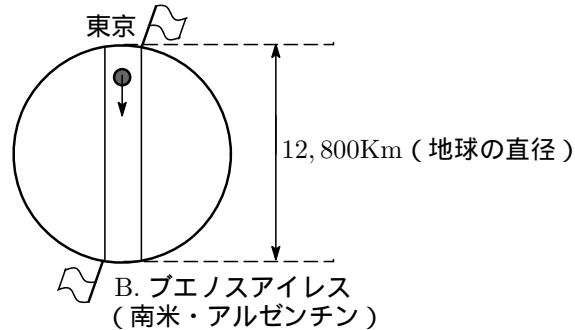


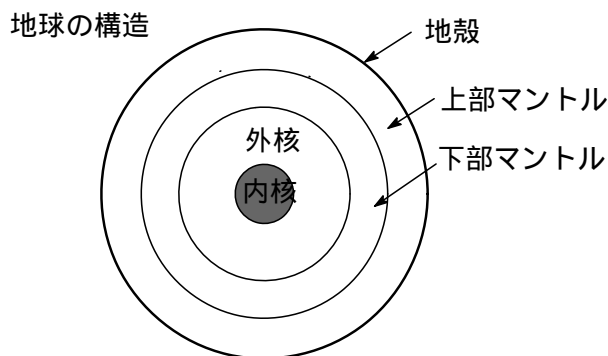
科学パズルの答え (Q-3)

Q-3. 地球の中心を通るトンネルを掘ったとする。このトンネルの一方の口から石を落としたらなら、石はどのような運動をするだろうか。ただし、空気の抵抗や地熱の影響はないものとする。



Ans. (答えは最後に載っています)

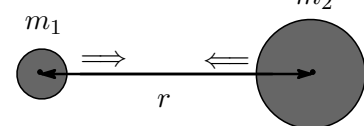
地球の構造は中心部から「内核」「外核」「下部マントル」「上部マントル」「地殻」となっています。当然、地球の中心に向かうほど高温・高熱で、地殻は～1000℃、上部マントルでは1000℃～3000℃、下部マントルで3000℃～4500℃、外核になると4500℃～5800℃で、もっとも中心部にある内核は5800℃～6200℃といわれています。だから地球の中心を通るトンネルが仮に掘れたとしても、トンネルに投げ込まれた石は途中でどろどろに解け、途中で蒸発してしまうこととなりますが、ここではそういうことはないとします。つまり、冷たい地球を考えるわけですね。



