

社会人のための楽しい物理入門

第4章：電磁気学

HENLOU

2009年12月13日

目次

4.3	電流と磁場	3
4.3.1	Solenoid Coil の作る磁場	3
4.4	電磁力	4
4.4.1	フレミングの左手の法則	4
4.4.2	平行な直線電流間に働く力	5
4.4.3	荷電粒子が電磁場から受ける力(ローレンツ力)	5
4.5	電磁誘導	11
4.5.1	誘導起電力とローレンツ力	11
4.5.2	ファラデーの法則とレンツの法則	12
4.5.3	相互誘導	12
4.5.4	自己誘導	13
4.5.5	コイルに蓄えられるエネルギー	14

4.3 電流と磁場

4.3.1 Solenoid Coilの作る磁場

前回の続きです。。

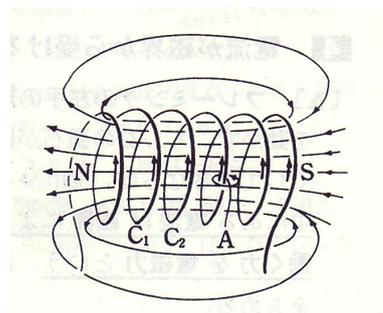
導線を長い円筒状に巻いたものをソレノイド・コイルといいます。長さ ℓ [m] あたりに N 回巻いたソレノイド・コイルに電流 i [A] を流したときのコイル内に発生する磁場 H は

$$H = \frac{N}{\ell} i = ni \text{ [A/m]} \quad (4.3.1)$$

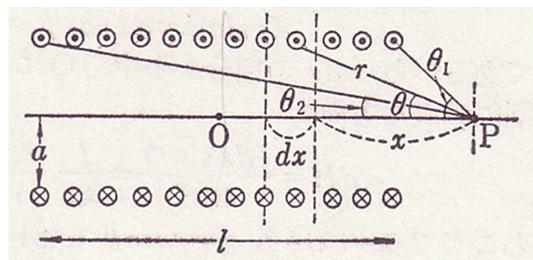
与えられます。 n は 1m あたりの巻き数です。一般に半径 a , 長さ ℓ , 軸に直角に巻いた総巻数 N のソレノイドに電流 i を流したとき、中心軸上の点 P に生じる磁場の強さを H とすると

$$H = \frac{Ni}{2\ell} (\cos \theta_2 - \cos \theta_1) \quad (4.3.2)$$

与えられます。ここで θ_1 θ_2 はソレノイドの両端と点 P を結ぶ直線と中心軸のなす角です。それでは (4.3.2) を導出してみましょう。活用する式として前回示した円電流の作る磁場の式 (4.3.9) を使います。



図には示されていませんが、ソレノイド・コイルの左端から P 点までに距離を L とします。計算は、点 P から x の距離にある dx 部分のソレノイドを流れる電流が点 P に形成する磁場 dH を求め、それを全ソレノイド・コイルにわたって総和 (積分) をとるという段取りです。右図 dx 部分の巻き線数は $(N/\ell)dx$ なので、電流は $(N/\ell)idx$ 流れます (アンペア回数)。また、



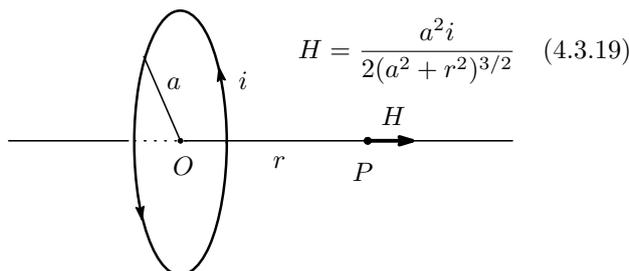
$$x = a \cot \theta \rightarrow dx = -\frac{a}{\sin^2 \theta} d\theta = -\frac{r}{\sin \theta} d\theta, \quad a = r \sin \theta, \quad a^2 + x^2 = r^2$$

なので、 dx 部分の円電流の P 点に作る磁場 dH は (4.3.9) より

$$dH = \frac{a^2}{2(a^2 + x^2)^{3/2}} \cdot \frac{N}{\ell} idx = -\frac{Ni}{2\ell} \sin \theta d\theta$$

が得られます (下図参照)。

< 円電流の作る磁場 >



従って求める磁場の強さは

$$H = \int_{\theta_1}^{\theta_2} dH = -\frac{Ni}{2\ell} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin \theta d\theta = \frac{Ni}{2\ell} (\cos \theta_2 - \cos \theta_1) \quad (4.3.3)$$

となります。ところで

$$\cos \theta_1 = \frac{L - \ell}{\sqrt{(L - \ell)^2 + a^2}}, \quad \cos \theta_2 = \frac{L}{\sqrt{L^2 + a^2}}$$

なので、これを (4.3.3) に入れると

$$H = \frac{Ni}{2\ell} \left\{ \frac{L}{\sqrt{L^2 + a^2}} - \frac{L - \ell}{\sqrt{(L - \ell)^2 + a^2}} \right\} \quad (4.3.4)$$

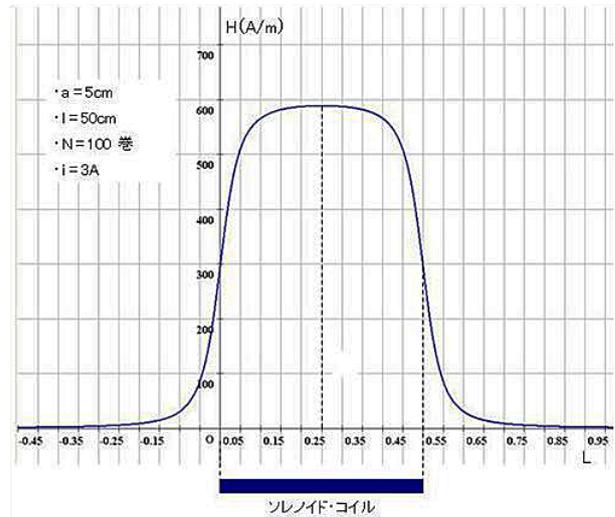
これから

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{ソレノイドの中心点 } (L = \ell/2) & : H = \frac{Ni}{\sqrt{\ell^2 + 4a^2}} \\ \text{ソレノイドの両端 } (L = 0, L = \ell) & : H = \frac{Ni}{2\sqrt{\ell^2 + a^2}} \\ \text{十分に長いソレノイド } (\ell \gg a) \text{ の中心点} & : H = \frac{Ni}{\ell} \\ \text{ " の両端} & : H = \frac{Ni}{2\ell} \end{array} \right. \quad (4.3.5)$$

