

科学パズルの答え (Q-7)

Q-7. 地球の内部をくりぬいて大きな穴を開けたとしたら、その内壁に人間の足で立つことができるだろうか。地球の自転や他の天体の影響は考えないものとする。球殻上の地球の万有引力だけを考えてみる。

Ans. (答えは最後に載っています)

関連する問題として Q-3 がありますので、まだ読まれていないようでしたら一読下さい。

さて、地上に人間が立っているのはニュートンが発見した万有引力のおかげですね。万有引力というのは「力の大きさが2つの物体の質量の積に比例し、距離の2乗に反比例する」というものです、式で書けば次のように表されます。

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (1)$$

F は万有引力の大きさを、 m は物体の質量、 r は2つの物体の中心からの距離、 G は万有引力定数といわれるものです。そして力の向きはそれぞれの物体の中心に向かっています。人間の体重(べつに人間に限らないが)というのは、地球が人間を引っ張る万有引力の大きさのことですね。Q-6でニュートンの運動第2法則と重力加速度 $g(9.8\text{m/s}^2)$ の話ができましたが、人間の質量を $M(\text{kg})$ とすると体重 W は

$$W = M g \quad [\text{kg 重}]$$

アポロ宇宙船で月面に降り立ったアームストロング船長は月面を飛び跳ねるようにして歩いていましたが、これは月の引力が地球に比べて小さいからです。ちなみに月の重力加速度は 1.622m/s^2 ($= 0.165g$) です。地球の月に行けばメタボリックシンドロームも心配なくなる？という無駄口は差しおいて(笑い)、地球が玉子の殻のように内部が空洞になっているとしましょう。そうすると地球の質量はその分小さくなりますので、地球外に存在する物質をひきつける引力は式(1)より弱くなります。

ところで球殻になった地球の表面に穴を開けて内部に物を落としたりしたらどうなるでしょうか。物は球殻のあらゆる部分からの引力を受けてバラバラになるのでしょうか。。。？

ご心配召されるな、物はなにごともしなかつたかのようにただフワフワと浮きます！

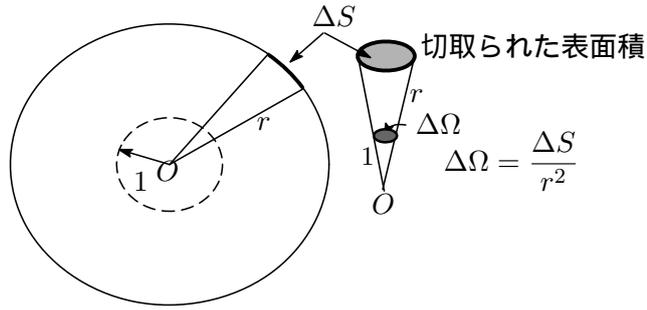
そりゃどういうこと...? となりますが、球はあらゆる方向に対して完全に対称形状ですから球殻からの引力は互いに相殺されてしまって、内部の空間では引力がゼロ、つまり無重力状態となっているのです。これは簡単に証明できますのでやってみましょう。このところに興味がなければ読み飛ばしてもOKです。

立体角というものを導入します。立体角は通常 Ω という記号で表されますが、立体角というのは点 P を頂点とする円錐が半径1の球面を切り取る表面積の大きさのことで、立体角の定義は

