社会人のための楽しい物理入門

第４章： 電磁気学

KENZOU

2009 年 12 月 22 日

目 次

4.6 交流 3
4.6.1 正弦波交流 3
4.6.2 平均値と実効値 4
■平均値 4
■実効値 4
4.6.3 コイルに流れる交流 5
■誘導リアクタンス 5
■消費電力 6
4.6.4 コンデンサーに流れる交流 6
■消費電力 7
4.6.5 インピーダンス 7
■ RL 直列回路 7
■インピーダンスのベクトル計算 9
■ RC 直列回路 9
■ LC 直列回路 10
■ RLC 直列回路 11
■ RL 並列回路 11
■ RC 並列回路 12
■ RLC 並列回路 13
4.6.6 アドミッタンス 14
4.6.7 電気振動 14

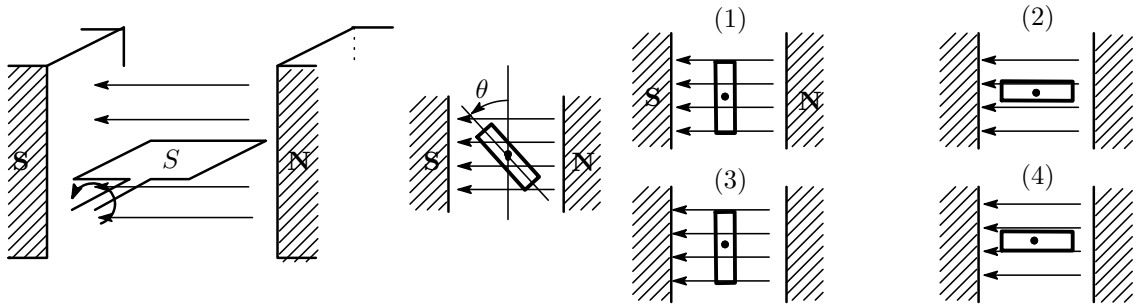
4.6 交流

4.6.1 正弦波交流

コイルを貫く磁束を変化させると起電力が生じます。このことを利用して，一様な磁場中に置かれたコイルを一定の角速度 ω で回転[1]させてやるとコイルの両端に

$$v = v_0 \sin(\omega t + \theta_0) \tag{4.6.1}$$

であらわされる交流電圧が生じることになります。尚，θ_0 は $t = 0$ における初期位相です。



上図に示すように，コイルが (1) の位置（$\theta = 0$) にある場合は，コイルを貫く磁束は最も多く，コイルが回転すると磁束は次第に少なくなり，(2) の位置（$\theta = \pi/2$）の位置ではコイルを貫く磁束は 0 となります。次に (3) の位置（$\theta = 3\pi/2$）では再び磁束が最大となり，(4) の位置（$\theta = 2\pi$）では磁束が 0 になります。コイルが囲む面積を S とするとコイルを貫く磁束 Φ は磁束密度を B として

$$\Phi = BS\cos\omega t \quad (\text{但し}\theta = \omega t)$$

で与えられます。磁束の時間変化は Φ を t で微分して

$$\frac{d\Phi}{dt} = -BS\omega\sin\omega t$$

誘導される起電力 v は従って

$$v = -\frac{d\Phi}{dt} = v_0 \sin\omega t, \quad \text{但し}\, v_0 = BS\omega \tag{4.6.2}$$

と正弦曲線となります。v_0 を交流電圧の振幅，ω を各周波数，$\omega t + \theta_0$ を位相と呼んでいます。周期 T と周波数 f，角振動数 ω の間には波とケースと同様に

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}\ \texttt{[rad/s]} \quad f = \frac{1}{T} = \frac{2\pi}{\omega}\ \texttt{[Hz]} \tag{4.6.3}$$

の関係が成り立ちます[2]。尚，コイルが $t = 0$ の時に θ_0 傾いていれば，$\Phi = BS\cos(\omega t + \theta_0)$ となるので (4.6.2) は $v = v_0 \sin(\omega t + \theta_0)$ となりますね。出力電圧 $v = v_0 \sin\omega t$ の交流電源に抵抗 R がつながれているとき，流れる電流（交流電流）は電源電圧と同じ位相で変化します。つまり，

$$i = i_0 \sin\omega t \tag{4.6.4}$$

i_0 は電流の最大値で，$i_0 = v_0/R$ で与えられます[3]。

[1] コイルを固定して磁石を回転させても同じことですね！
[2] 東日本は 50Hz，西日本は 60Hz の交流が用いられています。
[3] 各瞬間にオームの法則が成立し，$i = v/R = (v_0/R)\sin\omega t = i_0 \sin\omega t$

4.6.2　平均値と実効値

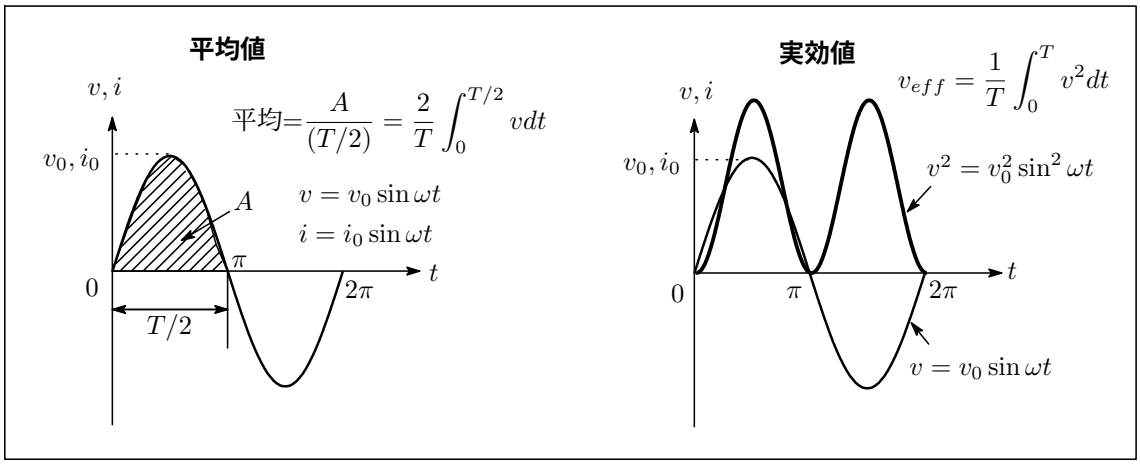
■平均値

交流電圧・電流は時間的に正弦波で変化しており，1 周期の平均をとると正負打ち消しあって 0 になります。そこで半周期（$T/2$）についての平均をとってやると，その値は正弦波の頭半分の面積（A）を $T/2$ で割ったものなので

$$\begin{aligned}\bar{v} &= \frac{A}{T/2} = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} v dt = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} v_0 \sin\omega t dt \\ &= \frac{v_0}{\pi}\int_0^{\pi} \sin\phi d\phi = \frac{v_0}{\pi}\left[-\cos\phi\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}v_0 = 0.637 v_0 \qquad (4.6.5)\end{aligned}$$

