

社会人のための楽しい物理入門

第4章：電磁気学

KENLOU

2009年10月28日

目 次

4.2	電気回路	3
4.2.1	オームの法則	3
	■電圧降下	3
4.2.2	抵抗の連結	3
	■直列連結	3
	■並列連結	4
4.2.3	キルヒホッフの法則	4
	■キルヒホッフの第1法則（電流則）	4
	■キルヒホッフの第2法則（電圧則）	4
4.2.4	電流の熱作用	6
	■電荷の移動による仕事	6
	■電力	7
	■ジュールの法則	8
4.3	電流と磁場	8
4.3.1	磁気	8
	■クーロンの法則	8
4.3.2	磁場	9
	■磁場のガウスの法則	9
	■磁束密度	10
	■磁気モーメント	10
4.3.3	電流と磁場	10
	■アンペールの法則	10
	■ビオ・サバールの法則	12
	■円電流の作る磁場	12
	■ソレノイド・コイルの作る磁場	13
4.4	電磁力	13

4.2 電気回路

4.2.1 オームの法則

次の2つの法則をオーム¹の法則と呼んでいます。

第1法則： 針金を流れる電流 (i) は、針金の両端の電位差 (V) に比例し、比例定数の逆数を電気抵抗 (R) という。電気抵抗は流れる電流の量によらない。

$$i = \frac{V}{R} \quad (4.2.1)$$

第2法則： 針金の電気抵抗 (R) は、その長さ (ℓ) に比例し、断面積 (S) に反比例する

$$R = \rho \frac{\ell}{S} \quad (4.2.2)$$

比例定数 ρ を**抵抗率**とか**比抵抗**といい、物質に固有の値です。比抵抗の逆数 $1/\rho$ は電流の流れやすさを示すので**電気伝導率**といいます。また、抵抗 R の逆数 $1/R$ を**電気伝導度**といいます。

電気抵抗 R の単位は、針金の両端に 1[V] の電位差を与えて 1[A] の電流が流れるとき、この針金の電気抵抗を 1[Ω] といい、Ω をオームといいます。

抵抗 R は温度によって変化し、0℃における抵抗を R_0 、 t ℃における抵抗を R_t とすると

$$R_t = R_0(1 + \alpha t) \quad (4.2.3)$$

の関係があり、 α を**抵抗の温度係数**といいます。(4.2.1) より

$$\rho_t = \rho_0(1 + \alpha t) \quad (4.2.4)$$

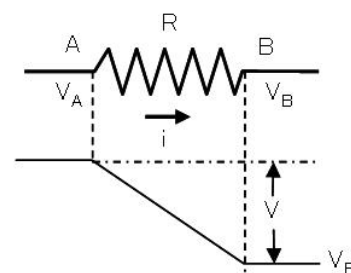
が得られます。

■電圧降下

(4.2.1) より

$$V = iR$$

が得られます。この式の意味は右図に見るように $R[\Omega]$ の抵抗を $i[\text{A}]$ の電流が流れるとき、抵抗の両端で電圧降下が起こり、その大きさは $V(=V_A - V_B)[\text{V}]$ である、ということです。



4.2.2 抵抗の連結

■直列連結

抵抗 R_1, R_2, R_3 を持つ針金を直列につないだ場合の合成抵抗 R を求めます。

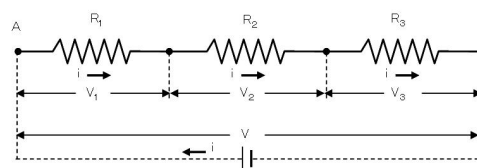
各抵抗を流れる電流 i は等しいので、抵抗 R_1, R_2, R_3 での電圧降下を V_1, V_2, V_3 とすると

$$V_1 = iR_1, \quad V_2 = iR_2, \quad V_3 = iR_3, \quad V = V_1 + V_2 + V_3$$

合成抵抗を R とするとオームの法則より

$$V = iR, \rightarrow i(R_1 + R_2 + R_3) = iR \quad \therefore R = R_1 + R_2 + R_3$$

となって、合成抵抗 R は各抵抗の和で表されることが分かります。



¹ Georg Simon Ohm (1789.3.16-1854.7.6) ドイツの物理学者。オームの法則は 1827 年に発表された。

■並列連結

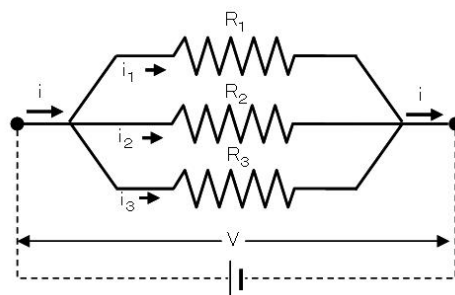
次に並列連結の合成抵抗 R を求めます。

各抵抗を流れる電流（分電流）を i_1, i_2, i_3 とし、抵抗の両端の電圧は共通で等しいので

$$i_1 = \frac{V}{R_1}, \quad i_2 = \frac{V}{R_2}, \quad i_3 = \frac{V}{R_3}, \quad i = i_1 + i_2 + i_3$$

電流 i は主電流と呼ばれます。合成抵抗を R とすると

$$i = \frac{V}{R} = V \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right), \quad \therefore \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$



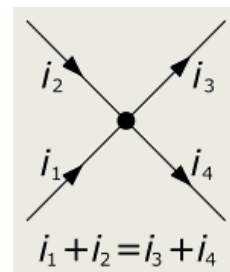
4.2.3 キルヒホッフの法則

簡単な回路の場合にはオームの法則を使って電流・電圧・抵抗等を求められますが、多くの導線が複雑に接続された回路網の場合には**キルヒホッフの法則**²が使われます。