が得られます。この結果から、十分に長いソレノイド・コイルの場合、両端の磁場の強さは中心点の半分になることが分かります。

$a = 5\text{cm}$, $\ell = 50\text{cm}$, $N = 100$ 巻のソレノイドコイルに電流 $i = 3\text{A}$ を流した場合の磁場強度のカーブを右図に示します。ソレノイド・コイルの中心点が最高の磁場強度で、両端では中心強度の約半分¹、外部にいくにつれ磁場が急激に弱くなっていくことが分かります。

電磁石はソレノイドコイルに鉄心を入れたもので、鉄は電流の作る磁場 (4.3.1) により磁化され、物質中の磁束密度の式 (4.3.9) より $B = \mu H = \mu_r \mu_0 H$ により、電流だけの磁束密度 $\mu_0 H$ の μ_r 倍 (概略 100 倍以上) となるので、強力な磁石となります。



4.4 電磁力

4.4.1 フレミングの左手の法則

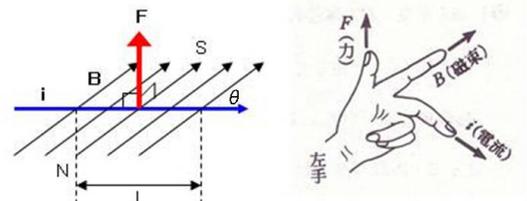
針金のような導線に電流が流れると回りに磁場が形成されるのを見てきました。そうすると、電流を流した針金を外部磁場の中に入れると、電流が形成する磁場と外部磁場との間で同極は反発し、異極は引き合うという磁場のクーロン力が働くので、この結果、針金は外部の磁場から力を受けることとなります。このあたりのことを整理していうと次のようになります。

「一様な磁場 (磁束密度 B) の中で電流 i が導体の中を流れているとき、電流は磁場から力を受け、これを電磁力という。」

導体の長さ ℓ [m] の部分が磁場の方向と θ の角をなしているとき、導体の長さ ℓ の受ける電磁力 F [N] は

$$F = i \times B \ell \quad (4.4.1)$$

¹ 半分にならないのは $\ell \gg a$ の条件がまだ不十分なため。

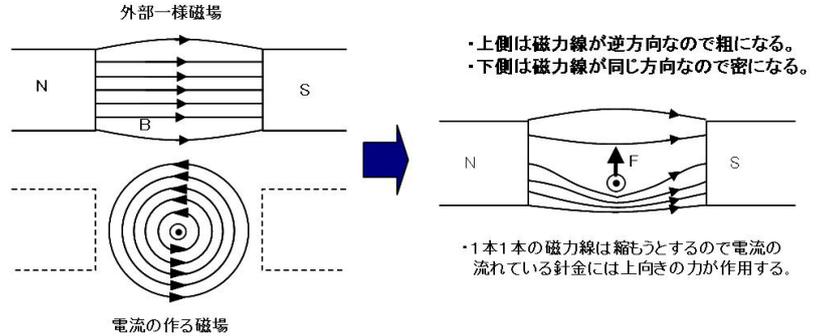


で与えられます。ここで電流は向きがあるので太字のベクトル量で表しました。 $i \times B$ はベクトルの外積といわれるものでベクトル量です。ベクトルの向きは電流 i から磁束密度 B の向きに右ネジを回すとき、右ネジの進む方向となります。これをフレミングの左手の法則²といいます。電磁力の大きさ F は

$$F = iB \sin \theta \quad (4.4.2)$$

で与えられます。

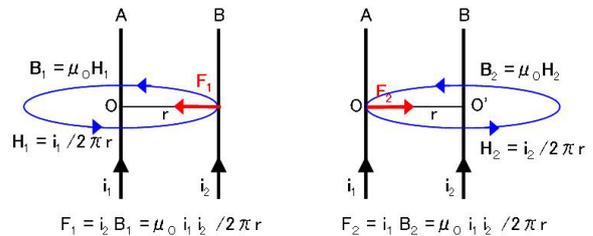
このあたりのことを理解するには右図が役立ちます。左上図は外部の一樣磁場で、その下の図は針金に紙面裏から手前に電流が流れているときに形成される磁場を示しています。この状態で外部磁場に入ると右側に示すように磁力線は、下側は同じ向きなので合成磁場の磁力線は密になり、上側は磁力線の向きが反対のため、打ち



消しあって疎になります。1本1本の磁力線は縮もうとするので、針金³は磁力線が密な下側から上方へ押される力、電磁力を受けることとなります(トランポリンで飛び上がるようなイメージ)。

4.4.2 平行な直線電流間に働く力

電流 i_1 と i_2 が流れている互いに平行で距離が r 離れている2本の導線 A, B があるとします。導線 A, B ともにその周りに磁場を作り、導線 B に流れる電流は導線 A が作る磁場からフレミングの左手の法則により力 F_1 を、同様に導線 A を流れる電流は導線 B が作る磁場から力 F_2 を受けます。それぞれの力の大きさを F_1, F_2 とすると、§4.3.3 でやった「アンペールの法則」と「フレミングの左手の法則」を使って



$$\begin{cases} \text{導線 } B \text{ の受ける力: } F_1 = i_2 B_1 = \mu_0 \frac{i_1 i_2}{2\pi r} \\ \text{導線 } A \text{ の受ける力: } F_2 = i_1 B_2 = \mu_0 \frac{i_1 i_2}{2\pi r} \end{cases} \quad (4.4.3)$$