同様にして

$$\bar{i} = \frac{2}{\pi} i_0 = 0.637 i_0 \qquad (4.6.6)$$



■実効値

1 周期の平均は正負打消しあって 0 となりますが，2 乗したものの 1 周期の平均をとればそれは 0 にはなりませんね。その値の平方根をとったものを交流の**実効値**といいます。

$$\begin{cases} v_{eff} = \sqrt{\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T v^2 dt} = \dfrac{v_0}{\sqrt{2}} \ (= 0.707 v_0) \\ i_{eff} = \sqrt{\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T i^2 dt} = \dfrac{i_0}{\sqrt{2}} \ (= 0.707 i_0) \end{cases} \qquad (4.6.7)$$

実効値は最大値の $1/\sqrt{2}$ 倍となります。

さて，交流電流の強さは時間とともに周期的に変化していますが，時間 t の瞬間における抵抗 R[Ω] を流れるときの消費電力 p は

$$p = Ri^2 = Ri_0^2 \sin^2\omega t$$

この 1 周期の間の平均消費電力 P は

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p dt = \frac{Ri_0^2}{T}\int_0^T \sin^2\omega t dt = \frac{Ri_0^2}{2T}\int_0^T (1-\cos 2\omega t) dt = R\left(\frac{i_0}{\sqrt{2}}\right)^2 = R\, i_{eff}^2$$

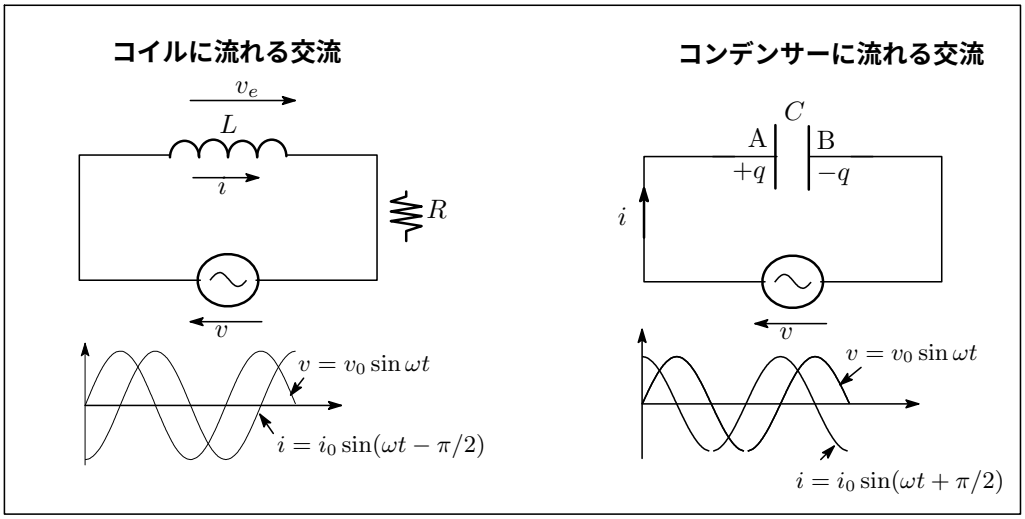
となります。一方，これと同じ消費電力となる直流電流の強さを i_d とすると

$$P = R\, i_d^2 = R\, i_{eff}^2$$

となるので，$i_{eff} = i_d$。つまり，交流の実効電流 i_{eff} は，**抵抗で消費される電力が等しいときの直流電流の強さ**に等しいということになります。実効電圧 v_{eff} についても全く同様です。ということで，実効値を用いると直流でおなじみのオームの法則と同じ形の法則が成り立ちます。但し，直流抵抗に相当するものとして交流では**インピーダンス**となりますが，インピーダンスについては§4.6.5 の項で説明します。

4.6.3　コイルに流れる交流

自己インダクタンス L のコイルに交流電圧 $v = v_0 \sin \omega t$ をかけたとき，回路に流れる電流 i を考えます。



回路を時計向きに流れる電流を正とすると，電流の正の向きに生じるコイルの誘導起電力[4]は

$$v_e = -L\frac{di}{dt} \tag{4.6.8}$$

回路の途中に抵抗 R があるとすると，キルヒホッフの第 2 法則（閉回路の起電力の総和はその回路の抵抗による電圧降下の総和に等しい）より $v + v_e = iR$。今，抵抗 $R = 0$ であるので

$$v + v_e = 0 \longrightarrow v - L\frac{di}{dt} = 0$$

が得られます。これを**回路方程式**と呼びます。交流電流 $i = i_0 \sin \omega t$ を上式にいれると

$$v - L\frac{d}{dt}(i_0 \sin \omega t) = 0 \rightarrow v = \omega L i_0 \cos \omega t = \omega L i_0 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow v = v_0 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right), \quad v_0 = \omega L i_0$$

が得られ，交流電圧の位相は交流電流の位相より $\pi/2$ 進んでいることがわかります。そこで位相の基準を交流電圧にとり $v = v_0 \sin \omega t$ と書き改めると コイルを流れる電流の位相はそれより $\pi/2$ 遅れて

$$i = i_0 \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \tag{4.6.9}$$

となります。

■誘導リアクタンス

このように，コイルに交流電流が流れようとすると自己誘導による逆起電力が生じ，このため電圧がかかってもすぐには電流が流れません。これが位相の遅れの原因ですね。$i_0 = v_0/\omega L$ を直流のオームの法則 $i = V/R$ と比較すると丁度 ωL が抵抗 R に相当しますが，この ωL を**誘導リアクタンス**といいます。誘導リアクタンス X_L は

$$X_L = \omega L = 2\pi f L \ [\Omega] \tag{4.6.10}$$

[4] 交流電流の流れを妨げる向きに起電力が生じる。

で定義されます。コイルにかかる実効電圧を V，流れる実効電流を I とすると $V = v_0/\sqrt{2}$, $I = i_0/\sqrt{2}$ なので，$i_0 = v_0/\omega L$ から

$$I = \frac{V}{\omega L} = \frac{V}{2\pi f L}\ \texttt{[A]} \longrightarrow X_L = \frac{V}{I}\ \texttt{[}\Omega\texttt{]} \tag{4.6.11}$$

が得られます。このことから，誘導リアクタンスは直流の場合の抵抗に相当[5]することが分かりますね[6]。

■消費電力

次にコイルでの消費電力について調べてみましょう。消費電力 p は

$$p = vi = -v_0 i_0 \sin\omega t \cos\omega t = -\frac{v_0^2}{\omega L}\sin\omega t\cos\omega t$$

