少し長い CoffeeBreak となってしまいましたが、寛ぎながら一読いただければ＾＾）

特殊相対性理論（Coffee Break）

◆動く物体の質量は増える！？

◆ローレンツ変換とは？

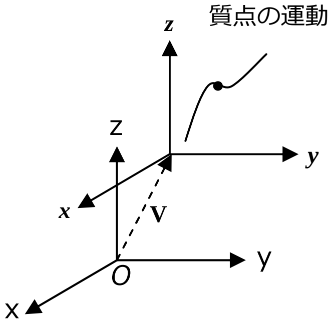
・**A：**特殊相対性理論というのは、最も基本的な仮定としてたった 2 つの原理をもとに構築されているんだね。

・**B 子：**2 つの原理は「**Einstein の相対性原理**」と「**光速度不変の原理**」というモノね。改めて書いておくと

(1) **Einstein の相対性原理：**物理学の基本法則は、すべての慣性系で全く同じ形で表される。

(2) **光速度不変の原理：**すべての慣性系で、光の真空中における速度は、光源の運動状態によらず一定値の値をとる。

・**A：**慣性系ということだけど、力学で質点の運動を考えるとき、まず xyz 座標を設定し、その空間での質点の位置(x,y,z)がどのように時間変化していくか、運動方程式を立てて調べていく。このとき。質点の入っている器というか、空間そのものが動いているとかじっと静止しているとか、という ことは特別に意識していないよね。



慣性座標系とは

絶対座標系(x,y,z)に対して等速度Vで動いている座標系。

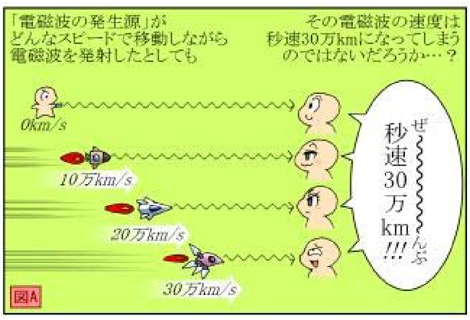
質点の運動状態には何の影響も及ぼさない！

・**B 子：**そうね。慣性系とかガリレイ系といわれるけど、これはニュートンの運動の第 1 法則「**慣性の法則**」が成立する座標系ね。慣性の法則というのは、運動する物体に力が働かないとき、その物体は運動状態を変えずにいつまでも等速直線運動を続けるというモノね。早い話、慣性系というのは xyz 空間の器自体がある絶対的な基準に対して**等速直線運動**している座標系ということね。仮に直線でなく曲線運動すれば速度が変化するので等速にはならないわね。それは兎も角として、座標系が等速運動していても質点に力は一切及ぼさないから、質点の運動には何の影響もないのよ。

・**A：**うん、そうだね。ところで慣性系は 1 つとは限らないわけだ。ある慣性系に対して、等速度直線運動する座標系もまた慣性系ということになるね。

・**B 子：**そうね。Einstein の相対性原理は、いろいろな慣性系が考えられるけど、特別な慣性系というモノはない。**物理法則はすべての慣性系でまったく同じように書き表される**ということを主張しているわけね。

・**A：**よく、特殊相対性理論は加速度運動する物体は取り扱えないといったことを聞いた入りするけど、これは誤解だね、慣性座標系の中で加速度運動する物体は特殊相対性力学でキチンと記述できる。誤解のポイントは慣性座標系が加速度運動をする場合だ。これはもはや慣性座標系とは言えないので、特殊相対性理論の適用外となる。このような場合は**一般相対性理論**が必要になるんだね。



・**B 子：**その通りよ。よく勉強しているわね。

・**A：**それほどでもないけど、大事なポイントだからね。ところで、(2)番目の原理なんだけど、通常、速度 V で走っている電車に乗車している人が速度 v で電車の走行方向にボールを投げたら、電車の外にいる人が見れば V+v の速度でボールが飛んでいくことが観測されるし、逆に電車の走行方向と逆方向に投げれば V−v の速度でボールがとんでいくことが観測される。いわゆる速度の加法則というモノで、ニュートン力学での話。**特殊相対性理論での速度の加法則**はどうなっているんだい。