となります。力の向きは、フレミングの左手の法則より、それぞれの導線を流れる電流の向きによって

$$\begin{cases} \text{同じ向きに流れる} & : \text{導線 } A, B \text{ は引き合う} \\ \text{逆向きに流れる} & : \text{導線 } A, B \text{ は斥け合う} \end{cases} \quad (4.4.4)$$

こととなります⁴。

4.4.3 荷電粒子が電磁場から受ける力(ローレンツ力)

電流は電荷の流れなので、電流に磁場から力が働くということは流れている(動いている)電荷に磁場から力が働くということになります。電荷 q [C] を持つ荷電粒子が単位体積あたり n 個あるとし、右図

² 左手の親指、人差し指、中指を直角に開き、電流 i を中指の向きに、磁束密度 B を人差し指の向きにとると、力 F は親指の向きになる。余談ですが、親指、人差し指、薬指をそれぞれ「う・じ・でん」として覚えたものです。

³ 正確には針金でなく電流だが、針金のほうがイメージを掴みやすいのでそういう表現にした。

⁴ 導線 A, B が引き合う力は作用・反作用の関係にあります。

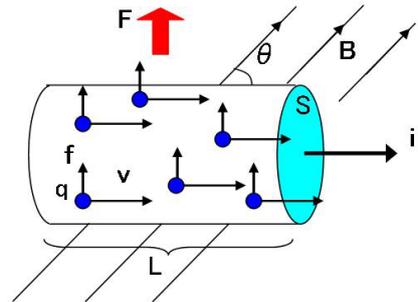
のように断面積 $S[\text{m}^2]$ の導体中を電流の流れる方向へ速さ $v[\text{m/s}]$ で動いているとします。

$vS[\text{m}^3]$ の中には nvS 個の荷電粒子があるので、その電荷は $qnvS[\text{C}]$ で、これが 1 秒間に流れる電荷量つまり電流の強さです。外部の一樣磁場と導体のなす角を θ とすると、長さ L の電流 i に働く力の大きさ F は、導体中の荷電粒子の総数を $N(=nSL)$ として

$$F = iBL \sin \theta = qnvSBL \sin \theta = qvNB \sin \theta \text{ [N]}$$

となるので、荷電粒子 1 個あたりに働く力の大きさ f は

$$f = \frac{F}{N} = qvB \sin \theta \text{ [N]} \quad (4.4.5)$$

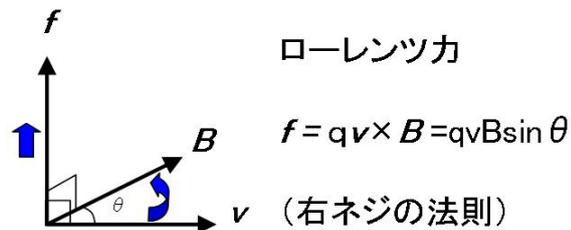


速さを速度ベクトル v 、磁束密度をベクトル B で書くと (4.4.5) はベクトル積 (外積) を使って

$$f = qv \times B \quad (4.4.6)$$

と書け、この動いている電荷に磁場から働く力をローレンツ力⁵といいます。この力は荷電粒子の速度 v と磁束密度 B のそれぞれに直交する方向に働きます。力の x, y, z 成分は

$$\begin{cases} f_x = q(v_y B_z - v_z B_y) \\ f_y = q(v_z B_x - v_x B_z) \\ f_z = q(v_x B_y - v_y B_x) \end{cases} \quad (4.4.7)$$



磁場とは 運動している荷電粒子 に力を及ぼす空間の性質ということになります。ところで、磁場に加えて電場 E が存在すると、動いている荷電粒子は電場 E から qE の力 (クーロン力) を受けます (電磁場の中を荷電粒子が等速運動する場合)。この電場と磁場から働く力の合力を f とすると

$$f = q(E + v \times B) \quad (4.4.8)$$

と表され、これを一般的にローレンツ力と呼んでいます。それでは一樣な磁場の中で初速度 v_0 を持つ荷電粒子の運動の軌跡を調べてみましょう。 x, y, z 方向の単位ベクトルをそれぞれ i, j, k とします。

磁場が z 軸方向にかかっており、 $x-z$ 平面上に投げ出された荷電粒子の初速度を v_0 とすると

$$\begin{cases} B = B_z k \\ v_0 = v_{x0} i + v_{z0} k \end{cases}$$

荷電粒子の運動方程式は (4.4.7) を使って

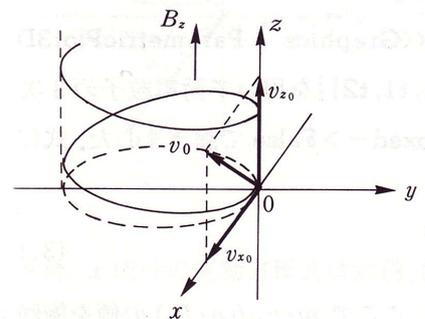
$$m \frac{dv_x}{dt} = f_x = qv_y B_z \quad (4.4.9)$$

$$m \frac{dv_y}{dt} = f_y = -qv_x B_z \quad (4.4.10)$$

$$m \frac{dv_z}{dt} = f_z = 0 \quad (4.4.11)$$

となり、(4.4.11) より荷電粒子は z 軸方向に等速運動することが分かります。

$$v_z = \frac{dz}{dt} = v_{z0} \quad (4.4.12)$$



⁵ Hendrik Antoon Lorentz (1853.7.18-1928.2.14) オランダの物理学者。アインシュタインの特殊相対性理論の先駆けとなるローレンツ変換を導出した。1902年にノーベル物理学賞を受賞。