で与えられ，これから 1 周期についての平均消費電力 P を求めると

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p dt = -\frac{v_0^2}{\omega L}\int_0^T \sin\omega t\cos\omega t dt = -\frac{v_0^2}{2\omega L}\int_0^T \sin 2\omega t dt = -\frac{v_0^2}{4\omega^2 L}\Big[\cos 2\omega t\Big]_0^T = 0 \tag{4.6.12}$$

となります。つまり，コイルでは平均として電力は消費されないことになりますね。交流では電流の増減が周期的に繰り返されていますが，電流が増加すると電磁エネルギーが空間に蓄えられ，一方，電流が減少すると，蓄えられた電磁エネルギーは電流として移動している電荷に戻されます[7]。このことから，平均としてのコイルでの消費電力は 0 となるわけです。

4.6.4 コンデンサーに流れる交流

電気容量 C のコンデンサーに交流電圧 $v = v_0 \sin\omega t$ をかけたとき，回路に流れる電流 i を考えます。コンデンサーは 2 枚の極板が空間を離れて対向しているので，本当に電流が流れるのか？と疑問をもたれるかも知れませんが，直流は流れません。しかし，交流は流れます。時計回りに回路を流れる電流を正とします。コンデンサーに交流を流すと，極板 A に正電気が流れ込んでいくと同時に極板 B には静電誘導で同量の電気が流れ出します。しかしすぐに AB 間の電圧は交流電圧と等しくなって電流は流れなくなります[8]。次に A の正電気は逆向きに流れ出し，同時に B に正電気が流れ込むみ，交流電圧と等しくなったところで電流は 0 となる。交流の場合，このようなことが繰り返されてコンデンサーに電流が流れることになります。コンデンサーに溜まる電荷量を q，交流電圧を v とすると $q = Cv$ ですね。電流は電荷量の時間変化なので（※【註】参照）

$$i = \frac{dq}{dt}, \quad v = v_0 \sin\omega t$$

これからコンデンサーを流れる電流は

$$\begin{aligned} i &= \frac{d}{dt}(Cv) = Cv_0\frac{d}{dt}\sin\omega t = \omega C v_0 \cos\omega t = \omega C v_0 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= i_0 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right), \quad i_0 = \omega C v_0 \end{aligned} \tag{4.6.13}$$

で与えられ，電流は電圧より $\pi/2$ 進んだ位相 で変化することがわかります。$i_0 = \omega C v_0$ で，コイルのところでやったように

$$i_0 = \frac{v_0}{1/(\omega C)}$$

と置き直してやると，オームの法則 $i = V/R$ との比較で $\frac{1}{\omega C}$ が抵抗 R に相当することがわかります。容量 C が小さいほど，また交流の周波数（$f = \omega/2\pi$）が小さいほど電流は流れにくくなります。このコン

[5] 交流に対するリアクタンスと区別するために R を直流抵抗ということもあります。
[6] 後ほど説明するように誘導リアクタンスはコイルのインピーダンスとも呼ばれます。
[7] 自転車で坂道を上り下りするのに例えるましょう。上り坂を上がるときは結構しんどいですが（その分エネルギーが溜まっている），頂上についてから坂を下り始めると非常に快適（溜めたエネルギーを消費する）!! 。上りで溜めたエネルギーを下りで消費するのでエンルギーの収支は 0 ですね。
[8] この意味で直流も瞬間的には流れることになります！

デンサーの交流の流れを妨げる働きを容量リアクタンス（X_C）といいます[9]。

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C}\ [\Omega] \tag{4.6.14}$$

コイルでやったと同様にして交流の実効電圧を V，実効電流を I とすると

$$I = \frac{V}{1/\omega C} = \omega C V = 2\pi f C V\ [\mathrm{A}] \tag{4.6.15}$$

という関係式が得られます。

【註】

・電流 i の正の向きを $+q$ に流れ込む向きに決めているときは $i = dq/dt$

・電流 i の正の向きを $+q$ に流れ込む向きに決めているときは $i = -dq/dt$

■消費電力

消費電力 P は $p = vi$ を 1 周期についての平均をとればよいので

$$P = \int_0^T p dt = \int_0^T v i dt = \omega C v_0^2 \int_0^T \sin\omega t \cos\omega t dt = 0$$

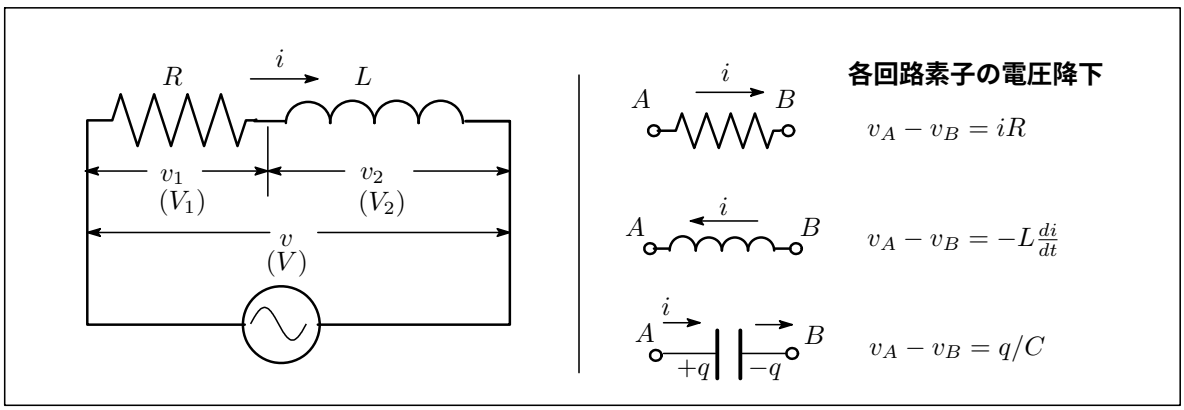
となります。つまり，コンデンサーでは平均として電力は消費されないことになります。これはコンデンサーに電荷がたまると極板間に電場が生じて静電エネルギーが蓄えられ，電荷が減少するとそのエネルギーは回路に流れる電流として移動している電荷に戻されるということからきています。

4.6.5　インピーダンス

直流の場合，抵抗が大きいほど電流は流れにくいというように，電流の流れにくさを表すものとして抵抗を導入しました。この考えを交流にまで拡張して，ある導体に交流を印加したとき、その導体に流れる電流の流れにくさを表すものとして**インピーダンス**(Z) を導入します。簡単に言えば，インピーダンスは交流回路における抵抗[10]ということで，先ほどでてきた X_L，X_C はコイルやコンデンサーのインピーダンスとなります。また，一般には電圧と電流の振幅の比をインピーダンスといいます。