■キルヒホッフの第1法則（電流則）

「電気回路の任意の節点（導線が1点に交わる点）において、その節点に流れ込む電流を正，流出する電流を負で示した電流の総和は0となる。」

$$\sum_{i=1}^N I_i = 0 \quad (4.2.5)$$

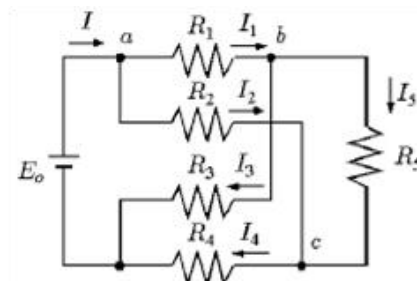


これが第1法則です。別名、「**電流保存の法則**」ともいわれます。

キルヒホッフの第1法則を使って、下図に示す複雑な回路網を流れる電流を求めてみます。 $I = 10$ [A], $I_1 = 5$ [A], $I_5 = 2$ [A] の電流が流れているとして、抵抗 R_2, R_3, R_4 に流れる電流を求めてみましょう。回路の節点は黒丸で示します（単にクロスオーバーしたところは回路上つながっていないことに注意）。

さて、オームの法則を使って求めるには余りにも厄介です。しかし、節点 a, b, c に関してキルヒホッフの第1法則を使えば次のように簡単に求めつことができます。

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{節点 } a: \quad I + (-I_1) + (-I_2) = 0 \rightarrow I_2 = I - I_1 = 5 \text{ [A]} \\ \text{節点 } b: \quad I_1 + (-I_3) + (-I_5) = 0 \rightarrow I_3 = I_1 - I_5 = 3 \text{ [A]} \\ \text{節点 } c: \quad I_2 + I_5 + (-I_4) = 0 \rightarrow I_4 = I_2 + I_5 = 7 \text{ [A]} \end{array} \right.$$



■キルヒホッフの第2法則（電圧則）

「任意の1つの閉回路について、ある向きの回り方を決め、その向きに電流を流す起電力³を正、その向きに流れる電流による電圧降下を正とし、その反対向きの起電力および電流による電圧降下を負とすると、その閉回路中の起電力の総和はその閉回路中の抵抗による電圧降下の総和に等しい」

$$\sum_{i=1}^N E_i = \sum_{i=1}^N I_i R_i \quad (4.2.6)$$

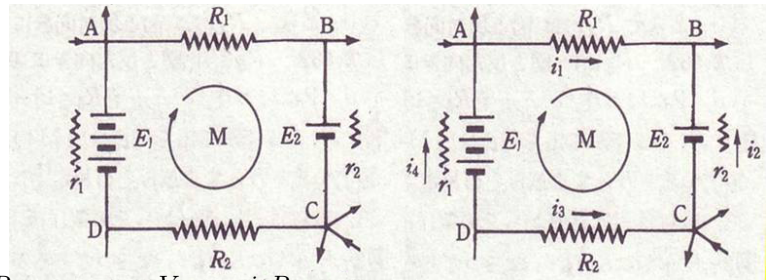
² Gustav Robert Kirchhoff, (1824.3.12-1887.10.17), ドイツの物理学者。1849年にキルヒホッフの法則を発表。

³ 電流を流す力を起電力といいます。電池は電流が流れていないときの両極の電位差が起電力です。

要約すると「回路中の閉回路において、起電力の総和と電圧降下の総和は等しい。」これが第2法則です。

さて、右図の閉回路でキルヒホッフの第2法則の検証をやりましょう。

各抵抗を流れる電流の向きを右図・右のように決め、閉回路を一周する向きとして時計回りを考えます。各節点の電圧をそれぞれ V_A, V_B, V_C, V_D とし、 A の電位 V_A を基準にとって $V_A = 0$ とします。



$$\begin{cases} \overline{AB} \text{間の電位差} & V_B - V_A = -i_1 R_1 & \rightarrow & V_B = -i_1 R_1 \\ \overline{BC} \text{間の電位差} & V_C - V_B = -E_2 + i_2 r_2 & \rightarrow & V_C = -E_2 + i_2 r_2 - i_1 R_1 \\ \overline{CD} \text{間の電位差} & V_D - V_C = i_3 R_2 & \rightarrow & V_D = i_3 R_2 - E_2 + i_2 r_2 - i_1 R_1 \\ \overline{DA} \text{間の電位差} & V_A - V_D = E_1 - i_4 r_1 & \rightarrow & V_A = E_1 - i_4 r_1 + i_3 R_2 - E_2 + i_2 r_2 - i_1 R_1 = 0 \end{cases}$$

最後の式より

$$E_1 - E_2 = i_1 R_1 - i_2 r_2 - i_3 R_2 + i_4 r_1$$

が得られます。これは閉回路を一周する M の向きを電流および起電力の正の向きにした場合のキルヒホッフの第2法則を示しています。

それでは具体的な回路に第2法則の適用してみましょう。その前に手順を箇条書きで纏めておきます。

- (1) 回路網の中から任意の閉回路を切り抜く。
- (2) 各抵抗を流れる電流を $i_1, i_2, \dots$ で表し、流れる向きを適当に仮定して図に書き込む。
- (3) 任意の節点において、流入する電流を正、流出する電流を負として第1法則（電流保存則） $\sum I_i = 0$ を作る。
- (4) 閉回路を一回りする向きを決めて、向きに矢印をつける。矢の向きの起電力を正、矢の向きに流れる電流による電圧降下を正とし、逆向きを負として第2法則 $\sum E = \sum IR$ の式を書く。
- (5) 計算結果、電流の値が負となれば、電流は最初仮定した向きと反対の向きに流れていることを示す。