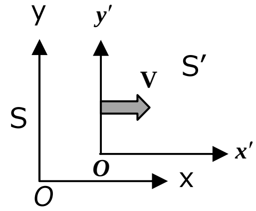
・**B 子：** そうね、特殊相対性理論では電車の外から見たボールの速度をｗとすると

$$\boldsymbol{w} = \frac{\boldsymbol{V} \pm \boldsymbol{v}}{1 + \dfrac{\boldsymbol{V} \times \boldsymbol{v}}{\boldsymbol{c}^2}}$$

となる。±の符号は順方向か逆方向を意味しているのね。

・**A：**ちょっとまってよ~、ボールの速度ｖを光速ｃとすると…オッと、たしかにｗ＝ｃになるね。ついでに電車の速度もＶ＝ｃと光速にすると､､､これもｗ＝ｃとなる。なるほど、光速を超えることはないんだ！

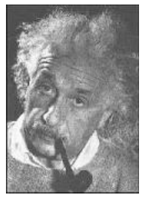
・**B 子：**私達の日常では電車の速度もボールの速度も光速度よりはるかに小さいでしょう。だから先ほど出てきた式の分母のところは１になってしまい、ｗ＝Ｖ±ｖというよく見慣れた式になるのね。つまり、ニュートン力学の速度の加法則は厳密な式ではなく近似式ということね。



・**A：**そういうことなんだ、どんなものでも光速を超えることができないことはＢ子の説明で式的にはわかったけど、なぜだろうかという疑問が残っちゃう｡｡｡

・**B 子：**もっともだわ。特殊相対性理論では速度ｖで運動する物体のエネルギーＥは

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$



で与えられ、v/c が非常に小さい場合、右辺を展開して整理すると

$$E = m_0 c^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} = m_0 c^2 + \frac{1}{2}m_0 v^2 + \frac{3}{8}m_0 v^2\left(\frac{v^2}{c^2}\right) + \cdots \approx m_0 c^2 + \frac{1}{2}m_0 v^2$$

となる。m_0は静止質量と呼ばれる。右辺の第１項は v=0 でも質量 m_0の物体は $E=m_0c^2$ のエネルギーをもつことを示し、m_0c^2 を**静止エネルギー**と呼んでいる。これは**質量とエネルギーは同等である**という画期的な発見になったの。第２項はニュートン力学の運動エネルギーで、相対論的エネルギーE から静止エネルギーを差し引いたものに相当し、速度が小さい時の近似だわね。

そのことは兎も角として、（慣性）質量に光速ｃの２乗を掛けたものがエネルギーと同等だとすると、運動している物体の質量はエネルギーE を光速ｃの２乗で割ったもの（E/c^2）と考えることもできる。そうすると、運動する物体の質量 E/c^2 は、速さが大きくなればなるほど増大することになるわね。運動する物体の質量を M、静止しているときの質量をm_0として、この２つの関係を式で表すと、

$$M = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\, m_0$$

となることが導かれる。M をとくに**相対論的質量**と呼んでいるわ。ｖが光速に近づけばMは無限大に大きくなっていくわね。そこで、ロケットが推進力をドンドンあげてスピードを増していく場合を考えましょう。スピードの増加とともにロケットの質量はドンドン増加し、その結果、次第に速く動くことができなくなってくるわね。ロケットが光速に達すると質量は無限大になるので、それ以上ロケットのスピードが上がらなくなるでしょう。このようなことが、どんなものでも光速ｃを超えることはできないという理由なのね。

・**A：**う~ん、質量とエネルギーは同等という発見はすごいね。僕の疑問も氷解したよ。

ちょっとここらで、特殊相対性理論の基本となる公式をまとめておこう。慣性系Ｓ(x､y､z)に対してｘ軸方向に速度Ｖで等速直線運動している慣性系をＳ‘(x′,y′,z′)とする。そうすると各慣性座標系への変換公式（**ローレンツ変換**）をまとめておくと次のようになる。