■ RL 直列回路

抵抗 R と自己インダクタンス L のコイルを直列につないだ回路に交流電流 $i = i_0 \sin\omega t$ を流した場合を調べてみます。直列回路の場合，抵抗 R とコイル L を流れる電流は i なので，電流を基準にとって考えていきます。



[9] 後ほど説明するように容量リアクタンスをコンデンサーのインピーダンスとも言います。
[10] インピーダンスは周波数 f が絡んでくるところが直流抵抗とは異なります。

流れる電流を $i = i_0 \sin\omega t$ とすると，抵抗にかかる電圧 v_1 は流れる電流 i の間に位相差はないですが，コイルにかかる電圧は位相が $\pi/2$ 進む（電圧から見れば電流は $\pi/2$ 遅れる）ので

$$\begin{cases} v_1 = Ri = Ri_0 \sin\omega t \\ v_2 = v_0 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = \omega L i_0 \cos\omega t \end{cases}$$

回路に加えられた全電圧 v は v_1 と v_2 の和なので，三角関数の合成公式[11]を使って

$$\begin{aligned} v = v_1 + v_2 &= Ri_0 \sin\omega t + \omega L i_0 \cos\omega t \\ &= \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}\, i_0 \sin(\omega t + \phi) \\ &= v_0 \sin(\omega t + \phi), \quad v_0 = i_0\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}, \quad \tan\phi = \frac{\omega L}{R} \end{aligned}$$

が得られます。これから RL 回路のインピーダンス Z は

$$Z = \frac{v_0}{i_0} = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \tag{4.6.16}$$

電流を基準に取ると電圧の位相差は

$$\phi = \tan^{-1}\frac{\omega L}{R} \tag{4.6.17}$$

だけ進んでいくことになります。

次に電圧を基準に取り，$v = v_0 \sin\omega t$ として回路の流れる電流を求めていきましょう。コイルでの電圧降下を v_e とするとキルヒホッフの第 2 法則より $v + ve = iR$ で[12]，回路方程式は次の微分方程式となります。

$$v_0 \sin\omega t - L\frac{di}{dt} = iR \longrightarrow L\frac{di}{dt} + Ri = v_0 \sin\omega t$$

この 1 階線形微分方程式の解は容易に求めることができますが，ここでは解の具体的求め方を省略し，求める解のみを書くと次のようになります。

$$i(t) = \frac{v_0}{R^2 + (\omega L)^2}\{R\sin\omega t - \omega L\cos\omega t + e^{-(R/L)t}\omega L\}$$

交流を流して長時間後（$t \to \infty$）には上式右辺第 3 項の $e^{-(R/L)t}$ は 0 になるので[13]，求める電流値 i は

$$\begin{aligned} i &= \frac{v_0}{R^2 + (\omega L)^2}\{R\sin\omega t - \omega L\cos\omega t\} \\ &= \frac{v_0}{R^2 + (\omega L)^2}\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}\left(\frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}\sin\omega t - \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}\cos\omega t\right) \\ &= \frac{v_0}{R^2 + (\omega L)^2}\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}\,(\sin\omega t\cos\phi - \cos\omega t\sin\phi)\,, \\ &= \frac{v_0}{R^2 + (\omega L)^2}\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}\sin(\omega t - \phi), \quad \text{但し}\ \cos\phi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}},\ \sin\phi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \\ &= \frac{v_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}\sin(\omega t - \phi) \qquad (4.6.18) \\ &= i_0 \sin(\omega t - \phi), \quad i_0 = \frac{v_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}, \quad \tan\phi = \frac{\omega L}{R} \qquad (4.6.19) \end{aligned}$$

となり，電流は電圧に比べて位相 ϕ だけ遅れることになります。インピーダンスは (4.6.16) と同じ

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \tag{4.6.20}$$

となります。

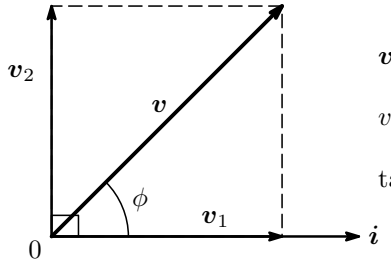
[11] $a\sin\theta + b\cos\theta = \sqrt{a^2 + b^2}\sin(\theta + \phi)$, $\tan\phi = b/a$

[12] §4.6.3「コイルに流れる電流」の項を参照。

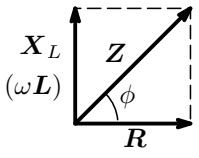
[13] 交流を流した直後の変化を過渡応答といいますが，ここでは十分時間が経過した後の定常的な状態を考えています。

■インピーダンスのベクトル計算

電流や電圧をベクトルとして捉えてみましょう。抵抗 R の両端の電圧は $v_1 = iR$ で，コイル L の両端の電圧は $v_2 = X_L i = \omega L i$ でした。次に電流と電圧の位相を見ると，v_1 と i は同相で，v_2 は i より $\pi/2$ 進んでいます。この関係をベクトルで書くと下図の左の様になります。



$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$$
$$v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$$
$$\tan\phi = \frac{v_2}{v_1}$$



$$Z = \sqrt{R^2 + X_L^2} = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$$
$$\tan\phi = \frac{X_L}{R} = \frac{\omega L}{R}$$

一応，このようにおいて具体的にベクトル計算を進めると

$$v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = \sqrt{(iR)^2 + (\omega L i)^2} = i\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$$
$$\therefore\ \frac{v}{i} = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \equiv Z$$
$$\tan\phi = \frac{v_2}{v_1} = \frac{\omega L}{R}$$

となって，簡単にインピーダンス Z を求められることが分かります。実効値に焼き直して整理すると

$$V_1 = IR, \quad V_2 = I\omega L$$
$$V = \sqrt{V_1^2 + V_2^2} = I\sqrt{R^2 + (\omega L)^2} = IZ, \quad I = \frac{V}{Z} \tag{4.6.21}$$
$$\left(I = \frac{V}{Z} \longleftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} i_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{v_0}{Z} \longleftrightarrow i_0 = \frac{v_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \right)$$

すでにお分かりのように $V = IZ$ は直流回路のオームの法則と同じ形をしていますね。電流と電圧の位相のズレ角 ϕ は

$$\phi = \tan^{-1}\frac{\omega L}{R}$$

で与えられます。インピーダンスのベクトル計算法は大変有用な方法であることが分かります。

【例題.1】 0.16H のコイルと 100 Ωの抵抗を直列につなぎ，両端に 100V，100Hz の交流電圧を加えた。このとき次の値を求めよ。
(1) コイルのインピーダンス，　(2) 全体のインピーダンス，(3) 流れる電流，　(4) コイル両端の電圧の最大値，　(5) 電流は電圧より何度遅れて進むか。