< Ex > 起電力 $E_1 = 10V, E_2 = 15V, E_3 = 12V$ の3個の電池に $R_1 = 2\Omega, R_2 = 1\Omega, R_3 = 1.5\Omega$ の抵抗をつないだ。各抵抗を流れる電流を求めよ。また、 P 点と Q 点とはどちらがどれだけ電位が高いか。

< Ans >

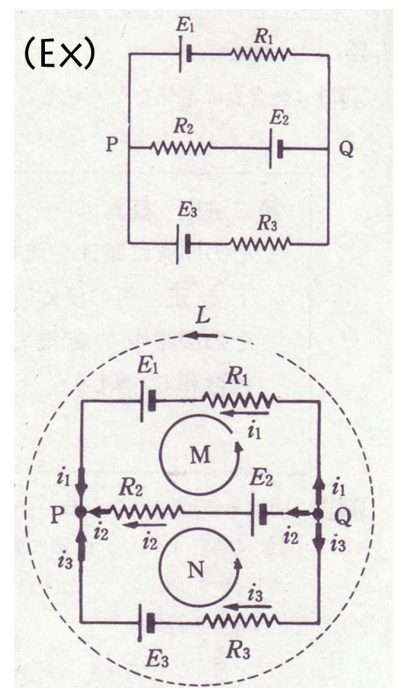
- (1) 図のように3つの向きの閉回路をとることができます。
- (2) 各抵抗を流れる電流を i_1, i_2, i_3 とし、電流が流れる向きを図のようになります。
- (3) 節点 P での電流保存則は、すべて節点 P に流入しているので

$$i_1 + i_2 + i_3 = 0$$

- (4) 閉回路 M, N について第2法則を適用すると

$$\begin{cases} \text{閉回路 } M: & E_1 - E_2 = i_1 R_1 - i_2 R_2 \rightarrow 10 - 15 = 2i_1 - i_2 \\ \text{閉回路 } N: & E_2 - E_3 = i_2 R_2 - i_3 R_3 \rightarrow 15 - 12 = i_2 - 1.5i_3 \end{cases}$$

求める未知数（電流）は3個で方程式の数も3個となったので、これから電流を求めることができます（←閉回路 L については考える



必要がない、というかこれらの式から出てくるはずです)。以上の式から

$$i_1 = -1.46, \quad i_2 = 2.08, \quad i_3 = -0.62 \quad (4.2.7)$$

が得られます。

(5) i_1 と i_3 が負となるので、実際に流れる電流の向きは図に書いた向きと反対に流れることになります。閉回路 L について第 2 法則を適用すると

$$E_1 - E_3 = i_1 R_1 - i_3 R_3 \rightarrow 10 - 12 = 2i_1 - 1.5i_3$$

となりますが、これは閉回路 M, N に関する式を辺々足すとできます。

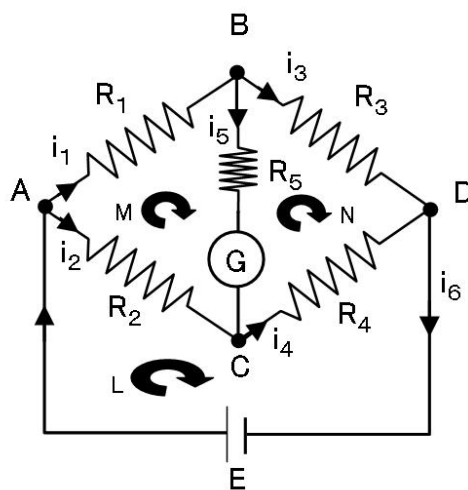
次に、右図に示す回路（ホイーストブリッジ回路）で各抵抗 R_i と電池の電圧 E が分かっているとき、電流 $i_1, i_2, \dots, i_6$ を手順に従って求めてみましょう。未知数は 6 個なので方程式は 6 個必要になります。

(1) 図のように M, N, L の 3 つの向きの閉回路をとることができます。

(2) 各抵抗を流れる電流を $i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6$ とし、電流が流れる向きを矢印のようにします。

(3) 電流保存則を立てると

$$\begin{cases} \text{節点 } B: & i_1 - i_3 - i_5 = 0 \rightarrow i_1 = i_3 + i_5 \\ \text{節点 } C: & i_2 + i_5 - i_4 = 0 \rightarrow i_2 + i_5 = i_4 \\ \text{節点 } D: & i_3 + i_4 - i_6 = 0 \rightarrow i_3 + i_4 = i_6 \end{cases}$$



(4) 閉回路 M, N, L について第 2 法則を適用すると

$$\begin{cases} \text{閉回路 } M: & i_1 R_1 + i_5 R_5 - i_2 R_2 = 0 \\ \text{閉回路 } N: & i_3 R_3 - i_4 R_4 - i_5 R_5 = 0 \\ \text{閉回路 } L: & i_2 R_2 + i_4 R_4 = E \end{cases}$$

これで 6 個の方程式が得られました。あとは 6 元連立方程式を解くだけです。因みに検流計 G を流れる電流 i_5 を求めると

$$i_5 = \frac{R_2 R_3 - R_1 R_4}{R_1 [R_4 (R_3 + R_5) + R_2 (R_3 + R_4 + R_5)] + R_3 [R_4 R_5 + R_2 (R_4 + R_5)]}$$