ニュートンの万有引力

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

F の力で引合っている



物体の中心からの距離

m_1, m_2 は中心に集中していると考えられる

さて、ニュートンの万有引力の法則というのを思い出してください。これは

「2つの物体の間には、物体の質量の積に比例し、物体間の距離に反比例する力が作用する。」

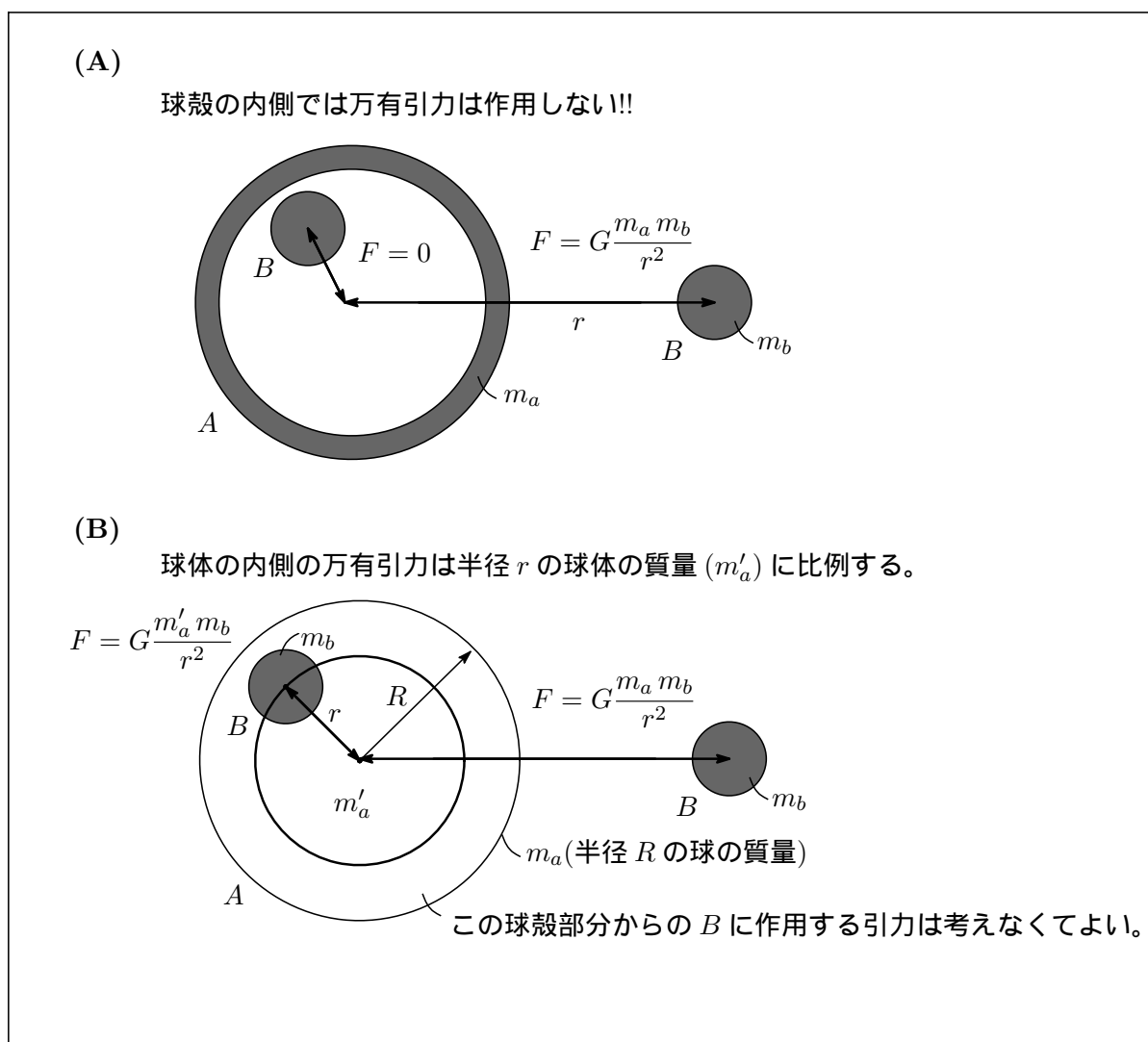
というものでした。この関係を数式を使って書くと

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (1)$$

となります。ここで G は万有引力の定数 ($6.670 \times 10^{-11} \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$) と呼ばれるものです。質量という言葉ができましたが、これは重さとは異なります。ここでは重さの度合いを示すものだ

と理解してください。距離 r は、物体の中心（球でなければ物体の重心）から測った距離で、物体の表面から測った距離ではありません。万有引力は、質量は物質の中心に集中しており、2つの物体は中心に向かって互いに引き合う力が作用¹しているということになります。

いま、一つの球体 A を考えます。 A と他の物質 B との万有引力は、式 (1) で表されることは今まで述べたとおりです。ただ、 A が卵の殻のように“球殻”か“中身のつまった球体”であるかによって、万有引力は次のようになります²。