(4.4.9) を t で微分して (4.4.10) から v_y を消すと

$$\frac{d^2 v_x}{dt^2} = - \left(\frac{qB_z}{m} \right)^2 v_x \quad (4.4.13)$$

この微分方程式は第1章「力学」の§1.6.4「単振動の運動方程式」のところで解いているので、その結果を利用します。ところで単振動の運動方程式 $\ddot{x} = -\omega^2 x$ で ω は角振動数でした。(4.4.13) も同じ形をしているので、 (qB_z/m) は角振動数に相当することが分かります。この振動数をサイクロトロン振動数と呼んでいます。さて、初期条件を $t = 0 : v_x = v_{x0}, v_y = 0$ とすると

$$\begin{cases} v_x = \frac{dx}{dt} = v_{x0} \cos \left(\frac{qB_z}{m} \right) t \\ v_y = \frac{dy}{dt} = -v_{x0} \sin \left(\frac{qB_z}{m} \right) t \end{cases} \quad (4.4.14)$$

が得られ、荷電粒子の速度の大きさ v は

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = v_{x0}^2 + v_{z0}^2 = v_0^2 = \text{一定}$$

で、磁場中では速さが一定で向きだけを変える、つまり、荷電粒子の運動エネルギーは保存されることが分かります。さて、 $t = 0$ で荷電粒子は原点にあるとして、(4.4.12), (4.4.14) を t で積分すると

$$\begin{cases} x(t) = \frac{mv_{x0}}{qB_z} \sin \left(\frac{qB_z}{m} \right) t \\ y(t) = -\frac{mv_{x0}}{qB_z} \left\{ 1 - \cos \left(\frac{qB_z}{m} \right) t \right\} \\ z(t) = v_{z0} t \end{cases} \quad (4.4.15)$$

上式2式より t を消去すると

$$x^2 + \left(y + \frac{mv_{x0}}{qB_z} \right)^2 = \left(\frac{mv_{x0}}{qB_z} \right)^2 \quad (4.4.16)$$

となり、 $x-y$ 平面に射影した荷電粒子の運動は

$$\begin{cases} \text{速さ} : v_{x0} \\ \text{半径} : r = \frac{mv_{x0}}{qB_z} \\ \text{周期} : T = \frac{2\pi m}{qB_z} \end{cases} \quad (4.4.17)$$

の等速円運動⁶をします。この半径 r を旋回半径といいます。 z 軸方向には等速運動しているので、荷電粒子全体としての運動は右図⁷に示すように z 軸の周りの等速螺旋運動となり、初速度 v_0 と z 軸となす角を θ とすると、螺旋のピッチ P は

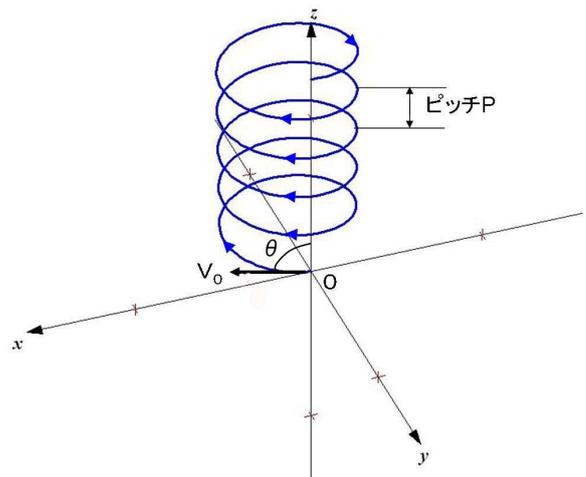
$$P = v_{z0} T = v_0 T \cos \theta = \frac{2\pi m v_0}{qB_z} \cos \theta$$

となります。

[例題 1] 荷電粒子が速度 $v_0 = 10^6$ [m/s] で磁束密度 $B = 10^{-4}$ [Wb/m²] の一様磁場に $\theta = \pi/3$ で入射し

⁶ 円電流が磁場を形成したことを思い浮かべてください。今の場合、外部磁場を打ち消す方向に円電流が流れることとなりますね。

⁷ グラフは $x = \sin(t), y = -(1 - \cos(t)), z = t/\pi, (0 \leq t \leq 10\pi)$ とおいて Function View で描画した。

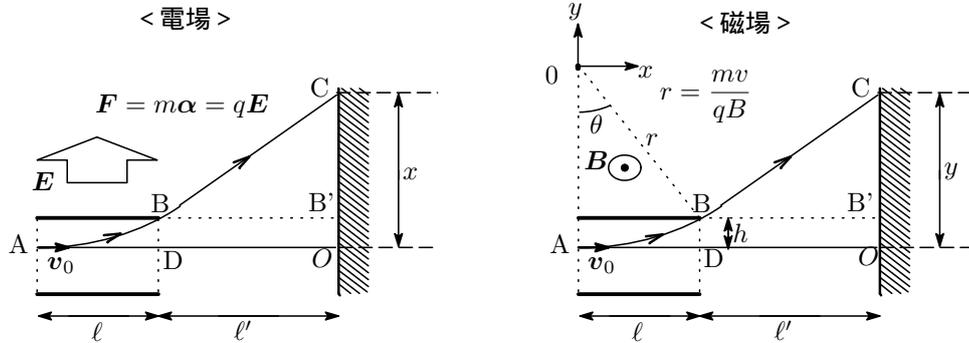


たとき，旋回半径と螺旋ピッチ P を求めよ。ただし比電荷を $q/m = 1.761 \times 10^{11}$ [C/kg] とする。

[解答 1] $v_{x0} = v_0 \sin(\pi/3) = (\sqrt{3}/2)v_0$ ，旋回半径は $r = (m/q)(v_{x0}/B) = (1/1.761 \times 10^{11}) \times (\sqrt{3}/2) \times (1/10^{-4}) = 0.049$ [m] = 4.9 [cm]，周期 $T = 2\pi(m/q) \times (1/B)$ ，ピッチ $T = v_0 T \cos \theta = (v_0/2)T = 17.8$ [cm]

[例題-2]