これから、検流計 G に電流が流れない条件は

$$R_2 R_3 = R_1 R_4 \rightarrow \frac{R_2}{R_1} = \frac{R_4}{R_3}$$

となります。この関係式から、ホイーストブリッジは未知の抵抗を測定するときによく使われます。

4.2.4 電流の熱作用

■電荷の移動による仕事

ニクロム線に電流を流すとニクロム線は真っ赤になって熱くなることは経験されていると思います。冬に重宝される電気毛布や電気炬燵もこれらの現象を利用したものです。さて、電流の元である正の電荷 q が B から A へ電位 V の低いところに移るときになす仕事は §4.1.5 「電位とエネルギー保存則」 のところで見たように qV の位置エネルギーにあたり、電荷（電流）が抵抗を通るとき、そのエネルギーは熱と

なります⁴。1[cal] は 4.19[J] の仕事⁵に相当するので、 q [C] の正の電荷が抵抗線を通して V [V] 電位の低いところへ移るときは

$$Q = \frac{1}{4.19} qV = 0.24qV \text{ [cal]} \quad (4.2.8)$$

の熱を発生することになります。

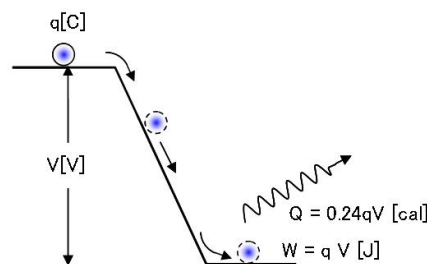
例えば、5[C] の正電荷が 10[V] 電位の低いところに移るときになす仕事の量を w [J] とすると

$$w = qV = 5 \times 10 = 50 \text{ [J]}$$

で、これが抵抗線を通るときに発生する熱を Q とすると

$$Q = \frac{1}{4.19} qV = 0.24qV = 12 \text{ [cal]}$$

となります。



■電力

単位時間に電流⁶がする仕事の量を**仕事率**といい、単位はワット [W] で表されます。毎秒 1[J] の仕事率を 1 ワット ([W]) とするので

$$1 \text{ [W]} = 1 \text{ [J/s]}$$

従って、 W [J] の仕事を t [s] 間にする仕事率を P [W] とすると

$$P = \frac{W}{t}$$

電流のする仕事を**電力**といいます。 V [V] の電圧のもとに i [A] の電流が流れるとき、電流のする仕事率 P [W] は

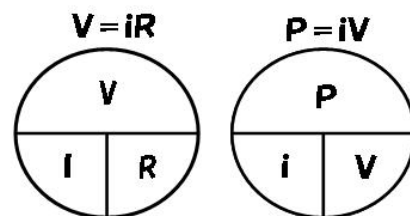
$$P = iV \text{ [W]} \quad (4.2.9)$$

なので、単位 [W] と [A], [V] の関係は $[W] = [A] [V]$ です。100V で使用する 40W の電球に流れる電流は $40 = i \times 100$ で 0.4A となります。また、電球の抵抗はオームの法則より $R = V/i = 100/0.4 = 250\Omega$ となります。

電気のする仕事の量を**電力量**といいます。電力 P [W] で t [s] 間にする仕事（電力量）を W [J] とすると

$$W = Pt \quad (4.2.10)$$

与えられます。1kW の仕事率（電力）で 1 時間にする仕事（電力量）1[kW] × [h] を 1 キロワット時 ([kWh]) といいます。



$$1 \text{ [kWh]} = 10^3 \text{ [J/s]} \times 3600 \text{ [s]} = 3.6 \times 10^6 \text{ [J]} = 860 \text{ [kcal]}$$

[例題] 100V 用 600W の電気コンロには何アンペアの電流が流れるか。また毎秒何カロリーの熱を発生するか。

[答え] $i = P/V = 600/100 = 6 \text{ [A]}$, $P = 600 \text{ [J/s]} = 600 \times 0.24 \text{ [cal/s]}$

⁴ ジュールは力学的な仕事と発生する熱の間には一定の量的関係があり、仕事と熱は一定の比で互いに転換することを実験を通して見いだしました。つまり、熱はエネルギーの 1 つの形態であることを見いだしたわけですね。この比を「熱の仕事当量」といいます。熱の仕事当量を J とすると $J = 4.19 \text{ J/cal}$ となります

⁵ 第 1 章「力学」の § 1.8 「仕事とエネルギー」の項を参照。

⁶ 電流と電荷の関係は § 4.1 「電気量の単位」の項を参照。

■ジュールの法則

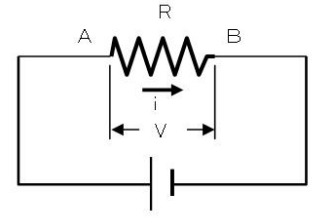
電流が抵抗を流れるとき、この電力は熱となることは最初に言いました。この熱をジュール⁷熱と呼んでいます。抵抗 $R[\Omega]$ に $i[\text{A}]$ の電流を $t[\text{s}]$ 流したときに発生するジュール熱（発熱量） $Q[\text{cal}]$ は

$$Q = iVt = i^2 R t = \frac{V^2}{R} t [\text{J}] = 0.24 i^2 R t [\text{cal}] \quad (4.2.11)$$

と表され、これをジュールの法則といいます。下に電圧が与えられたときと電力が与えられたときのジュールの法則を示しておきます。

$$\begin{cases} \text{電圧: } V[\text{V}], \text{ 電流: } i[\text{A}], \text{ 時間: } t[\text{s}] & \rightarrow Q = 0.24 i V t [\text{cal}] \\ \text{電力: } P[\text{W}], \text{ 時間: } t[\text{s}] & \rightarrow Q = 0.24 P t [\text{cal}] \end{cases} \quad (4.2.12)$$

