に波動であるということになっています。

³⁴ Thomas Young : 1773-1829年 英国の物理学者

³⁵ 回折格子のアニメーション。

波を照射します。 S_1, S_2 に到達する光は常に位相が等しいので、ホイヘンスの原理により、 S_1, S_2 は同位相、同波長の球面波を送り出す干渉性の波源となります。前方に衝立と平行にスクリーンを置くと、右図 (b) のような明暗の変化（干渉縞）が現れますが、この縞の位置を求めてみます。

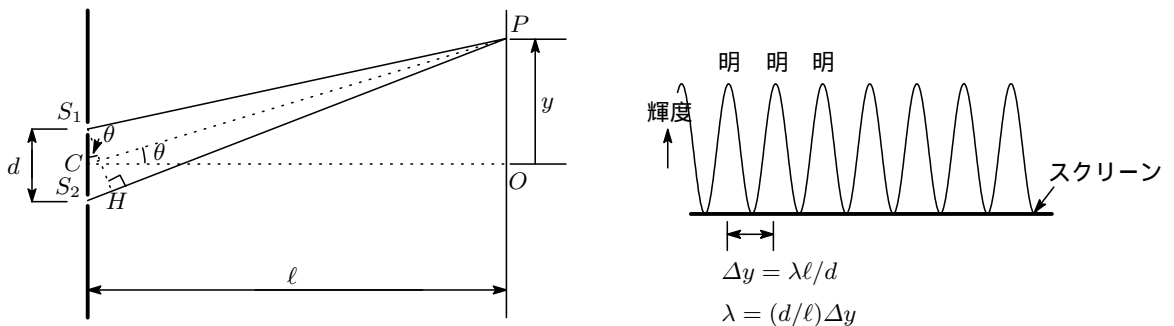
スクリーン上の点 P のスリット S_1, S_2 からの光路差は

$$\overline{S_2P} - \overline{S_1P} = \overline{S_2H} = d \sin \theta$$

衝立からスクリーンまでの距離 ℓ は 2 つのスリットの間隔 d に比べて十分大きいとし、 $\ell \gg y$ の範囲だけを考えます。そうすると θ は微小角となり、 $\sin \theta \simeq \tan \theta$ と近似できるので

$$d \sin \theta \simeq d \tan \theta = d \frac{y}{\ell}$$

この光路差³⁶が波長 λ の整数倍のところは光が強め合って明るくなり、半波長の端数があれば消しあって暗くなります。



$$\begin{cases} \text{明: } d \frac{y}{\ell} = m\lambda & \rightarrow y = m \cdot \frac{\lambda \ell}{d} & (m = \pm 1, \pm 2, \dots) \\ \text{暗: } d \frac{y}{\ell} = \left(m + \frac{1}{2}\right) \lambda & \rightarrow y = \left(m + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{\lambda \ell}{d} & (m = \pm 1, \pm 2, \dots) \end{cases} \quad (3.7.6)$$

干渉縞のピッチを Δy とすると $\Delta y = \lambda(\ell/d)$ となります。 λ, ℓ が一定の場合、スリットの間隔 d を大きくしていくと干渉縞は見えなくなっていきます。の測定より光の波長を求めることができます。