荷電粒子が距離 ℓ の一様な電場または磁場に垂直に速度 v_0 で入射し，出してから距離 ℓ' の距離にあるスクリーン上に達する点は，直進の場合からどれだけずれるかを求めよ。



[解答]

(1) 電場の場合：図の方向に一様な電場 E がかかっているとします。AO の方向に速度 v_0 で入射した荷電粒子は，進行方向と垂直の方向に力 $F = qE$ を受けます⁸。加速度を α とすると

$$F = qE = m\alpha \rightarrow \alpha = \left(\frac{q}{m}\right) E$$

荷電粒子が一様電場の区間 AB を通過する時間を t_1 ，B から C に達する時間を t_2 とすると，AO の方向には電場から力を受けないので荷電粒子は入射速度と同じ速度の進むことから

$$t_1 = \frac{\ell}{v_0}, \quad t_2 = \frac{\ell'}{v_0}$$

また，ズレ BD は

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \left(\frac{q}{m}\right) E \rightarrow \frac{dx}{dt} = v = \left(\frac{q}{m}\right) Et_1 \rightarrow BD = \frac{1}{2} \left(\frac{q}{m}\right) Et_1^2$$

v は DB 方向の速度で，BC 間は等速直線運動となるので

$$B'C = vt_2 = \left(\frac{q}{m}\right) Et_1 t_2$$

以上のことから，求めるズレを x とすると

$$x = BD + B'C = \frac{1}{2} \left(\frac{q}{m}\right) Et_1^2 + \left(\frac{q}{m}\right) Et_1 t_2 = \frac{qE}{mv_0^2} \left(\frac{\ell}{2} + \ell'\right) \ell$$

(2) 磁場の場合：図のように紙面に垂直に裏から表の方向に一様な磁場がかかっているとします。荷電粒子はローレンツ力を受けて円運動し，その半径は (4.4.17) より $r = mv_0/qB$ 。磁場内での荷電粒子の軌跡は (4.4.16) で与えられ，磁場を出るときのズレ BD を h とすると， $B(\ell, -2r + h)$ なので (4.4.16) より

$$x^2 + (y + r)^2 = r^2 \rightarrow \ell^2 + (-2r + h + r)^2 = r^2 \rightarrow h(2r - h) = \ell^2$$

⁸ 重力場での質点の水平飛行運動とのアナロジーで考えると分かりやすい。

ズレ h を小さいとすると

$$h \doteq \frac{\ell^2}{2r} = \frac{qB\ell^2}{2mv_0}, \quad \tan \theta = \frac{\ell}{r-h} = \ell / \left(\frac{mv_0}{qB} - \frac{qB\ell^2}{2mv_0} \right)$$

$\angle 0BB'$ は $\triangle 0AB$ の外角なので $\angle 0BB' = \pi/2 + \theta$ となり, これからスクリーン上のズレ y は

$$y = 0C = DB + B'C = h + \ell' \tan \theta = \frac{qB\ell^2}{2mv_0} + \ell\ell' / \left(\frac{mv_0}{qB} - \frac{qB\ell^2}{2mv_0} \right)$$

$mv \gg qB$ の時は

$$y \doteq \frac{qB\ell}{mv_0} \left(\frac{\ell}{2} + \ell' \right)$$

//

次に電磁場がかかっている場合を見ていきます。電場は y 軸方向に, 磁場は z 軸方向にかかっているとします。荷電粒子が x 軸方向に初速度 v_{x0} で飛び込んできた時の荷電粒子の運動の軌跡を求めてみましょう。 $t = 0$ で荷電粒子は原点にあるとします。運動方程式は

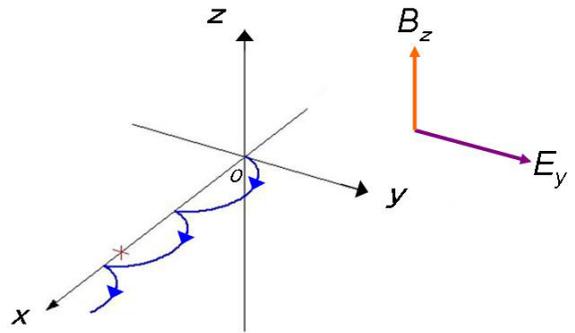
$$\begin{aligned} m \frac{dv_x}{dt} &= f_x = qv_y B_z \\ m \frac{dv_y}{dt} &= f_y = qE_y - qv_x B_z \\ m \frac{dv_z}{dt} &= f_z = 0 \end{aligned}$$

上でやったと同様の手順を踏んで

$$\frac{d^2 v_x}{dt^2} + \left(\frac{qB_z}{m} \right)^2 v_x = \frac{q^2 B_z E_y}{m^2}$$

これは2階線形微分方程式ですが, 初期条件を考慮して解くと⁹

$$\begin{cases} v_x = \left(v_{x0} - \frac{E_y}{B_z} \right) \cos \left(\frac{qB_z}{m} t \right) + \frac{E_y}{B_z} \\ v_y = - \left(v_{x0} - \frac{E_y}{B_z} \right) \sin \left(\frac{qB_z}{m} t \right) \\ v_z = 0 \end{cases}$$



t で積分し, 初期条件を考慮すると

$$\begin{cases} x = \frac{m}{qB_z} \left(v_{x0} - \frac{E_y}{B_z} \right) \sin \left(\frac{qB_z}{m} t \right) + \frac{E_y}{B_z} t \\ y = - \frac{m}{qB_z} \left(v_{x0} - \frac{E_y}{B_z} \right) \left\{ 1 - \cos \left(\frac{qB_z}{m} t \right) \right\} \\ z = 0 \end{cases}$$

が得られます。 $v_{x0} = 0$ とした場合の荷電粒子

の運動の軌跡を右図に示しますが, この軌跡はサイクロイド曲線と呼ばれるものになります。初速度 0 の荷電粒子は電場からの力を受け最初 y 軸方向に等加速度運動を始め, 粒子の速度が 0 でなくなるとローレンツ力が働くので粒子は x 軸方向に曲がります。そのうち粒子は $-y$ 軸方向に向きを変えます。そうすると, 電場からの力は電子の速度を減速し x 軸に到達したとき速度は 0 になります。これで初期状態に戻る