ジュールの法則より、 10Ω の抵抗に 5A の電流を流すと毎秒発熱するジュール熱は $Q = 0.24 \times 5^2 \times 10 \times 1 = 60[\text{cal/s}]$ となり、 500W の電熱線に電流を 10 秒流したときの発熱量は $Q = 0.24 \times 500 \times 10 = 1200[\text{cal}]$ となります。



4.3 電流と磁場

4.3.1 磁気

磁石はご存知の通り N 極（北極）と S 極（南極）の両極を同時に持っており⁸、 N 極にある磁気を正極、 S 極にある磁気を負極で表します。磁極の強さを表す量を**磁気量**とか**磁荷**といい、1つの磁石には必ず正・負の磁極があり、各極の 正・負の磁気量 (磁荷) は等しいという特長を持っています。

■クーロンの法則

「2つの磁極間に働く力 F は、各極の磁荷 m_1, m_2 の積に比例し、磁極間の距離 r の2乗に反比例する」これを磁力に関するクーロンの法則といいます⁹。

$$F = k \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{r}{r} \quad (4.3.1)$$

m_1 と m_2 が同符号の時は斥力、異符号の時は引力となります。比例乗数 k は単位系によって決まる比例乗数で次の値になります。

$$\begin{cases} (1) \text{MKSA 単位系}^{10} & F: [\text{N}], r: [\text{m}] & \rightarrow k = \frac{1}{4\pi\mu_0} = 6.33 \times 10^4 [\text{N} \cdot \text{m}^2 / \text{Wb}^2] \\ (2) \text{CGS 単位系}^{11} & F: [\text{dyn}], r: [\text{cm}] & \rightarrow k = 1 \end{cases} \quad (4.3.2)$$

CGS 単位系では実用的に単位が小さすぎるので、現在では MKSA 単位系が一般的に使われています。この単位系で Wb というのができましたが、これはウェーバー¹²と呼び、次の関係があります。

$$[\text{Wb}] = [\text{J/A}] = [\text{V} \cdot \text{s}] \quad (4.3.3)$$

$1[\text{Wb}]$ とは、真空中に 1m の距離に置かれた大きさの等しい2つの磁荷が $6.33 \times 10^4[\text{N}]$ の力を生じるとき、その磁荷の大きさを $1[\text{Wb}]$ といいます。 μ_0 は真空の透磁率で、

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} [\text{Wb}^2 / \text{N} \cdot \text{m}^2]$$

真空以外の物質の中では (4.3.1) は

$$F = \frac{1}{4\pi\mu_0\mu_r} \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{r}{r} = \frac{1}{4\pi\mu} \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{r}{r} \quad (4.3.4)$$

となり μ_r を**比透磁率**、 $\mu = \mu_0\mu_r$ を**物質の透磁率**といいます。

⁷ James Prescott Joule(1818.12.24-1889.10.11) 英国の物理学者。ジュールの法則は 1840 年に発見しました。

⁸ 電荷の場合は正の電荷と負の電荷が別々に存在しましたが、磁極の場合、単独で N, S 極は存在しないとされています。

⁹ 電荷のクーロンの法則と同じ形をしていますね！

¹² Wilhelm Eduard Weber (1804.10.24-1891.6.23) ドイツの物理学者

4.3.2 磁場

磁力の作用する空間を**磁場**といいます。電場の電気力線に倣って N 極からでて S 極に入る**磁力線**¹³を考えます。磁場から受ける力の方向を**磁場の方向**といい、これは 磁力線のその点での接線方向 となります。磁力線も電気力線と同様に、折れ曲がったり交わることはなく、1本1本の磁力線は縮もうとし、同方向に隣り合った磁力線同士は反発しあうという性質を持ちます。

単位磁荷が受ける力を**磁場の強さ**といいます。 m [Wb] の磁荷が受ける力が F [N] であったとすると、その点の磁場の強さ H は

$$H = \frac{F}{m} \text{ [N/Wb]}$$

従って、 m [Wb] の磁荷が H [N/Wb] の磁場から受ける力 F の大きさは

$$F = mH \text{ [N]} \quad (4.3.5)$$

となります。 m [Wb] の磁極から r [m] 離れている点 A の磁場の強さ H は、(4.3.1) で $m_1 = m$, $m_2 = 1$ とおいて

$$\begin{cases} \text{真空中: } H = \frac{1}{4\pi\mu_0} \frac{m}{r^2} \text{ [N/Wb]} \\ \text{物質中: } H = \frac{1}{4\pi\mu} \frac{m}{r^2} \text{ [N/Wb]} \end{cases} \quad (4.3.6)$$

で与えられます。磁力線の密度はその点の磁場の強さに比例するので、場の強さが H [N/Wb] のところでは、 1m^2 の面積を垂直に貫く磁力線の本数は H 本 と決めます。従って、磁場の強さ H [N/Wb] のところを S [m^2] の平面を垂直に貫く磁力線の本数は $N = HS$ [本] となります。

今、磁荷 $+m$ [Wb] の磁極が半径 r [m] の球の中心に置かれているとします¹⁴。半径 r の球面上に作る磁場の強さを H とすると H は (4.3.6) で与えられます。これは上述したように 1m^2 あたりの磁力線の本数を示すので、半径 r の球面を貫き出る磁力線の総本数を N とすると

