

科学パズルの答え (Q-8)

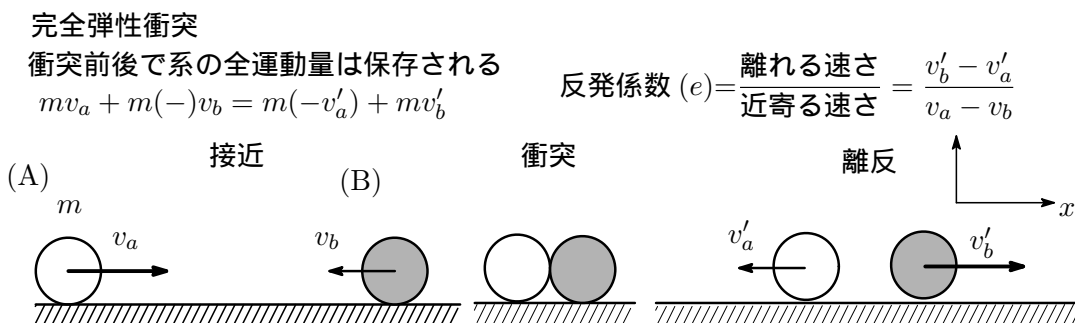
Q-8. 車の付いた椅子の上ですわって物を投げると、椅子は投げた方向ち反対の方に動く。この原理を使って、宇宙空間に止まっている宇宙船を、燃料なしで進ませる方法を考えた。宇宙船内に A, B 二人の体を固定させる。前にいる A から後ろにいる B に物を投げる。それを受け止めた B は A にそれをそっと返す。また A は B に物を投げる。これを繰り返せば宇宙船は A の後ろの方向に進み続けると考えられる。。。が、実際にはこの考えとおりにはいかない。なぜか？

Ans. (答えは最後に載っています)

ロケットはどのようにして推進するのかを考えてみましょう。ロケットは自らの質量の一部を後方に噴射してその反作用を推力としているのです。したがって、真空中でも推力を得ることができるので宇宙空間での移動手段として使われています。アポロの宇宙遊泳もジェット噴射を利用していました。

さて、ロケットの推進を少し数式を使って説明していきます。運動量保存則を使いますが、これはニュートンの運動第 2 法則から導かれます。運動量とは具体的にどのようなものかという、質量 m の物体が速度 v で運動しているとき、「質量×速度」を運動量 (mv) と呼んでいます。そしてこれは“大きさと向きをもつ物理量¹”です。質量の大きい物体が速い速度でぶつかるかなりの衝撃を受けますが、このことから運動量というのは運動の勢いを表すものと考えることができます。そして運動量保存則は「2つ以上の物体を一つの系と見たとき、系の内部で相互に力が作用していても系の外部から力が働かないがぎり、系全体の運動量は一定に保たれる(保存される)」というものです。

玉の衝突を例にとってもう少し追求してみましょう。同じ質量 m の 2 つの玉 A, B がそれぞれ v_a, v_b という速度 ($v_a > v_b$) で正面衝突し、その直後、A は v'_a , B は v'_b という速度で互いに遠ざかっていく運動を考えます²。いま、 v_a の向きを正の方向にとると v_b は向きが反対ですから負となります。



A の衝突前の運動量は mv_a , B のは mv_b ですね。衝突後はそれぞれ mv'_a, mv'_b となります。2 つの物体を合わせた系全体としての運動量をそれぞれ P_1, P_2 とすると、この系には外力が働い

¹ これをベクトル量といいます。大きさだけを持つ物理量(質量と温度、等)をスカラー量といいます。

² 完全弾性衝突を仮定しています。

ていませんで運動量は保存されます。これを式で表すと

$$\begin{cases} \text{衝突前: } P_1 = mv_a + m(-v_b) = mv_a - mv_b \\ \text{衝突後: } P_2 = m(-v'_a) + mv'_b = -mv'_a + mv'_b \end{cases} \quad (1)$$

で, $P_1 = P_2$ ですから

$$mv_a - mv_b = -mv'_a + mv'_b \quad (2)$$

となりますね。衝突後, 玉 A, B は反発して互いに離れていくわけですが, この反発具合を表すのに反発係数というのを導入します。これは通常 e という記号で表されますが, 反発係数 e は次の式で定義されます。

$$e = \frac{\text{離れる速度}}{\text{近寄る速度}} \quad (3)$$

玉 A, B の近寄る速さと遠ざかる速さは, 速度の向きを考慮するとそれぞれ次のようになります。

$$\begin{cases} \text{近づく速度: } v_a - (-v_b) = v_a + v_b \\ \text{遠ざかる速度: } v'_b - (-v'_a) = v'_b + v'_a \end{cases}$$

これから反発係数は

$$e = \frac{v'_b + v'_a}{v_a + v_b} \rightarrow e(v_a + v_b) = v'_b + v'_a \quad (4)$$