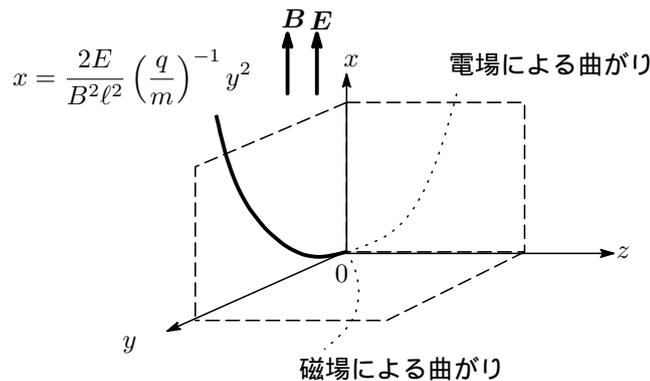
⁹ ここでは具体的解き方を省略します。今の段階では荷電粒子の描く軌跡をよく眺めておけばよいと思います。

ので粒子はまた同じ運動を始め、以後、周期的な運動が繰り返されることになります。

[例題-3] 電場と磁場を同じ方向にかけるとき、荷電粒子が電磁場内の入射方向に垂直なスクリーンに達する点の軌跡は、速度に無関係に比電荷 q/m だけで決まる¹⁰ 1 つの放物線であることを示せ。

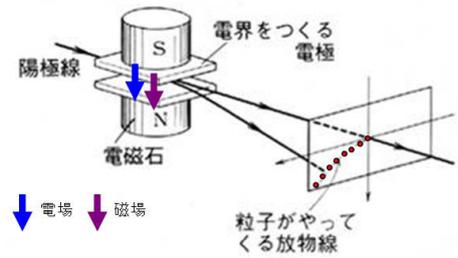
[解答] 例題-2 で $\ell' = 0$ として

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{電場により荷電粒子は}x\text{軸方向に曲がる} : x = \frac{qE\ell^2}{2mv_0^2} \\ \text{磁場により荷電粒子は}y\text{軸方向に曲がる} : y = \frac{qB\ell^2}{2mv_0} \end{array} \right. \rightarrow v_0\text{を消して } x = \frac{2E}{B^2\ell^2} \left(\frac{q}{m}\right)^{-1} y^2$$



[註] J.J.Thomson (英国の物理学者：1856-1940) の質量分析器

右図が質量分析器の原理図である。電極間で印加すると電子が陰極から陽極に進むが、この電子と衝突した原子はイオン化し陽電荷を持ち陽イオンになる。このため陽イオンは陰極に向かい、陰極間の隙間を通過している間、電極によって作られた電場 E から eE の力を受けて放物運動、磁石によって作られた磁場 B からローレンツ力を受けて円軌道を描いた後直進し乾板 F に達する。トムソン質量分析器では磁場と電場は平行に置かれた。陽極線の電荷を q 、初速度を v_0 、質量を m とすると、電場による乾板上の変位は q/mv_0^2 に比例し、磁場による変位は q/mv に比例する。これらの変位から陽極線の比電荷 q/m を測定した (1912 年)。



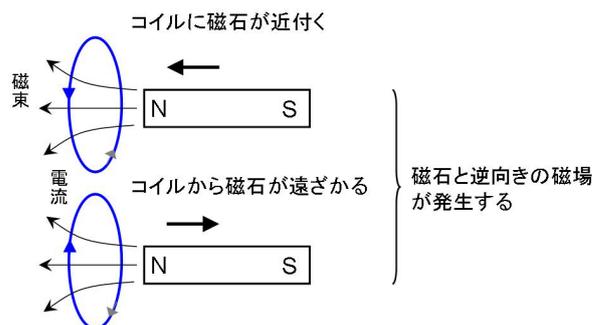
J.J. Thomsonの質量分析計装置

“場”について：今まで電場とか磁場というように“場”という言葉を使ってきましたが、この“場”というものの考え方は現代物理学の根本的な考え方で非常に重要な概念ですので簡単にそれに触れておきます。場というのは何らかの物理的性質を持った空間のことを指し、電場というのは電気的性質を帯びた空間のことで、磁場が磁氣的性質を帯びた空間のことです。空間の性質がベクトル量で表される場はベクトル場、スカラー量で表される場合はスカラー場、テンソル量で表される場合はテンソル場と呼ばれます。電場や磁場はベクトル場です。荷電粒子間のクーロン力を勉強しましたが、この力は1つの電荷の回りの空間が変化し、これが電場を生じたことになるわけで、その変化が光速で次々に伝わりもう1つの電荷に力を及ぼすわけです（いわゆる近接作用論）。場をニュートン力学でなく、量子力学で記述した理論を場の量子論といいます。場の量子論によれば電磁場は光子という質量のない粒子から記述されます。荷電粒子の周りには光子の雲ができており、光子は質量がないために非常に短い時間の間に遠くまでとどきます。これがクーロン力の正体です。。。詳しいことに興味のある方は高橋康著「古典場から量子場への道」等を参照されるといいでしょう。以上、余録のメモでした。