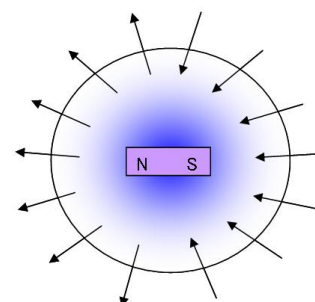
$$\begin{cases} \text{真空中: } N = HS = \frac{1}{4\pi\mu_0} \frac{m}{r^2} \times 4\pi r^2 = \frac{m}{\mu_0} \\ \text{物質中: } N = HS = \frac{1}{4\pi\mu} \frac{m}{r^2} \times 4\pi r^2 = \frac{m}{\mu} = \frac{1}{\mu_r} \frac{m}{\mu_0} \end{cases} \quad (4.3.7)$$

となります。これから、比透磁率 μ_r の物質中では真空中の $1/\mu_r$ となることが分かります。

■磁場のガウスの法則

静電場のガウスの法則は任意の閉曲面 S 内に電荷 Q があった場合、閉曲面 S からでる電気力線の本数 N は $N = Q/\epsilon_0$ というものでした。磁場の場合は、電荷と異なり N 極と S 極が必ず同時に存在¹⁵する、つまり任意の閉曲面内に磁荷 N をおいても必ず対極には S 極が存在します。磁力線が閉曲面の外にでるのを正、逆に閉曲面の中に入ってくるのを負とすると、 N 極から磁力線が H 本外にでて S 極は磁力線を H 本中に吸い込むので、任意の閉曲面内を貫く出る磁力線の総数は $+$ $-$ 差し引き 0 となります。また、電荷 Q に相当する磁荷としては $\sum m_i = 0$ 、これが磁場の場合の**ガウスの法則**です。

任意の閉曲面 C を貫く磁力線の総数は 0



¹³ 磁石の上に紙を置いてその上に砂鉄を撒くと磁石の1つの極から他方の極に砂鉄がきれいに並びますね。これは磁力線を可視化したものです。

¹⁴ 今、対極の磁荷 $-m$ は考えないことにします。

¹⁵ どんなに細かく磁石を粉碎しても必ず N と S 極は存在します。 N 極だけとか S 極だけと分割はできない。言い換えると磁気単極子 (モノポール) は存在しない: $\sum m_i = 0$ 。

■磁束密度

(4.3.7) で見たように、同じ磁荷 $+m$ [Wb] からでた磁力線の本数は物質によって異なりました。静電場の場合には、物質の誘電率によって電気力線の本数が異なったことと似ていますね。静電場の場合、電束密度を考えたのと同様に、磁場の場合**磁束密度**というものを考えます。まず**磁束**ですが、これは

「 $+m$ [Wb] の磁極からは m 本の線が出ていて、その数は媒質に無関係であるような線の束」
 のことで、磁束を Φ で表します。磁束密度を B として、 B は磁束が単位面積を垂直に貫き通る本数なので、面積を S [m]² とすると

$$B = \frac{\Phi}{S} \text{ [Wb/m}^2\text{]} \quad (4.3.8)$$

で与えられます。 $+m$ [Wb] の磁極から半径 r の球面を貫きでる磁束 Φ は m 本なので磁束密度は $B = m/4\pi r^2$ 。これと (4.3.7) より、磁場の強さ H の点での磁束密度 B は

$$\begin{cases} \text{真空中: } B = \mu_0 H \text{ [Wb/m}^2\text{]} \\ \text{物質中: } B = \mu H = \mu_r \mu_0 H \text{ [Wb/m}^2\text{]} \end{cases} \quad (4.3.9)$$

となります。空気の透磁率は真空の透磁率 μ_0 に近く、多くの物質の比透磁率は $\mu_r \approx 1$ ($\mu_r > 1$) ですが、鉄・ニッケル・コバルトなどの磁性体では、 $\mu_r \approx 103 \sim 104$ 程度で、鉄などの磁性体は磁束をよく通す性質があります。

■磁気モーメント

コンパスの針はどんなに揺らしても最終的には必ず南極と北極を指しますね。これは地磁気という磁場の中で N 極は S 極に引かれ、 S 極は N 極に引かれるからです。いま、一様な磁場 H [N/Wb] の中に磁荷 $+m, -m$ を持つ長さ ℓ の棒磁石を磁力線と θ の角をなして置かれている場合を考えます。(4.3.5) により、 N 極は H の方向に mH の力を受け、 S 極は H と反対向きに mH の力を受けます。この2つの力は大きさが等しく方向は同じで、向きが反対の力なので

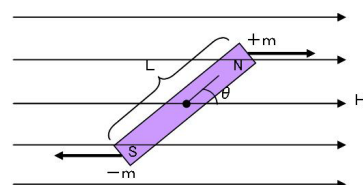
偶力となり、磁石を重心の回りに回転させようとします。偶力のモーメントを L とすると

$$L = mH \times \ell \sin \theta = m\ell H \sin \theta \quad (4.3.10)$$

$m\ell$ をその磁石の**磁気モーメント**といいます。磁気モーメントを M とすると、モーメントは大きさと向きを持つベクトル量で次の通りです。

$$\begin{cases} \text{磁気モーメントの大きさ: } M = m\ell \\ \text{磁気モーメントの向き: } S \text{ 極から } N \text{ 極への向き} \end{cases}$$