3.8 光の偏り（偏光）

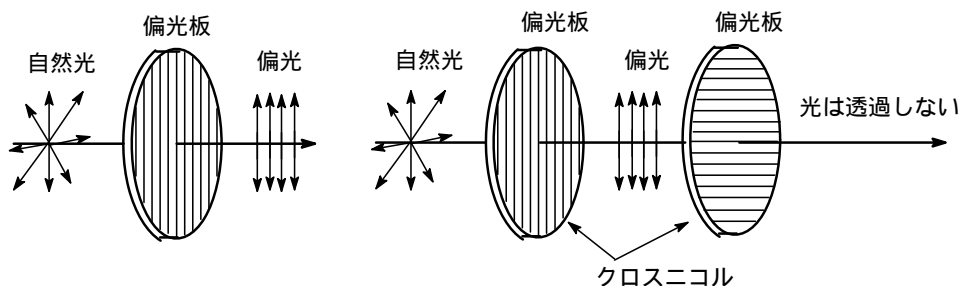
光は電磁波の一種で横波であることは既に述べました。横波である光の振動が 1 方向へ ^{かたよ}偏ったものを偏光といいます。光源を出たままの光は自然光といい、自然光は光の進行方向に垂直な平面上のどの方向にも一様に振動しています。自然光に対して、偏光は光の進行方向に垂直な平面上の特定の方向にのみに偏って振動する光³⁷です。ちなみに、音波は縦波で、光のように偏りの現象はありません。

³⁶ S_2 から送り出された波と S_1 から送り出された波を比較すると点 P に達するとき $2\pi \overline{S_2H} / \lambda$ だけの位相の遅れがあります。

³⁷ 詳しくはこの偏光を直線偏光とか平面偏光と呼んでいます。

3.8.1 反射による偏光

ガラスや水に自然光があたると、その表面で一部分の光は反射し、他の大部分の光は屈折して入ります。反射光の一部の光は偏光し、その振動面は入射面に垂直となります³⁸。また、屈折光も偏光を含み、その振動面は入射面に平行となります。



いま、入射角 θ 、屈折角を ϕ とします。反射光に含まれる偏光の割合は入射角 (θ) に関係し、反射光が完全に偏光状態になるときの入射角を偏光角といいます。偏光角 θ は屈折角 ϕ と $\theta = \pi/2 - \phi$ の関係があり、1815 年英国の物理学者ブルースター³⁹により

「偏光角の正接 (\tan) はその物質の屈折率 n に等しい」

ことが発見されました。これをブルースターの法則 (Brewster's law) といいます。

媒質 に対する媒質 の相対屈折率を n とすると、 $\theta = \pi/2 - \phi$ のとき、

$$n = \frac{n_2}{n_1} = \frac{\sin \theta}{\sin \phi} = \frac{\sin \theta}{\sin (\frac{\pi}{2} - \theta)} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \tan \theta$$

となります。屈折率が 1.54 のガラスに屈折率 1 の空気中から光が入射する場合のブルースター角は約 57 度となります。尚、ブルースター角での反射光は完全偏光となりますが、屈折光が全部偏光しているわけではないことに留意ください。

3.9 光のドップラー効果

光源と観測者とが相対的に運動しているときは、音波と同様にドップラー効果が起こります。光速を c として、相対速度が 0 のときの光の波長を λ 、相対速度を v ($\ll c$) のときの波長を λ' とすると

$$\begin{cases} \text{近付きつつあるとき} & \lambda' = \left(1 - \frac{v}{c}\right) \lambda \rightarrow \nu' = \left(\frac{c}{c+v}\right) \nu \\ \text{遠ざかりつつあるとき} & \lambda' = \left(1 + \frac{v}{c}\right) \lambda \rightarrow \nu' = \left(\frac{c}{c-v}\right) \nu \end{cases} \quad (3.9.1)$$

となって、波長の差 $\Delta\lambda = (v/c)\lambda$ だけ近づく場合は短く、逆に遠ざかる場合は長くなります。ただし、相対速度が光速 c に近づくとき相対論的なドップラー効果の式となります。

$$\nu' = \sqrt{\frac{c-v}{c+v}} \nu \quad (3.9.2)$$

³⁸ ポラロイドサングラスをかけると水面のキラツキが抑えられ、水中の様子が見やすくなりますね。これは反射の偏光をカットしていることによります。

³⁹ David Brewster 1781-1868 英国の物理学者

ただし，光源が観測者にちかづくときは $v < 0$ 。非相対論的ドップラー効果の式は相対論的ドップラー効果の式の近似式となっていることが分かります。これは各自で確認してください

by *K&N&O&U*

(2009.09.24 了)