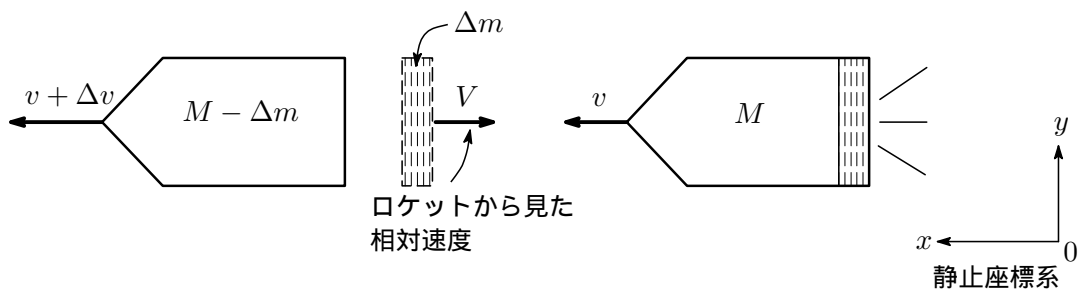
となります。そして $e = 1$ の衝突を完全弾性衝突と呼んでいます。つまり, 近づく速さと遠ざかる速さが等しいという衝突ですね。また e の値は $e \leq 1$ となることがわかります。衝突後の速さが衝突前の速さより早くなるはずがありませんものね。

式 (2) と (4) を組み合わせると, $e = 1$ として

$$\begin{cases} mv_a - mv_b = -mv'_a + mv'_b \\ v_a + v_b = v'_b + v'_a \end{cases} \rightarrow v'_a = v_b, \quad v'_b = v_a \quad (5)$$

が得られます。質量の等しい2つの玉の完全弾性衝突では衝突後の速度は, 互いに衝突前の速度を交換するのですね!

以上で運動量保存則の概略がわかったと思いますので, ロケットの推進の話に戻ります。図のように $x - y$ 静止座標系をとります。左向きを正にとっていますから注意して下さい。質量 M のロケットが x 軸の正の方向に速度 v で水平に飛んでいるとします。ある瞬間に質量 Δm のガスをロケット後方に向けて相対速度 V で噴射し, その反動でロケットの速度は $v + \Delta v$ になったとします。



運動量保存則は系全体を見渡せる静止座標系で成り立ちます。噴射された燃料の速度は静止座標系から見れば $v - V$ となりますね。この系の運動量は燃料噴射前後で保存されます。燃料噴射前

の系の運動量はロケットの運動量 Mv ですね。噴射後はロケットの運動量と燃料の運動量を足したものが系全体の運動量で次のようになります。

$$(M - \Delta m)(v + \Delta v) + \Delta m(v - V) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{ロケットの運動量：} (M - \Delta m)(v + \Delta v) \\ \text{燃料の運動量：} \quad \Delta m(v - V) \end{array} \right.$$

運動量保存則より

$$\begin{aligned} Mv &= (M - \Delta m)(v + \Delta v) + \Delta m(v - V) \\ &= M(v + \Delta v) - \Delta m\Delta v - \Delta mV \\ &= M(v + \Delta v) - \Delta mV \\ \therefore M\Delta v &= \Delta mV \end{aligned} \quad (6)$$

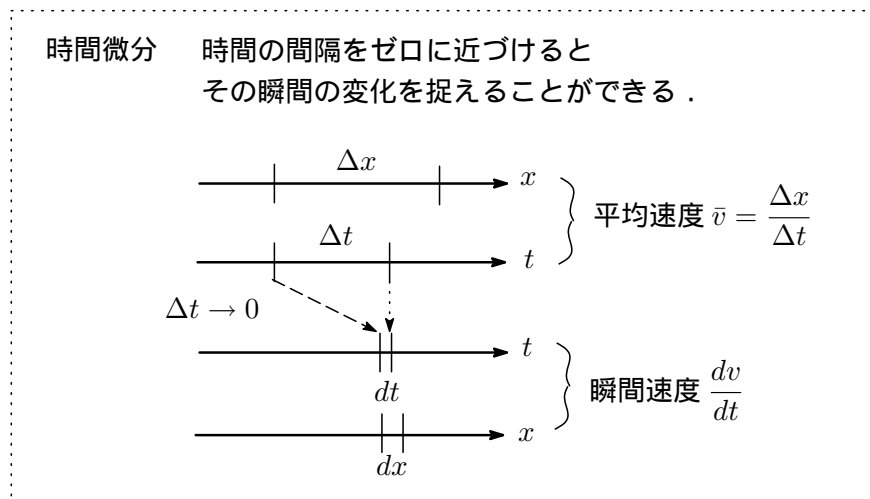
が得られます。単位時間あたりの燃料の噴射量を ρ とすると $\Delta m = \rho\Delta t$ と書けるので、これを式(6)に入れて整理すると