【解答】(1) コイルのインピーダンスは $X_L = 2\pi f L = 2\pi \times 100 \times 0.16 = 100$[Ω]
(2) 全体のインピーダンスは $Z = \sqrt{R^2 + X_L^2} = \sqrt{100^2 + 100^2} = 141$[Ω]
(3) 流れる電流は $V = IZ$ より $I = V/Z = 100/141 = 0.71$[A]
(4) コイル両端の実効電圧は $V_2 = IX_L = 0.71 \times 100 = 71$[V]
　コイル両端の最大電圧を $v_{2,0}$ とすると $v_{2,0} = \sqrt{2}V_2 = \sqrt{2} \times 71 = 100$[V]
(5) 遅れの角 ϕ は $\tan\phi = \omega L/R = 100/100, \therefore\ \phi = \pi/4$

■ RC 直列回路

抵抗 R と電気容量 C のコンデンサーを直列につないだ回路のインピーダンスを求めてみましょう。交流電流を $i = i_0 \sin\omega t$ とするとコンデンサーにかかる電圧 v_2 の位相は電流 i の位相より $\pi/2$ 遅れること

を考慮し，

$$v = v_1 + v_2 = Ri_0 \sin\omega t + \frac{i_0}{\omega C}\sin(\omega t - \pi/2) = i_0\sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2}\sin(\omega t - \phi)$$
$$= v_0 \sin(\omega t - \phi), \quad v_0 = i_0\sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2}, \quad \tan\phi = \frac{1}{\omega CR}$$

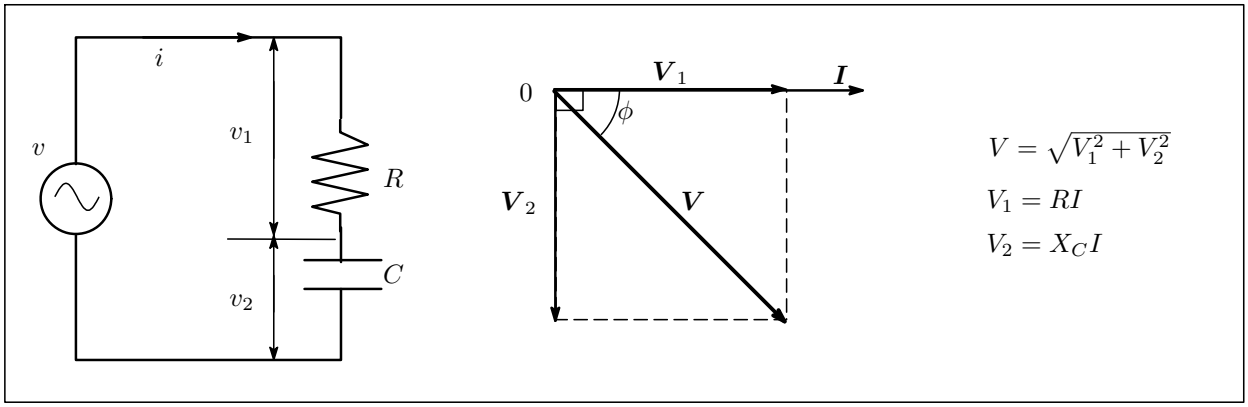
これからこの回路のインピーダンス Z は

$$Z = \sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2} \tag{4.6.22}$$

また，電圧の位相差 ϕ は

$$\phi = \tan^{-1}\frac{1}{\omega CR} \tag{4.6.23}$$

で，電流 i に対して ϕ だけ位相が遅れる[14]ことになります。

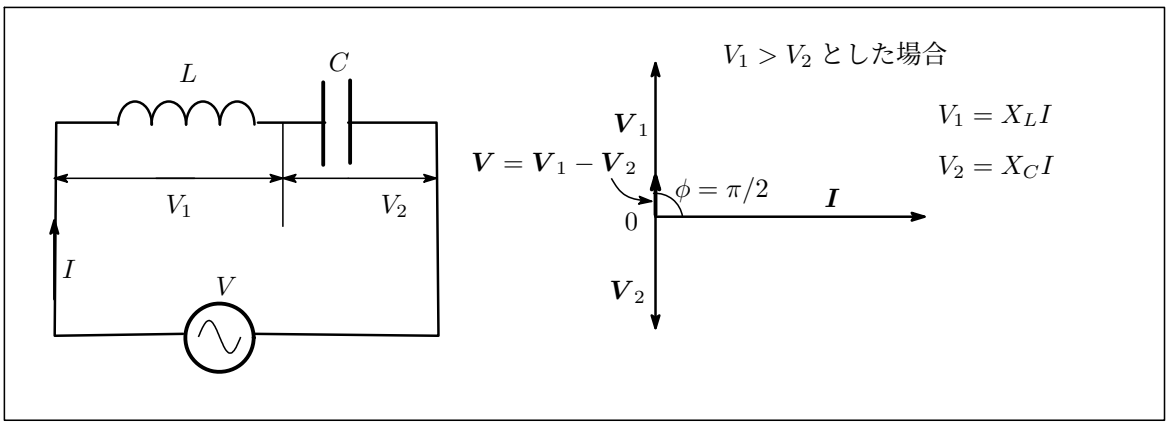


上でやったようにベクトル算法を使うと

$$V = \sqrt{V_1^2 + V_2^2} = I\sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2} = IZ, \quad V_1 = RI, \quad V_2 = X_C I \tag{4.6.24}$$

■ LC 直列回路

自己インダクタンス L のコイルと電気容量 C のコンデンサーを直列につないだ回路のインピーダンスを求めてみましょう。やり方の容量は今までの説明でお分かりになったと思うので，ここでは実効値を使ったベクトル算法で求めていくことにします。コイル L の両端にかかる実効電圧 $V_1 = X_L I = \omega LI$, コンデンサーの両端にかかる実効電圧 $V_2 = X_C I = (1/\omega C)I$ で，それぞれの位相は電流 I に比べて V_1 は I から $\pi/2$ 進み，V_2 は I から $\pi/2$ 遅れるので，V_1 と V_2 の位相差は π となります。これをベクトル図で示したのが下図です。



[14] 電圧 v から見れば電流 i は ϕ だけ位相が進むことになる。

ここでは $V_1 > V_2$ として話を進めていくことにします。ベクトル図より

$$V = V_1 - V_2 = \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) I = ZI$$

$$\therefore\ Z = \omega L - \frac{1}{\omega C}\ [\Omega], \quad I = \frac{V}{Z} = \frac{V}{\omega L - \dfrac{1}{\omega C}} \tag{4.6.25}$$