$$\Delta\Omega = \frac{\Delta S}{r^2} \quad (2)$$

で与えられます。

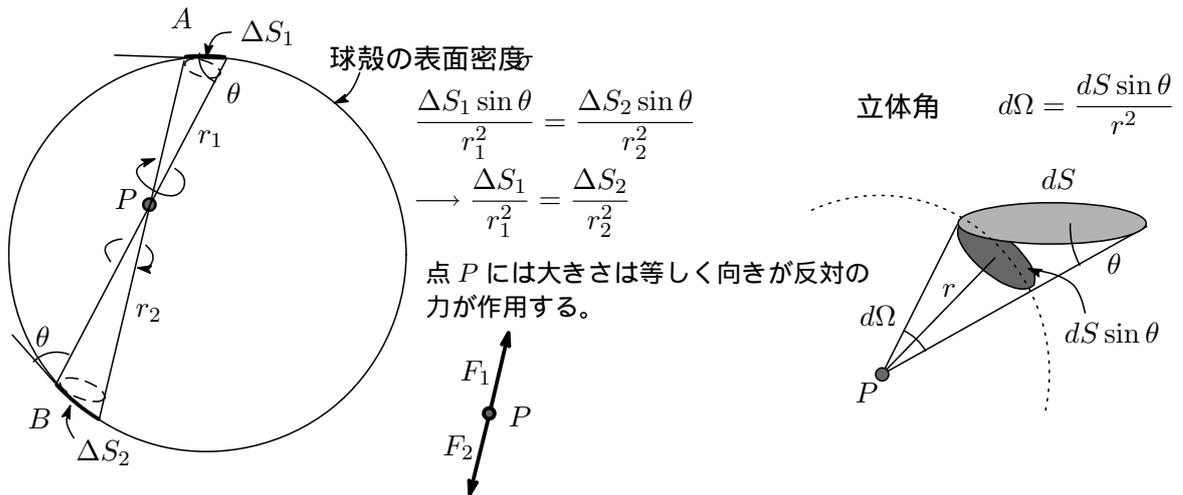
立体角とは円錐コーンの開き具合の角度のことで、大きさは円錐によって切り取られた半径1の球面表面積に等しい。(単位はステラジアン)



さて、下図を見ていただくとして、殻状になった地球内部1点Pをとり、点Pを頂点とするわずかに開いた円錐が地球殻を切る取る面積をそれぞれ ΔS_1 , ΔS_2 とします。この場合、 r_1 , r_2 と球殻のなす角 θ は等しくなります。点PからAをみた立体角は $\Delta\Omega = \Delta S_1 \sin\theta / r_1^2$, Bを見たの立体角は $\Delta\Omega = \Delta S_2 \sin\theta / r_2^2$ 等しいので

$$\frac{\Delta S_1 \sin\theta}{r_1^2} = \frac{\Delta S_2 \sin\theta}{r_2^2}, \quad \therefore \frac{\Delta S_1}{r_1^2} = \frac{\Delta S_2}{r_2^2} \quad (3)$$

が得られます。



球殻の表面密度¹を σ とすると、点Pにある質量 m の質点に及ぼす万有引力をAから F_1 , Bから F_2 とすると

$$F_1 = G \frac{m \Delta S_1 \sigma}{r_1^2}, \quad F_2 = G \frac{m \Delta S_2 \sigma}{r_2^2} \quad (4)$$

となります。この式に式(3)の関係を入れると $F_1 = F_2$ となりますね。引力 F_1, F_2 は互いに逆向きですから、結局A, Bからの引力は点Pに働かないこととなります。このことからA, Bを全球面に広げると、球殻内部の空間には引力は働かない、つまり無重力状態となっているとい

¹ 単位面積当たりの質量

うことがでできます。

さて、本題に戻ります。球殻となった地球の内壁に人間の足で立つことができるかという問題ですが、以上のことからお分かりのように、この答えは、内部の空間にふわりと浮いたままになるということになりますね。

(P.S)

球殻となった地球は、地球の外側には引力を及ぼすが内部のものには及ぼさない、つまり内壁も含めた内部は無重力空間となっていることがわかりました。それでは外壁面はどのようなでしょう。外壁面に単位質量の質点をおくところの質点は $F = 2\pi\sigma$ の引力を受けるということが理論的にでできます。このあたりの詳しいことを知りたい方は「数学」セクションの“ポテンシャル”を参照ください。

2008.11.16

by *HENRY*

(了)