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1-(V/c)^2}}, \qquad y' = y, \qquad z' = z$$

$$t' = \frac{t - Vx/c^2}{\sqrt{1-(V/c)^2}}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1-(V/c)^2}}, \qquad y = y', \qquad z = z$$

$$t = \frac{t' + Vx'/c^2}{\sqrt{1-(V/c)^2}}$$

左表の V を$-V$
にしたもの

ニュートン力学のように時間 t を特別扱いしていない。時間も位置座標と同じように変換されるという点が特殊相対性理論のいろいろな結論を導き出す大きなキーとなっているんだね。

・**B 子：** そういうことね。ニュートン力学では x,y,z の位置空間だけを設定し、時間はパラメーターというか特別扱いしていたわね。ところが特殊種相対性理論では時間に光速 c を掛けた c t を第 4 番目の座標軸とする 4 次元時空間という座標系を考えるわけね。4 番目の座標軸の目盛として時間 t に光速 c を掛けるのは x,y,z と同じ長さの次元（[t]×[L]/[T]=[L]）とするためね。

・**A：** いわゆるミンコウスキー空間という奴だね。オッと Coffee が冷めないうちにどうぞ。

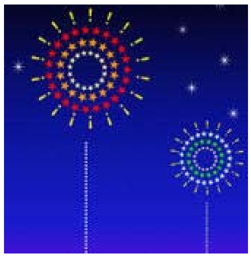
・**B 子：** ここの Coffee はなかなかいけるわね！　ところで先ほど A 君がまとめてくれたローレンツ変換の公式を使って少し今までの復習をしてみましょう、まだ時間はあることだし。。。

・**A：** うん、それはいいだけど、どういうことだい？

・**B 子：** そうね、その 3 で「同時刻は見る立場で同時刻でない」というのを見てきたでしょう。このことをローレンツ変換を使って復習しようということよ。たとえば爆発だとか光が発射されるという事件が起こったとしましょう。その事件がいつ、どこで起こったかを指定するのに 1 つの慣性系 S を考え、事件が起こった場所を x 、時刻を t とするわね。同じ事件を慣性系 S に対して x 軸方向に速度 V で走っている別の慣性系 S′の人が見て、事件は場所 x' 、時刻 t' 起こったと主張する。 2 人の時計は S,S'の座標原点が一致したときに、時計も一致していたとする。この S,S′の 2 人が指し示す場所と時間の間の関係式が**ローレンツ変換**と呼ばれるものね。

$$x' = (x - Vt)\Big/\sqrt{1-\beta^2}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \left(t - Vx/c^2\right)\Big/\sqrt{1-\beta^2} \qquad (\beta = V/c)$$

さて、まったく勝手な 2 つの事件 A、B を考えましょう。事件 A に対しても事件 B に対しても



$$x_A' = (x_A - Vt_A)\Big/\sqrt{1-\beta^2}, \quad t_A' = \left(t_A - Vx_A/c^2\right)\Big/\sqrt{1-\beta^2}$$

$$x_B' = (x_B - Vt_B)\Big/\sqrt{1-\beta^2}, \quad t_B' = \left(t_B - Vx_B/c^2\right)\Big/\sqrt{1-\beta^2}$$

が成り立つわね。ここから問題よ。

（1）慣性系 S で事件 A、B が**「同じ場所」**で**「異なる時間」**に起こったとき、つまり $x_A = x_B$ かつ $t_A \neq t_B$ の場合、慣性系 S′の人からすると

$$t_B' - t_A' = (t_B - t_A)\Big/\sqrt{1-\beta^2}, \quad x_B' - x_A' = -V\,(t_B - t_A)\Big/\sqrt{1-\beta^2}$$

となるわね。この式をよく見ると $t_A \neq t_B$ なので $x_B' \neq x_A'$ となって、慣性系 S′では**2 つの事件 A、B は同じ場所で起こっていない！**　また、2 つの事件は慣性系 S では $t_B - t_A$ の時間間隔で起こったけど、慣性系 S′では**それよりも長い時間間隔 $t_B' - t_A'$ で起こった！**ことになるわね。S と S′では時計の時刻の刻み方が異なるのね！