$$M \frac{\Delta v}{\Delta t} = \rho V$$

となります。 Δ は有限な幅を意味していますが、この幅をゼロに近づけた瞬間の時間(幅)を dt で表し、 Δv もこれに倣って dv で表すと(これらの量を微分量と呼びます)、上式は

$$M \frac{dv}{dt} = \rho V$$

となります。これは微分方程式と呼ばれます。



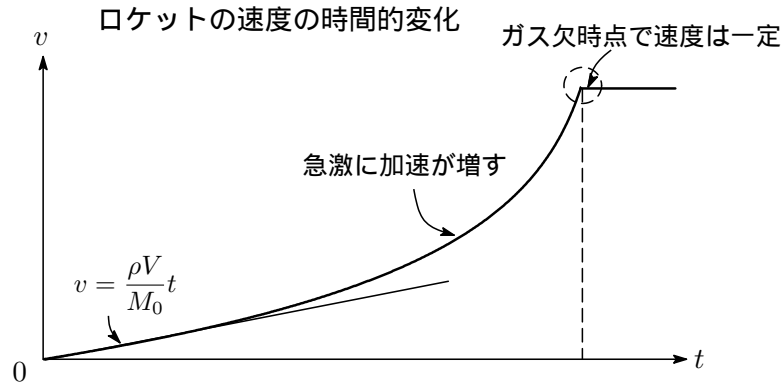
ロケットの最初の質量は M_0 、初速度は0であったとします。燃料ガスの噴射量は時間的に一定量とすると、スタートしてから t 秒後のロケットの質量は $M = M_0 - \rho t$ となっています。この M を先ほどの微分方程式に入れると

$$(M_0 - \rho t) \frac{dv}{dt} = \rho V$$

となります。あとはこの微分方程式を解くだけですが、積分の知識が必要になりますのでここでは結果だけを書いておきます。時間 t 秒後のロケットの速度を $v(t)$ とすると

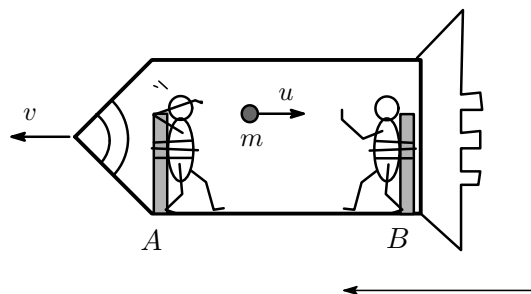
$$v(t) = V \log \left(\frac{M_0}{M_0 - \rho t} \right) \quad (7)$$

となり，ロケットの速度の時間的変化をグラフに描くと下図のようになります。



最初は $v \propto t$ で等加速度飛行しますが，燃料噴射とともにロケットの質量は次第に軽くなるので速度は急激に増し，そして最後には燃料切れで速度は一定となり等速直線運動をすることになります。

さて，本題に戻りましょう。宇宙空間に静止しているロケットの中に登場している宇宙飛行士 A が質量 m の玉を他方の宇宙飛行士 B に向けて速度 u で投げたとします。このときロケットがその反動（推進力）で速度 v になりました。ロケットの速度 v を求めてみましょう。尚，ロケットと玉と A ， B を合わせた系全体の質量を M とします。



最初宇宙飛行士 A は質量 m の玉を握っていました。ロケットは静止していますから系の運動量は 0 ですね。次に A はエィッとばかり B に向けて速度 u で玉を投げ，その瞬間ロケットは v の速度で左に進みました。そのときの系全体の運動量を求めると，飛んでいる玉の運動量は $m(-u)$ ですね。玉を除くロケット系の運動量は，質量 m の玉が A の手からはなれて空間を飛んでいますから，注目している系の質量は $M - m$ で，これが v の速度で左に進みましたから $(M - m)v$ となります。ここで運動量保存則を使うと

$$0 = (M - m)v - mu$$

これから

$$v = \frac{m}{M - m}u$$

と求まります。質量の大きい玉を投げればその分ロケットは早く進むことがわかります。 A が連続して玉を投げ続けると先ほどのロケットが燃料ガスを噴射するのと同じことになり (B が玉を受取ったり，ロケットの片方の壁に玉が当たるとダメですが)，この場合のロケットの速度は式 (7) で与えられることが確かめられます。

さて、設問では A が投げた玉を B が受け止めました。この時点で作用反作用の法則により B にはロケットの推進力と大きさは同じで向きが正反対の力が働くことになり、ロケットは止まってしまいます。次に、縄を解いて、 B は受け止めた玉をそっと A に返しにいきますが、今度は B の行動がロケットを後退させる推進力となります。仮にそっと返しに行ってもロケットはゆっくり時間をかけて後退し、もとの位置に戻るようになります。

以上、紙数を使いすぎましたが、納得いくまで追求して下さい。

2008.11.22

by *KENZOU*

(了)