コンパスの針が常に $S - N$ を指すのは地球の磁場によるモーメントが働くためであったわけです。



4.3.3 電流と磁場

電流と磁場はいわば兄弟関係にあることをよくご存知と思いますが、この関係は1820年、電流と磁気との関連を追及していたデンマークの物理学者エールステッド¹⁶の「電流の流れる針金に磁針を近づけると磁針が回転する」という発見に端を発します。この発見によってそれまで別々の現象と考えられていた電気と磁気に関連付けられて考えられるようになりました。

■アンペールの法則

電流が流れるとその周りには磁場が生じますが、電流と磁場の方向に関してアンペール¹⁷の**右ネジの法則**があります。これは

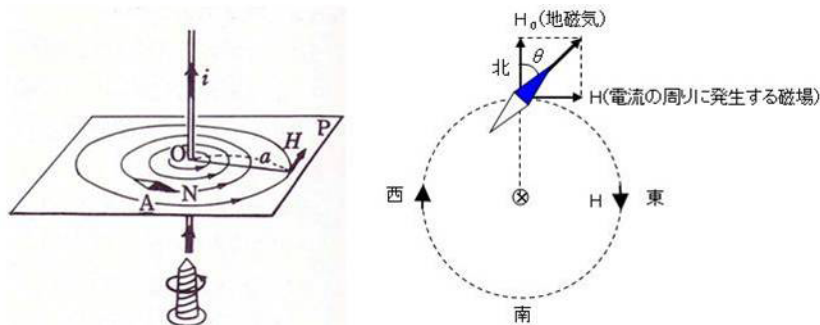
¹⁶ Hans Christian Oersted(1777-1851) デンマークの物理学者

¹⁷ Andre-Marie Ampere(1775.1.20-1836.6.10) フランスの物理学者。1820年にアンペールの右ネジの法則を発見した。

「電流が右ネジの進む方向に流れるとき、磁場はネジを回す向きに生じ、また、右ネジを回す向きに電流が環状に流れるときは、環状電流の内側の磁場はネジの進む方向に向かう」

というものです。電流が無限に長い導線を通る場合の周りの磁場の状況を右図・左に示します。

導線に流れる電流の回りには右ネジの回る方向に磁場が発生しており、磁針の N, S 極の向きに注目してください。ところで実際には磁針の受ける力は地磁気の影響も受けるので、磁針は右図・右（電流は紙面に垂直に下から上へ流れている）に示すように電流によって



発生する磁場 H と地磁気 H_0 の合力の方向に向きます。その方向が北となす角を θ とすると

$$H = H_0 \tan \theta \quad (4.3.11)$$

電流 i の大きさと磁針の導線の中心からの距離 r をいろいろ変えて角 θ を測定すると

$$\tan \theta \propto \frac{i}{r} \quad (4.3.12)$$

なる関係が得られます。これから

- ・ 距離 r を一定として電流 i を非常に大きくしていくと $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$: 地磁気の影響なし
- ・ 電流 i を一定として距離 r を非常に大きくしていくと $\theta \rightarrow 0$: 地磁気だけの影響を受ける

となることが分かります。いずれにしても (4.3.11) と (4.3.12) から、直線電流の回りに発生する磁場の大きさは、電流の強さに比例し、距離に反比例することになります (←詳細な定式は後ほどできます)。

$$H = k \frac{i}{r} \quad (4.3.13)$$

電流の作る磁場の中に置かれた $+m$ の磁荷を導線の回りに一周させた場合、磁場 H のなす仕事 W は

$$W = H \cdot 2\pi r = 2\pi k m i \quad (4.3.14)$$

この式をよく見ると、仕事 W は円の半径 r によらず、電流値 i だけで決まることが分かります。このことは特に円周だけに限らず、導線を囲む任意の閉曲線に沿って一周させても同じ結果になります¹⁸。

さて、磁荷の単位を電流と仕事の単位から決めていきましょう。

$i = 1 [\text{A}]$, $W = 1 [\text{J}]$ のとき $m = 1 [\text{Wb}]$ とすると

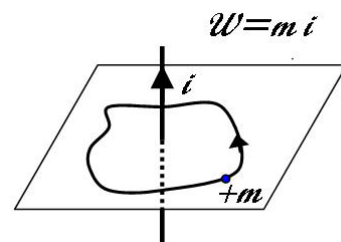
$$1 [\text{J}] = 2\pi k \times 1 [\text{Wb}] \times 1 [\text{A}]$$

(4.3.3) より $[\text{Wb}] = [\text{J}/\text{A}] = [\text{V} \cdot \text{s}]$ であったので、 $2\pi k$ は単位 (次元) のない無次元の定数ということになり、“ $2\pi k = 1$ ”と置くことができます¹⁹。つまり

$$W = m i \quad (4.3.15)$$

となって、 $i [\text{A}]$ の電流の回りを $1 [\text{Wb}]$ の単位磁荷を一回路させる仕事は $i [\text{J}]$ ということになります。

以上のことから、「任意の閉曲線に沿って単位磁荷を一回路させたとき、磁場のする仕事 W はその閉曲



¹⁸ 仕事は第1章力学の§1.8に述べているように、力ベクトルと変位ベクトルの内積で表されます。仕事は経路に沿って線積分したものであることから証明できます。

¹⁹ 同じ次元どうしの比は無次元、つまり“1”という次元になります。

線を貫く電流の強さ i に等しい」これをアンペールの法則、或いはアンペールの回路法則といいます。また、導線から距離 r [m] の点に作る磁場の強さ H は (4.3.11) より

$$H = k \frac{i}{r} = \frac{i}{2\pi r} \text{ [A/m]} \quad (\because 2\pi k = 1) \quad (4.3.16)$$