（2）慣性系 S で事件 A、B が**「同じ時間（同時）」**に**「異なる場所」**で起こったとき、つまり $t_A = t_B$ かつ $x_A \neq x_B$ の場合、慣性系 S′の人からすると

$$t_B' - t_A' = -V\,(x_B - x_A)\Big/c^2\sqrt{1-\beta^2}, \quad x_B' - x_A' = (x_B - x_A)\Big/\sqrt{1-\beta^2}$$

となるわね。2 番目の式からは。慣性系 S′においても 2 つの事件は異なる場所で起こっている。このことは特にどうっていうこともないけど、1 番目の式を見て頂戴。慣性系 S′では**2 つの事件 A、B は同時には起こっていない！**わね。

・**A：** う~ン、同時というのは慣性系によって異なるということはその３で見てきたけど、ローレンツ変換の式を使うとアッサリとでてくるわけだね。その２で「動いている棒は縮んで見える」というのを見てきたけど、ローレンツ変換の公式をつかえばこれまたアッサリとでてくるんだね。

・**B 子：** そうね、折角だから TRY してみる？

・**A：** OK! やってみよう。まず、"長さ"というモノは、ある慣性系で、**棒の両端の位置を同時に測らなければならなかった。** いま、棒は慣性系 S′で静止しているとする。慣性系 S から見れば速度 V で x 軸方向に動いているわけだね。S からみた棒の長さ ℓ は、同時刻 $t_A = t_B = t$ における棒の両端の位置の差 $|x_B(t) - x_A(t)|$ だから

$$\ell = |x_B(t)\text{-}x(t)|$$

と表される。S での棒の両端の位置 x_A, x_B は、S′では $t_A = t_B = t$ としてローレンツ変換により

$$x_A' = (x_A - Vt)\Big/\sqrt{1-\beta^2}, \quad x_B' = (x_B - Vt)\Big/\sqrt{1-\beta^2}$$

と表されるね。。。え~っと、それから S′系での同時刻を設定しなければ。。。ウ~ん！？

・**B 子：** ちょっと待って、この式で注意すべき点は S′での時間 t' 含まれていないでしょ。つまり、S′での同時刻での棒の両端の位置ととらえればいいのじゃないの。

・**A：Oh!** そうだね、うっかりしてそこに気がつかなかった。S′で静止している棒の長さを ℓ_0 とすると、ℓ_0 は

$$\ell_0 = |x_B' - x_A'| = |x_B - x_A|\Big/\sqrt{1-\beta^2} = \ell\Big/\sqrt{1-\beta^2}$$

となる。これから

$$\ell = \ell_0\sqrt{1-\beta^2}$$

がでてくるね。

・**B 子：** まだ少し余白が残っているようなので、ちょっと次のことを考えてみようかしら。先ほど時間軸を加えた４次元時空間のことについて少し触れたわね。４次元空間での微小体積要素を dv とすると dv=dx·dy·dz·dt となる。棒の長さが縮んだり、時間が遅れたりするんだけど、４次元空間での微小体積要素はローレンツ変換に対して不変になるかどうかということ。

・**A：** そうだな、長さは x 方向だけがローレンツ変換をうけ、y と z 方向の長さは変化しないよね。つまり

$$dx' = d(x_A' - x_B') = d(x_A - x_B)\sqrt{1-\beta^2} = dx\sqrt{1-\beta^2}, \qquad dy = dy', \qquad dz = dz'$$

となる。３次元空間の微小体積要素はローレンツ変換で $dx'dy'dz' = dxdydz\sqrt{1-\beta^2}$ と変わるが、時間

$$dt' = dt\Big/\sqrt{1-\beta^2}$$

を加味すると

$$dv' = dx'dy'dz'dt' = dxdydz\sqrt{1-\beta^2} \times dt\Big/\sqrt{1-\beta^2} = dxdydzdt = dv$$

となって、４次元空間での微小体積要素はローレンツ変換に対して不変ということになるね。

・**B 子：** そうね、長さが縮む分、時間の伸びがそれを打ち消して微小体積要素は不変になるということね。
さぁ、そろそろ Coffee Break を終わることにして、引き上げましょうか。

・**A：** 了解！！

（つづく）