(A) 球殻の場合

- ・物質 B が球殻の外側にあるとき … 球殻から B に働く万有引力 F は A と B それぞれ中心間の距離を r とすると

$$F = G \frac{m_a m_b}{r^2}$$

で、この場合は (1) と同じ式で表されます。

- ・物質 B が球殻の内側にあるとき … この場合、球殻から物質 B には万有引力は働きませ

¹ 作用・反作用の原理ですね。

² この辺りの詳しい話に興味のある方は「数学」の”ポテンシャル”を参照下さい。

ん。つまり $F = 0$ となります。球殻の各部分からの万有引力の引き合う力が相殺されてしまうのです³。図 (A) を参照ください。

(B) 中身の詰まった球体の場合

・物質 B が球体の外側にあるとき … 球体から B に働く万有引力 F は A と B それぞれ中心間の距離を r とすると

$$F = G \frac{m_a m_b}{r^2}$$

この場合は上と同様です。

・物質 B が球体の内側にあるとき … 物質 B の球体中心からの距離を r とすると、

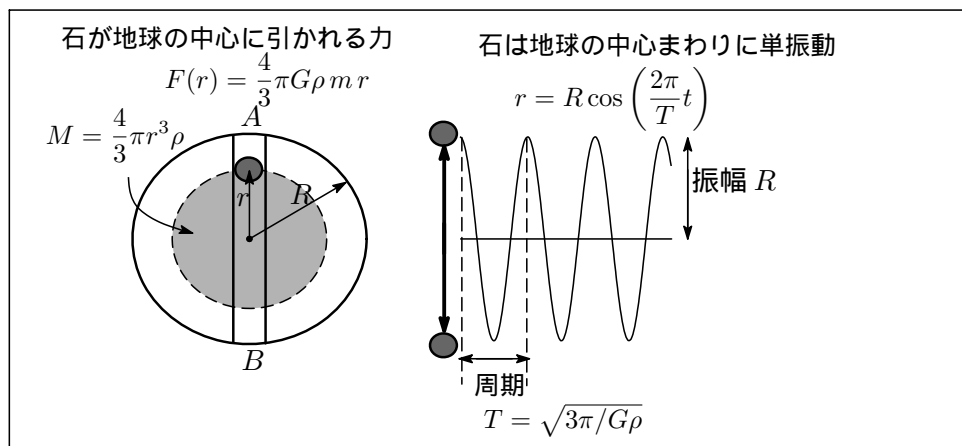
$$F = G \frac{m'_A m_B}{r^2} \quad (2)$$

となります。ここで m'_A は半径 r の球体の質量で、球体の半径を R とすると、半径 r から R までの物体 B を取り囲む球殻からの影響は考えなくてよいということになります。図 (B) を参照ください。これは (A) から予想されますね。

さて、本題に戻ります。入り口 A からトンネルに静かに落とされた石は、万有引力により地球の中心に引っぱられます⁴。地球の中心から距離 r にある石に働く万有引力 $F(r)$ の大きさはどうなるでしょうか。地球の密度を ρ とし、中心から距離 r 以内にある地球の質量を M とすると、球の体積は $\frac{4}{3}\pi r^3$ ですから $M = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$ となります。石の質量を m とすると万有引力の大きさは

$$F(r) = G \frac{M m}{r^2} = \frac{4}{3}\pi G \rho m r \quad (3)$$

となりますね。この式⁵を見ると、地球の中心からの距離 r が大きいほど万有引力は強く、中心に向かうにつれて弱くなり、中心点ではゼロになることがわかります。入り口 A から落とされた石は非常に大きな力で地球の中心に向けて引っぱられ速度を次第に増していきます。中心点で速度は最大になり、その勢いでもう一方の出口 B に向かって突進しますが、中心から離れた瞬間から地球の中心に向かう引力が働き、今度はこの力がブレーキとなって石の速度は次第に減速されます。片方の出口 B に到達したところで速度はゼロとなり、再び地球の中心に向かって引っぱられていくという運動を繰り返します、これはバネの振動でおなじみの単振動の運動ですね。



³ Q-7 も参照してみてください。

⁴ 万有引力は 2 物体が互いに引き合う力ですから、当然、地球も石に引っぱられます。しかし、地球の質量は石よりはるかに大きいので、軽い石の方が地球の中心に引っぱられ、実質上地球は動かないと同然となります。

⁵ 地球の中心を原点とし、 r の方向に x 軸をとると、力は中心に向かうので $F(r) = -kr$ と書けます。ただし $k = (4/3)\pi G \rho m$ 。この式は単振動を表す式で周期は $T = 2\pi\sqrt{m/k}$ となることが知られています。

石が A からスタートして地球を横断し B まで到達し、そこから再び A にまで戻ってくるまでの時間を計算してみましょう。石の運動は単振動運動ですから周期 T を計算すればよいことになります。周期 T は

$$T = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}} \quad (4)$$

で与えられますので、 $G = 6.670 \times 10^{-11} \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2$ 、 $\rho = 5.5 \times 10^3 \text{kg}/\text{m}^3$ を入れて計算すると $T = 5067$ 秒（約 84 分）となります。片道 42 分ということですね。

また、石は地球の中心で最大スピードとなりますが、その速度 v_{max} は次式で与えられます。

$$v_{max} = \frac{2\pi}{T} R \quad (5)$$

地球の半径 $R=6,357 \times 10^3 \text{m}$ を入れると約 $v_{max} = 7.9 \text{km}/\text{秒}$ ということも早い速度となっています。これは第一宇宙速度（地球の地表すれすれに衛星として存在するために必要な速さ）と同じ大きさですね。

2008.11.15

by *KENZO*

（了）