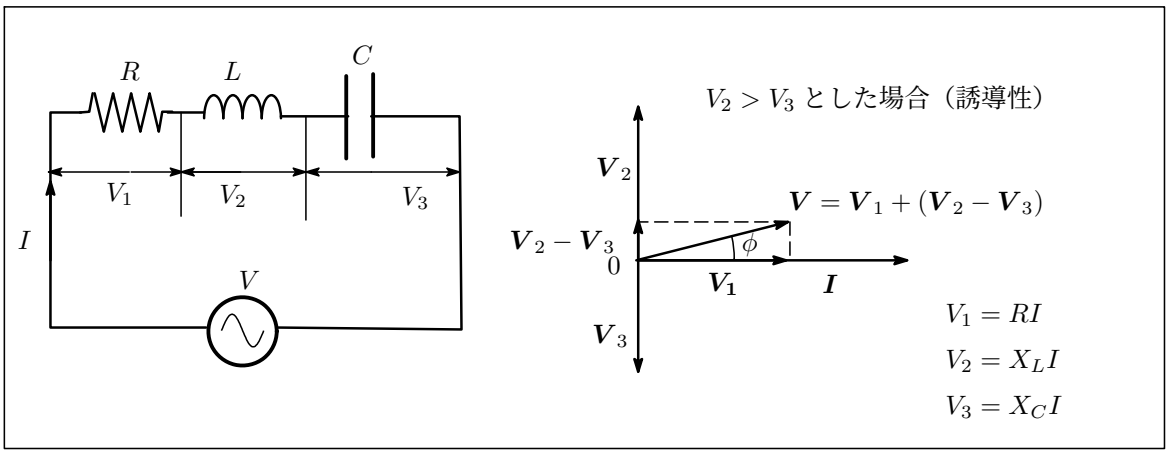
$X = \omega L - 1/\omega C$ とおくと

$$X = \omega L - \frac{1}{\omega C} \Longrightarrow \begin{cases} (1)\omega L > \dfrac{1}{\omega C} \ \cdots & \text{電圧 } V \text{ は電流 } I \text{ より位相}\phi/2 \text{ だけ進む (誘導性)} \\ (2)\omega L < \dfrac{1}{\omega C} \ \cdots & \text{電圧 } V \text{ は電流 } I \text{ より位相}\phi/2 \text{ だけ遅れる（容量性）} \end{cases} \tag{4.6.26}$$

(1) の場合，回路は**誘導性**であるといい，(2) の場合，回路は**容量性**であるといいます。

■ RLC 直列回路

抵抗 R，自己インダクタンス L のコイルと電気容量 C のコンデンサーを直列につないだ回路のインピーダンスを求めてみましょう。抵抗 R の両端の電圧は電流と同相，コイルでは電流に対して $\pi/2$ 進む，コンデンサーでは $pi/2$ 遅れるので，ベクトル図は下図のようになります。



従って

$$V = \sqrt{V_1^2 + (V_2 - V_3)^2} = I\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = I\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = IZ \tag{4.6.27}$$

$$\therefore\ Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}, \quad \tan\phi = \frac{V_2 - V_3}{V_1} = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R} \tag{4.6.28}$$

$X = \omega L - 1/\omega C$ とおくと

$$X = \omega L - \frac{1}{\omega C} \Longrightarrow \begin{cases} \omega L > \dfrac{1}{\omega C} \ \cdots & \text{電圧 } V \text{ は電流 } I \text{ より位相}\phi\text{だけ進む (誘導性)} \\ \omega L < \dfrac{1}{\omega C} \ \cdots & \text{電圧 } V \text{ は電流 } I \text{ より位相}\phi\text{だけ遅れる（容量性）} \end{cases} \tag{4.6.29}$$

■ RL 並列回路

次に並列回路について見ていきます。並列回路の場合，各素子にかかる電圧は v なので，端子電圧 v を基準にとって考えていきます。素子の両端に交流電圧 $v = v_0 \sin\omega t$ をかけた場合について調べていきましょ

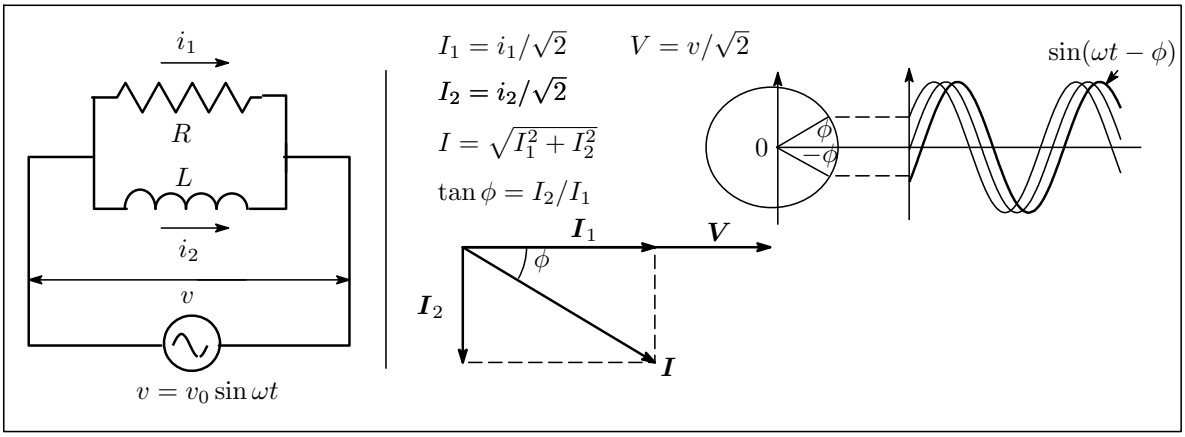
う。抵抗 R に流れる電流は電圧と同相ですがコイルに流れる電流は電圧に対して $\pi/2$ 遅れるので，次のようになりますね。

$$\begin{cases} \text{抵抗に流れる電流：} & i_1 = v/R = (v_0/R)\sin\omega t \\ \text{コイルに流れる電流：} & i_2 = v/X_L = (v_0/\omega L)\sin(\omega t - \pi/2) \end{cases} \tag{4.6.30}$$

電源から流れ出る電流 i は $i = i_1 + i_2$ なので

$$\begin{aligned} i &= i_1 + i_2 = (v_0/R)\sin\omega t + (v_0/\omega L)\sin(\omega t - \pi/2) \\ &= \frac{v_0}{Z}\sin(\omega t - \phi), \quad \text{但し，} Z = \frac{R\omega L}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \frac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{R^2} + \left(\dfrac{1}{\omega L}\right)^2}}, \quad \tan\phi = \frac{R}{\omega L} \end{aligned} \tag{4.6.31}$$

となって，電流の位相は電圧より ϕ だけ遅れていることが分かります。



実効値のベクトル計算をやると

$$\begin{aligned} I &= \sqrt{I_1^2 + I_2^2} = \sqrt{(V/R)^2 + (V/Z_L)^2} = \sqrt{(V/R)^2 + (V/\omega L)^2} = \frac{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}{R\omega L} V \\ Z &= \frac{V}{I} = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{R^2} + \left(\dfrac{1}{\omega L}\right)^2}} \ \texttt{[A]}, \quad \tan\phi = \frac{I_2}{I_1} = \frac{R}{\omega L} \end{aligned}$$