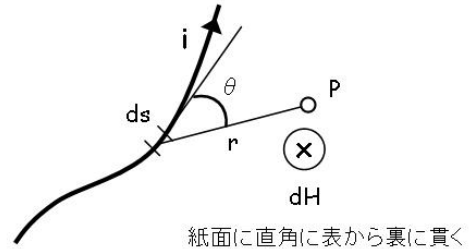
で与えられます。

■ビオ・サバールの法則

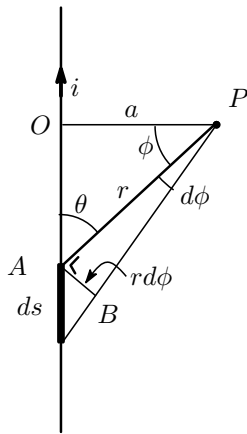
導線の微小部分 ds を流れている電流 i が、それから動径 r の距離にある点 P に作る磁場 dH は

$$dH = \frac{1}{4\pi} \frac{i ds}{r^2} \sin \theta \text{ [A/m]} \quad (4.3.17)$$

で与えられます²⁰。これをビオ・サバールの法則²¹といいます。この法則を使って、参考までに先ほどの導線に流れる電流の作る磁場を求めておきます。



＝ビオ・サバールの法則を使って磁場を求める＝



$$r = \overline{PA} = \frac{a}{\cos \phi}$$

$$ds = \frac{\overline{AB}}{\cos \phi} = \frac{r d\phi}{\cos \phi} = \frac{a}{\cos \phi} \cdot \frac{d\phi}{\cos \phi}$$

$$dH = \frac{i}{4\pi} \frac{ds}{r^2} \sin \theta = \frac{i}{4\pi} \cdot \frac{\cos \phi}{a} d\phi$$

導線の無限下方 ($\phi = \pi/2$) から無限上方 ($\phi = -\pi/2$) からの寄与の総和

$$H = \int_{\pi/2}^{-\pi/2} dH = \frac{i}{4\pi a} \int_{\pi/2}^{-\pi/2} \cos \phi d\phi = \frac{i}{2\pi a}$$

■円電流の作る磁場

半径 r の導線に電流 i が流れているときは、右図に示すように右ネジの法則で決められた通りの磁場を発生します。このときの円の中心に作られる磁場 H の強さをビオ・サバールの法則を使って求めてみましょう。円の中心から引いた線と円環の一部 ds のなす角は $\pi/2$ なので

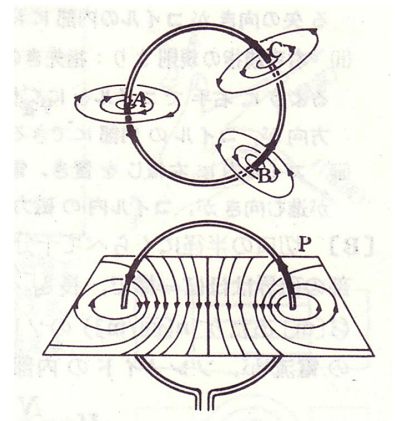
$$dH = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{id\theta}{r^2} \cdot \sin(\pi/2)$$

円環全部からの寄与を足し合わせると

$$H = \int dH = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{i}{r^2} \int_{\text{円周の長さ}} ds = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{i}{r^2} \times 2\pi r = \frac{i}{2r} \text{ [A/m]} \quad (4.3.18)$$

ちなみに、円の中心軸上で中心から距離 r の点に生じる磁場の強さ H は

$$H = \frac{a^2 i}{2(a^2 + r^2)^{3/2}} \text{ [A/m]} \quad (4.3.19)$$



²⁰ この導出はこのレベルを超えるのでやらない。

²¹ Jean Baptiste Biot (1774.4.21-1862.2.3), Felix Savart (1791.6.30-1841.3.16) フランスの物理学者、エルステッドの発見に触発され、助手のサバールとの共同研究でエルステッドの発見後 1ヵ月半でビオ・サバールの法則を定式化。

となりますが、これは各自の導出にお任せします。ところで、円環 1 巻きの場合の磁場の強さは (4.3.18) で与えられました。\$N\$ 巻きでは \$N\$ 倍の電流が流れるので

$$H = \frac{Ni}{2r} \text{ [A/m]} \quad (4.3.20)$$

となります。右辺の \$Ni\$ を **アンペア回数** といいます²²。

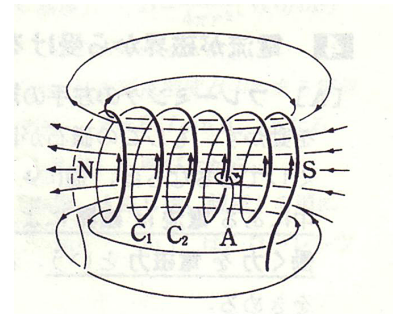
■ソレノイド・コイルの作る磁場

導線を長い円筒状に巻いたものをソレノイド・コイルといいます。長さ \$\ell\$ [m] あたりに \$N\$ 回巻いたソレノイド・コイルに電流 \$i\$ [A] を流したときのコイル内に発生する磁場 \$H\$ は

$$H = \frac{N}{\ell} i = ni \text{ [A/m]} \quad (4.3.21)$$

で与えられます。\$n\$ は 1m あたりの巻き数です。

【※】 ファイルが 3M を超えるとサーバーが reject するようなので、
ここで一旦終わり、詳しいことは次回に回すこととします。



4.4 電磁力

by KENZOU

(2009.10.28 了)

²² 1 アンペア回数は、1 回巻きの円環回路に 1 アンペアの電流が流れるときに生じる起磁力と定義されます。