¹⁰ 1897年にJ・J・トムソンにより電子の質量電荷比 m/e が始めて測定された。

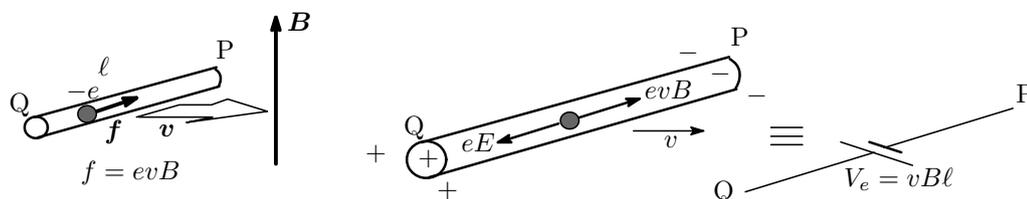
4.5 電磁誘導

図のように、コイルに対して磁石を近づけたり遠ざけたりするとコイルに起電力が生じ電流が流れます。この現象を電磁誘導といい、生じる起電力を誘導起電力、流れる電流を誘導電流といいます。誘導電流により発生する磁場は磁石の磁場を打ち消す方向の磁場を発生します。また、逆に、磁石を静止させておいてコイルを磁石に近づけたり遠ざけたりしても同じ様に誘導電流が流れます。このことをまとめて表現すると「磁束がコイルを横切るときに、コイルには誘導電流が流れる」ということになります。誘導電流はいつまでも流れるのではなく磁石（あるいはコイル）の動きが止まると誘導電流は流れなくなります。



4.5.1 誘導起電力とローレンツ力

磁束（磁石）が静止していて、導体棒（針金）が動く場合の誘導起電力を求めます。



長さ ℓ の導体が均一な磁束の中を速度 v で移動している場合、導体中の電荷にはローレンツ力が働きます。負電荷である電子 ($-e$) に働くローレンツ力の大きさは $f = evB$ で、その向きは（電子は負電荷であるので）右ネジの進む方向と逆の方向 $Q \rightarrow P$ となります。ローレンツ力が作用した結果、P 端には電子が集まって負に、Q 端は正に帯電し、 $Q \rightarrow P$ へ電場 E が生成されます。電子はこの電場から $F = -eE$ のクーロン力で Q 端側へ引かれます。ローレンツ力とクーロン力は釣り合った時点で電子の移動は止まります。力の釣り合いの式より電場の強さを求めると

$$0 = eE - evB \quad \rightarrow \quad E = vB$$

これから Q 端は P 端より

$$V_e = E\ell = vB\ell \text{ [V]}$$

だけ電位が高くなるのが分かります。この電位差が誘導起電力の大きさです。

[註] 導体棒はコイルと異なり回路が閉じていない（両端がオープン）ので電流は流れず、電位差（誘導起電力）が生じるだけです。

均一磁場の中を長さ ℓ の導体棒が時間 Δt の間に通過した磁束を $\Delta\Phi$ とすると、これは面積 $\Delta S = \ell v \Delta t$ に含まれる磁束と等しいので、磁束密度を B とすると

$$\Delta\Phi = B\Delta S = B\ell v \Delta t = V_e \Delta t$$

これから、導体に誘起される起電力 V_e の大きさは、導体が単位時間に横切る磁束に等しいという式

$$V_e = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \text{ [Wb/s]} \quad (4.5.1)$$

が得られます。ただし、起電力の向きについてはこの段階では分かりません。これについては次のセクションでお話します。

[例題-4] 磁束密度 $0.05 [\text{Wb}/\text{m}^2]$ の一様な磁場中に長さ 20cm の針金を磁場に直角に置き、 $1/100$ 秒間に 4cm の割合で上図のように動かしたとき、(1) $1/100$ 秒間に針金が横切った磁束はいくらか。(2) 針金に誘導される起電力はいくらか。

[解答](1) 針金が $1/100$ 秒間磁束を横切って動いた面積は $\Delta S = \ell \Delta x = 0.2 \times 0.04 = 0.008 [\text{m}^2]$ 、針金が横切った磁束は $\Delta \Phi = B \Delta S = 0.05 \times 0.008 = 0.0004 [\text{Wb}]$ (2) 起電力 $V_c = \Delta \phi / \Delta t = 0.0004 / (1/100) = 0.04 [\text{Wb}/\text{s}] = 0.004 [\text{V}]$

//

4.5.2 ファラデーの法則とレンツの法則

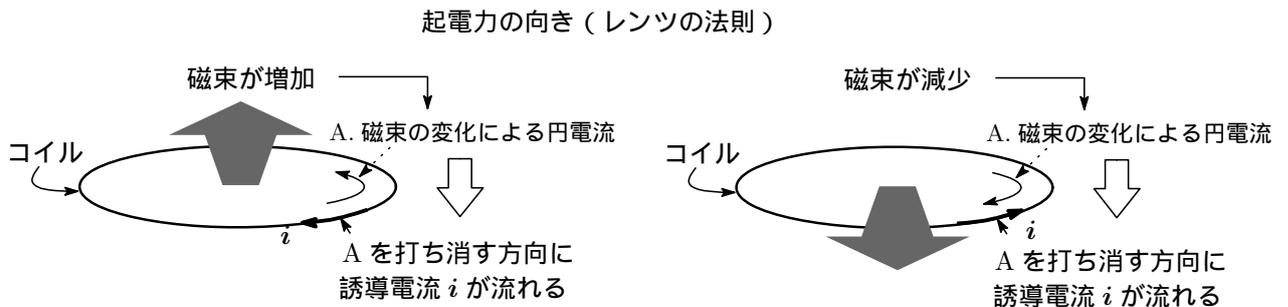
1 巻きのコイルを通る磁束が dt 秒間に $d\Phi [\text{Wb}]$ だけ変化したとき、コイルに生じる起電力の大きさ $|V_e|$ は磁束の変化する速さ $d\Phi/dt$ に等しい。

$$|V_e| = \left| \frac{d\Phi}{dt} \right| \quad (4.5.2)$$

これをファラデー¹¹の法則といいます。 N 巻きコイルに生じる起電力は 1 巻きコイルに生じる起電力が直列につながれたものと考えられるので

$$|V_e| = N \left| \frac{d\Phi}{dt} \right| \quad (4.5.3)$$

となります。起電力の向きに関しては、コイルを貫く磁束の変化を打ち消す方向に誘導電流を流す向きに生じます。これをレンツ¹²の法則といいます。



磁束を作る電流の向きを正とすると、起電力は逆向きの電流を流す方向となるので (4.5.2) は絶対値をはずして

$$V_e = - \frac{d\Phi}{dt} [\text{V}] \quad (4.5.4)$$

と表すことができます。この式を一般にファラデーの（電磁誘導）の法則といいます。誘導起電力の向きは次のフレミングの右手の法則で簡単に知ることができます。右手の親指、人差し指、中指を直角に開き