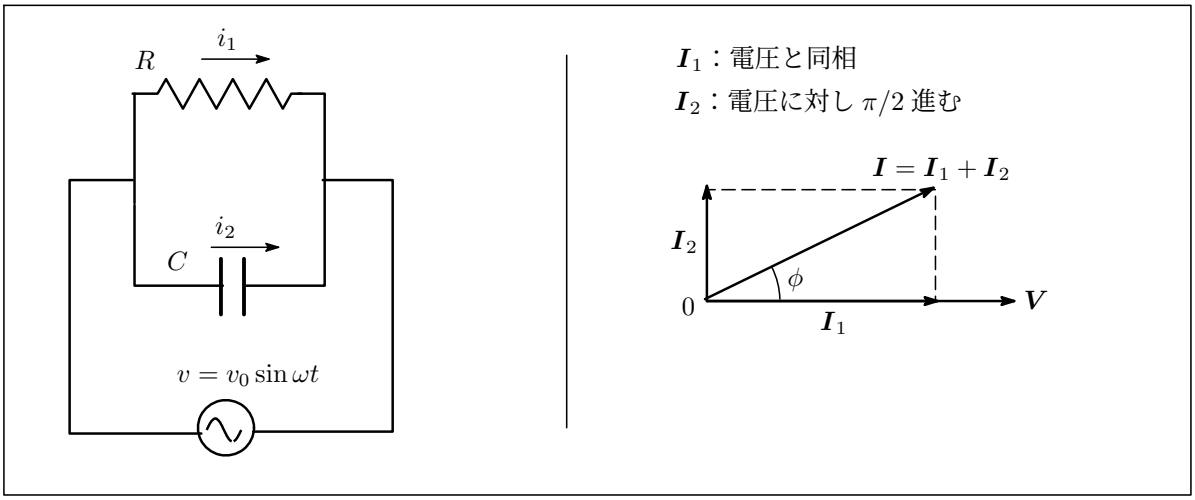
■ RC 並列回路

抵抗 R，電気容量 C のコンデンサーを並列につないだ回路のインピーダンスを求めてみましょう。今までやってきた処方箋通りにやればすぐ求められますね。

$$I = \sqrt{I_1^2 + I_2^2} = \sqrt{\left(\frac{V}{R}\right) + (\omega C V)^2} = V\sqrt{\frac{1}{R^2} + (\omega C)^2} \ \texttt{[A]} \tag{4.6.32}$$

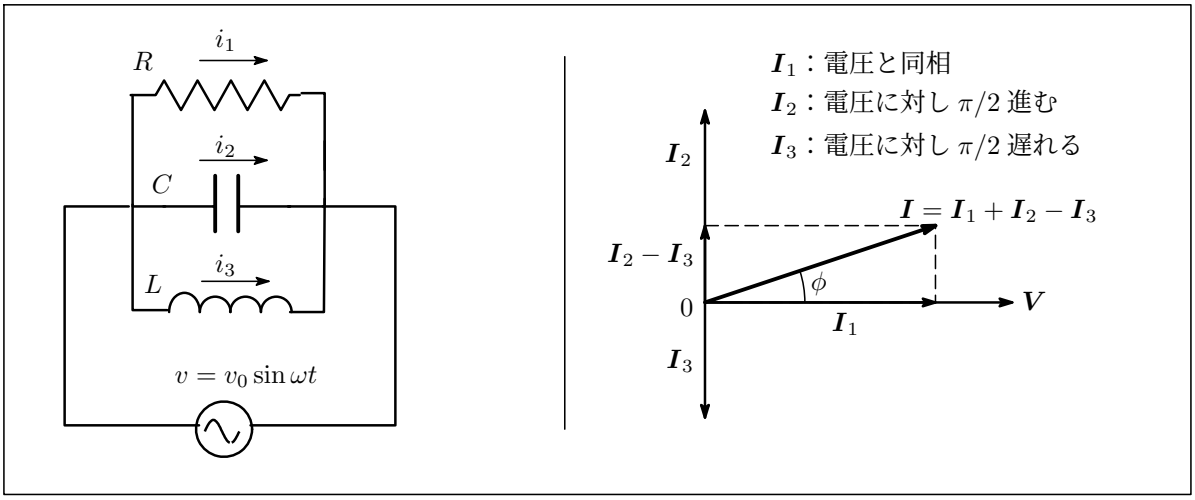
$$Z = V/I = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{R^2} + \omega^2 C^2}}, \quad \tan\phi = \frac{I_2}{I_1} = R\omega C \tag{4.6.33}$$

ベクトル図を描くと下図のようになります。



■ RLC 並列回路

抵抗 R，自己インダクタンス L のコイル，電気容量 C のコンデンサーを並列につないだ回路のインピーダンスを求めてみましょう。



$$I = \sqrt{I_1^2 + (I_2 - I_3)^2} = \sqrt{\left(\frac{V}{R}\right)^2 + \left(\omega CV - \frac{V}{\omega L}\right)^2} = V\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2} \ \text{[A]} \quad (4.6.34)$$

$$Z = \frac{V}{I} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}} \ [\Omega], \quad \tan\phi = \frac{I_2 - I_3}{I_1} = \omega C - \frac{1}{\omega L} \quad (4.6.35)$$

$$\frac{1}{X} = \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) \Longrightarrow \begin{cases} \omega C > \dfrac{1}{\omega L} \ \cdots & \text{電流 } I \text{ は電圧より位相}\phi\text{だけ進む} \\ \omega C < \dfrac{1}{\omega L} \ \cdots & \text{電流 } I \text{ は電圧より位相}\phi\text{だけ遅れる} \end{cases} \quad (4.6.36)$$

4.6.6　アドミッタンス

アドミッタンスについて少しだけ触れておきます。インピーダンスの逆数 $1/Z$ を**アドミッタンス**と呼び，通常 Y で表され，単位にジーメンス S が使われます[15]。

		名称	記号
抵抗 R の逆数	$1/R$	コンダクタンス	G
リアクタンス X の逆数	$1/X$	サスセプタンス	B
誘導リアクタンス (X_L) の逆数	$1/\omega L$	誘導サスセプタンス	B_L
容量リアクタンス (X_C) の逆数	ωC	容量コンセプタンス	B_C

