

科学パズルの答え (Q-11)

Q-11. 潮の干満は海水が月の引力に引っ張られて移動するために起こるとされている。しかし海水がただ引っぱられたらただけならば、地球の片側だけが満潮になるはずである。ところが実際は反対側も満潮になる。これはなぜか？尚、太陽の引力は考えなくてよい。

Ans. 質量 m, M の物質の間には万有引力が働くというお話は Q-3 と Q-7 にでてきましたね。未読の方は読んでおいてください。繰り返しになりますが、万有引力は

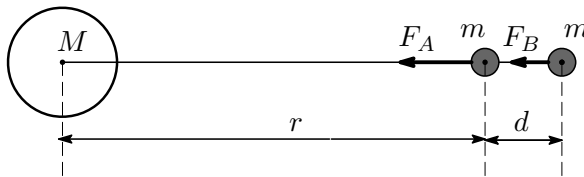
「2つの物体の間には、物体の質量の積に比例し、物体間の距離に反比例する力が作用する。」

というもので、物体の中心から測った距離を r とすると万有引力の大きさを F として

$$F = G \frac{mM}{r^2} \quad (1)$$

で表されました。 G は万有引力定数と呼ばれる定数で、 $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{Nm}^2/\text{kg}^2$ という値を持ちます。いま、質量 M の物体から距離 r (A) と $r + d$ (B) 離れたところにあるそれぞれ質量 m の物質に作用する万有引力の大きさをそれぞれ F_A, F_B とします。A と B の間の距離 d は距離 r に比べて十分小さい ($r \gg d$) とします。万有引力の法則によれば、 F_A, F_B の大きさは質量 M からの距離の2乗に反比例しましたね。いま、 F_A と F_B の差 $F_A - F_B$ はどうなるでしょうか、やはり距離の2乗に反比例した力となるのでしょうか。結果から先に言いますと、実は距離の3乗に反比例する力となります。

潮汐力



$$\begin{aligned} F_A &= G \frac{mM}{r^2} \\ F_B &= G \frac{mM}{(r+d)^2} \\ F_A - F_B &= GmM \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{(r+d)^2} \right) \\ &\simeq GmM \frac{2d}{r^3} \end{aligned}$$

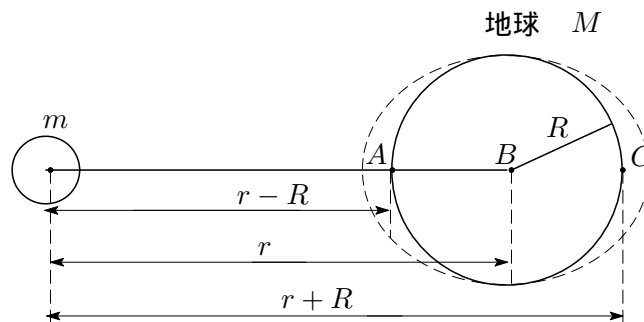
以下に式の展開を載せましたので、興味のある方はフォローしてみてください。 d は r に比べて十分小さいという条件をうまく使って近似計算をしていることが分かると思います。

$$\begin{cases} F_A = G \frac{mM}{r^2} \\ F_B = G \frac{mM}{(r+d)^2} \end{cases} \rightarrow F_A - F_B = GmM \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{(r+d)^2} \right) = GmM \left(\frac{d(2r+d)}{r^2(r+d)^2} \right) \simeq G \frac{2dmM}{r^3}$$

上の式の最後の展開で $r \gg d$ ですから、 $r + d \simeq r$, $2r + d \simeq 2r$ と近似しました。

さて、潮の潮汐ですが、月に近いほうの海面が一番強く月からの引力を受けるので海面が盛り上がり、満ち潮になることはわかります。ところで、月から一番遠い反対側にある海面も同じように満ち潮になることが知られているが、それはなぜ？ というのがパズルの問いですね。月からの引力を受けているなら、反対側の海面は引き潮になってもいいように思われますが、どうでしょう。ここで月から受ける万有引力の大きさを (A) 月に面している海面, (B) 地球 (の中心), (C) 月と反対側の海面について調べてみましょう。万有引力の大きさの順序は、月の中心から距離の近い順となりますから、(A) 月に面している海面 > (B) 地球 (の中心) > (C) 月と反対側の海面 となりますね。地球が真ん中にきていますね。つまり、地球も月に引っ張られ、C の海面は引っ張られるのが一番弱いから (距離の3乗に反比例)、取り残されて海面が盛り上がったように見えることになるのですね。

ついでですから、いまの話の数式を使って説明してみます。興味がなければ読み飛ばしてください。



上の図で A, B, C に働く万有引力の大きさをそれぞれ F_A, F_B, F_C とします。A での起潮力を $F_A - F_B$, C での起潮力を $F_C - F_B$ としましょう。これは A あるいは C に働く万有引力の大きさを B に働くそれとの差をとることで、潮が地球に比べてどれだけ引っ張られるかを表していますね。 $r \gg R$ であることを考えて

$$\begin{cases} F_A - F_B = G \frac{mM}{(r-R)^2} - G \frac{mM}{r^2} \simeq \frac{2GmMR}{r^3} \\ F_C - F_B = G \frac{mM}{(r+R)^2} - G \frac{mM}{r^2} \simeq -\frac{2GmMR}{r^3} \end{cases}$$

となります。この結果、起潮力は A と C とでは大きさが同じで向きが反対の力となっていることがわかりました。A では潮が地球より強く引っ張られて盛り上がりますが、C では潮より地球のほうが引っ張られて、結果として潮が盛り上がったように見える、ということになります。

2008.11.23
by HENRY

(了)