・親指: 導体棒の運動 v の方向
 ・人差し指: 磁束 B の方向
 } に向けると中指は誘導起電力（誘導電流）の向きを示す

4.5.3 相互誘導

2 つのコイル P と S を下図のように並べてスイッチ K を閉じコイル P に電流を流した瞬間、コイル S には磁束が貫きファラデーの法則により起電力が誘起され、検流計 G には一瞬電流が流れます。

¹¹ Michael Faraday (1791-1867) イギリスの物理学者。

¹² Heinrich Friedrich Emil Lenz (1804-1865) ドイツの物理学者。

コイル P に流れる電流の変化に応じてコイル S に起電力が誘導されることを相互誘導といい、電流の変化のある方のコイルを 1 次コイル、起電力が誘導されるほうのコイルを 2 次コイルといいます。2 次コイルに誘導される起電力を V_{e2} 、1 次コイルに流れる電流の変化の速さを di_1/dt とすると誘導起電力は

$$V_{e2} = -M \frac{di_1}{dt} \quad (4.5.5)$$

で与えられ、比例定数 M は相互インダクタンス（相互誘導係数）と呼ばれます。1 次コイル P を流れる電流 i_1 が 1 秒間に 1[A] の割合で変化するとき、2 次コイル S に 1[V] の誘導起電力を生じる場合、相互インダクタンスを 1 ヘンリー [H] であるとしします。単位の関係は次のようになります。

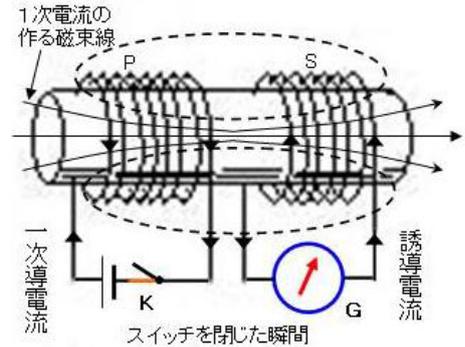
$$[V] = [H] \times [A]/[s] \quad \therefore [H] = [V] \cdot [s]/[A] \quad (4.5.6)$$

[例題-5] 相互誘導係数 0.50[H] の一組のコイルの 1 次コイルに 10[A] の電流が流れているとき、回路のスイッチが切れて一定の割合で電流が減じて、1/50 秒間に電流が消失するとき 2 次コイルに誘導される起電力は何 [V] か。

[解答] 10[A] の電流が 1/50[s] で 0[A] になったのだから単位時間当たりの電流の変化は $\frac{di}{dt} = (0 - 10)/(1/50) = -500$ 。2 次コイルに誘導される起電力は (4.5.5) より

$$v_{e2} = -M \frac{di}{dt} = -0.5 \times (-500) = 250 \text{ [V]}$$

//



4.5.4 自己誘導

1 つのコイルに流れる電流を変化させるとコイル内部の磁束も変化するのでコイルに誘導起電力が生じます。これはコイル自身に流れる電流によりコイルに生じる誘導起電力なので自己誘導と呼んでいます。自己誘導起電力を V_{e1} とすると

$$V_{e1} = -L \frac{di}{dt} \quad (4.5.7)$$

で与えられ、比例定数 L を自己インダクタンス（自己誘導係数）あるいは単にインダクタンスといいます。自己インダクタンス L を具体的に求めてみましょう。断面積 S 、長さ l の N 巻きコイルに電流 i が流れているとき、コイル内の磁場の大きさと磁束密度は

$$H = \frac{N}{l}i = ni, \quad B = \mu H = \mu ni$$

1 巻きのコイルを貫く磁束 Φ は

$$\Phi = BS = \mu nSi$$

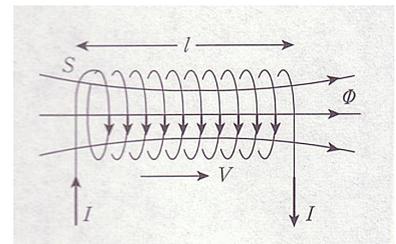
となります。電流 i が時間的に変化すると、コイルを貫く磁束も変化するので、コイルには誘導起電力が生じます。1 巻きのコイルの生じる誘導起電力を v_e とすると $v_e = -\frac{d\Phi}{dt}$ なので、コイル全体に生じる誘導起電力 V_e は

$$V_e = -N \frac{d\Phi}{dt} = -\mu l n^2 S \frac{di}{dt}$$

この式と (4.5.7) を比較すると、自己インダクタンス L は

$$L = -\mu l n^2 S \quad (4.5.8)$$

で与えられることが分かります。



[例題-6] 自己インダクタンス 5 ヘンリーのコイルを流れる電流が 0.01 秒間に 0.8[A] から 0.6[A] に減少したとすれば，コイルに誘導された起電力の大きさを求めよ。

[解答]

$$V_e = -L \frac{di}{dt} = -5 \times \frac{0.6 - 0.8}{0.01} = +100 [\text{V}]$$

//

4.5.5 コイルに蓄えられるエネルギー

電池につながれたコイルにスイッチを ON にして電流を流すとコイル内には磁場が生じます。これはコイルを流れる電流を抑止する方向の起電力として働きます。従って，電池はコイルに誘導される逆向きの起電力 V_e に逆らって電流を流すための仕事をしなければならず，このエネルギーは磁場のエネルギーとして空間に蓄えられます。このエネルギーを電磁エネルギーといいます。自己インダクタンス L [H] のコイルを i [A] の電流が流れている場合の電磁エネルギーは

$$U = \frac{1}{2} L i^2 [\text{J}] \quad (4.5.9)$$

で与えられます。

次回は交流の話をしていく予定です。

by *KENLOU*

(2009.12.13 了)