RL 並列回路や RLC 並列回路のアドミッタンス Y はそれぞれ次のようになります。

$$\begin{cases} RL \text{ 並列回路：} & Y = 1/Z = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{\omega L}\right)^2} = \sqrt{G^2 + B_L^2} \text{ [S]} \\ RC \text{ 並列回路：} & Y = 1/Z = \sqrt{\frac{1}{R^2} + (\omega C)^2} = \sqrt{G^2 + B_C^2} \text{ [S]} \\ RLC \text{ 並列回路：} & Y = 1/Z = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2} = \sqrt{G^2 + (B_C - B_L)^2} \text{ [S]} \end{cases} \tag{4.6.37}$$

【例題.2】 $R_1 = 6\Omega$，$\omega L_1 = 8\Omega$ よりなるインピーダンスと $R_2 = 16\Omega$，$\omega L_2 = 12\Omega$ よりなるインピーダンスを並列につなぎ，これに $100V$ の交流をかけたとき，各枝路に流れる電流 I_1, I_2 と合成電流を求めよ。

【解答】 R_1 と ωL_1 の直列回路のインピーダンスを Z_1，R_2 と ωL_2 の直列回路のインピーダンスを Z_2 とすると

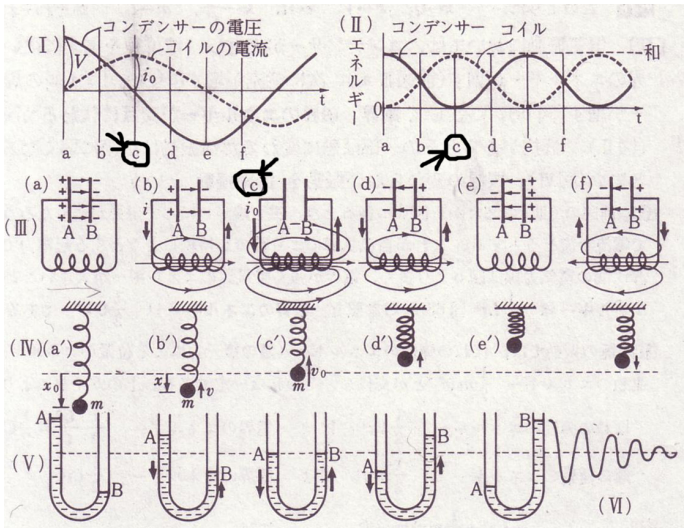
$$Z_1 = \sqrt{R_1^2 + (\omega L_1)^2} = 10 \text{ [}\Omega\text{]}, \quad Z_2 = \sqrt{R_2^2 + (\omega L_2)^2} = 20 \text{ [}\Omega\text{]}$$

各枝路に流れる電流 I_1, I_2 の大きさと電圧に対する位相のずれ ϕ_1,ϕ_2 は

$$\begin{aligned} I_1 &= V/Z_1 = 10 \text{ [A]} \quad & \phi_1 &= \tan^{-1}(\omega L_1/R) = \tan^{-1}(8/6) = 53\,^\circ \\ I_2 &= V/Z_2 = 5 \text{ [A]} \quad & \phi_2 &= \tan^{-1}(\omega L_2/R) = \tan^{-1}(12/16) = 37\,^\circ \end{aligned}$$

合成電流 $I = I_1 + I_2 = 15$[A]

4.6.7　電気振動

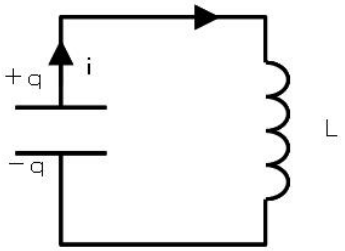


充電したコンデンサーにコイルをつないでスイッチを入れます。そうすると右図に示すようにコンデンサーの電位差 $V = Q/C$ により電流が流れ始めますが，瞬時に全部の電流が流れるのではなく，コイルの自己インダクタンス[16]により徐々に電流が流れ，同時にコイルには電磁エネルギーが蓄えられていきます。そして図 (c) の段階，つまりコンデンサーの電位差が 0 になったときにコイルには最大の電流が流れています。次の瞬間にはコンデンサーから電流は流れませんが，今度はコイルから（電流の減少を妨げるべく）電磁エネルギーが放出され，同じ向きの電流として回路に流れはじめます。

[15] 以前はインピーダンスの逆数ということでオーム（ohm）を逆さにしたモー（mho）と呼ばれる単位が使わていた。
[16] コイルの自己インダクタンスにより変化を妨げる向きの起電力を生じるから。

この結果，0 電位となっていたコンデンサーは逆充電されはじめ，十分に充電されたところで電磁エネルギーの放出は止まります。次の瞬間，十分に充電されたコンデンサーから逆向きの電流が流れ始め，以後この繰り返しが続きます。このように電流の往復が繰り返されていく現象を**電気振動**と呼び，流れる電流を**振動電流**と呼んでいます。式を使ってこの現象を記述すると次のようになります。

コンデンサーから流れでる電流 i を正[17]とすると回路方程式は



$$\frac{q}{C} - L\frac{di}{dt} = 0, \quad i = -\frac{dq}{dt}$$

これから

$$\frac{d^2q}{dt^2} = -\frac{1}{LC}q \tag{4.6.38}$$

が得られます。これは第 1 章「力学」§1.6.4 のところでやった単振動の微分方程式ですね。一般解は

$$q = q_0 \cos(\omega t + \alpha)$$

初期条件 $q(0) = q_0$ より $\cos(\alpha) = 1 \to \alpha = 0$ となって，求める解は

$$q = q_0 \cos \omega t \tag{4.6.39}$$

また，角振動数 ω，周期 T，周波波数 f は

$$\begin{cases} \text{角振動数：} & \omega = \dfrac{1}{\sqrt{LC}} \\ \text{周期：} & T = \dfrac{2\pi}{\omega} \\ \text{周波数：} & f = \dfrac{1}{T} = \dfrac{\omega}{2\pi} \end{cases} \tag{4.6.40}$$

となります。(4.6.38) の両辺に dq/dt をかけて変形していくと

$$L\dot{q}\ddot{q} = -\frac{1}{C}q\dot{q} \longrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}L\dot{q}^2\right) = -\frac{d}{dt}\left(\frac{q^2}{2C}\right) \longrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Li^2 + \frac{q^2}{2C}\right) = 0$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2}Li^2 + \frac{q^2}{2C} = \text{一定} \tag{4.6.41}$$

となり，<u>エネルギー保存則</u>が得られます。(4.6.41) の左辺第 1 項はコイルに溜まる電磁エネルギー，第 2 項はコンデンサーに溜まる静電エネルギーです。つまり，電気振動はコイルの電磁エネルギーとコンデンサーの静電エネルギーとのやりとりということになります。

今回はこれで終了します。次回は電磁波のお話をして，電磁気学の章を終わりたいと思います。お楽しみに〜。

by ＫＥＮＺＯＵ

(2009.xx.xx 了)

[17] §4.6.4「コンデンサーに流れる交流」の【註】参照。