

Diracの量子力学を読む (- 2)

2001.7.5

by KENZOU

. 力学変数とオブザーバブル

§ 7.1 次演算子

[ケットに作用する1次演算子]

前節ではケットベクトルの1次関数になっているただの数を考え、そこから出発してブラベクトルという概念に達した(確かそうでしたね)。今度は、ケットベクトルの1次関数になっているケットベクトルを考え、そこから出発して1次演算子(複素数)という概念を構成していく。

ケット $|F\rangle$ が ケット $|A\rangle$ の1次関数になっている、つまり次の要件を満たしているとする。

$|A\rangle + |A'\rangle$ に対応する $|F\rangle$ は $|A\rangle$ に対応する $|F\rangle$ と $|A'\rangle$ に対応する $|F\rangle$ との和である。

c を任意の数因子として、 $c|A\rangle$ に対応する $|F\rangle$ は $|A\rangle$ に対応する $|F\rangle$ の c 倍となる。

これらの条件から、 **$|A\rangle$ から $|F\rangle$ に移ることは、 $|A\rangle$ にある1次演算子を作用させること**と見なすことができますね。すなわち

$$|F\rangle = a |A\rangle \quad (a \text{ は 1 次演算子を表わす記号}) \quad (1)$$

と書ける。こういう書き方をすると、 a と c は次の方程式で表わされることになる。

$$a \{ |A\rangle + |A'\rangle \} = a |A\rangle + a |A'\rangle$$

$$a \{ c |A\rangle \} = ca |A\rangle \quad (2)$$

また、ただの数 k をケットベクトルに掛けるとき、この数はケットベクトルに作用する1次演算子と見なせますね。このことから**ただの数は1次演算子の特別な場合**であるということになります。

• [分配の公式] a, b : 1次演算子

$$\{a+b\} |A\rangle = a |A\rangle + b |A\rangle \quad (3)$$

• [積の公式]

$$\{ab\} |A\rangle = a \{b |A\rangle\} \quad (4)$$

ただし、**1次演算子に対しては掛け算の交換の公理 ($ab = ba$) は成り立たない**ことに留意してください。

[ブラに作用する 1 次演算子]

さて、1 次演算子をブラベクトルに作用させることを考えましょう。

ケット $a|A\rangle$ と任意のブラ $\langle B|$ とのスカラー積 $\langle B|\{a|A\rangle\}$ を考えます。このスカラー積は $|A\rangle$ と 1 次関係にあり、したがってブラの定義から $|A\rangle$ となにかあるブラ ($\{\langle B|a\rangle\}$) とのスカラー積であると考えられます。こういう仕方では 1 次演算子のブラベクトルへの作用を考えていきます。

• ブラベクトルに 1 次演算子を作用させる

$$\{\langle B|a\rangle\}|A\rangle = \langle B|\{a|A\rangle\} = \langle B|a|A\rangle \quad (5)$$

• $|A\rangle\langle B|$ という積を調べる

$|A\rangle\langle B|$ という積の右側から任意のケット $|P\rangle$ を掛けてみると $|A\rangle\langle B|P\rangle$ となり、これはケット $|A\rangle$ にただの数 $\langle B|P\rangle$ を掛けたケットとなる。このケットは $|P\rangle$ との 1 次的な関係にあり、したがって、 **$|A\rangle\langle B|$ はケットに作用することができる 1 次演算子と見なすことができる。**これはまた、ブラ $\langle Q|$ にも作用することができる。 **$\langle Q|A\rangle\langle B|$ はブラ $\langle B|$ をただの数 $\langle Q|A\rangle$ 倍したもの**ということになります。

[注] $|A\rangle\langle B|$ という積と $\langle B|A\rangle$ とははっきりと区別すること。積 $\langle B|A\rangle$ はいうまでもなくただの数である。

§ 8 . 共役の関係

1 次演算子は、その時刻での力学変数に対応すると仮定します。この 1 次演算子には複素数を掛けることができ、その結果、前とは異なるが、同じ量 (実数) が得られるから、**1 次演算子は複素量である**と考えられます。このことから、1 次演算子は一般には複素数の力学変数、すなわち座標や速度などを変数とする複素関数に対応するものであると考えることができます。

• アジョイント

「1 次演算子のアジョイント (共役複素数) のアジョイントはもとの 1 次演算子である」

$\langle P|a$ に対しての共役虚なケットを $\overline{a}|P\rangle$ と書く。この $\overline{a}$ を a のアジョイントと呼ぶ。すると次の公式が成り立つ。

$$\langle B|\overline{a}|P\rangle = \overline{\langle P|a|B\rangle} \quad (6)$$

∵ 仮定 (Dirac を読む (1) の (7) 式) により $\langle B|A\rangle = \overline{\langle A|B\rangle}$ 。ここで $\langle A|$ の代わりに $\langle P|a$ とおき、 $|A\rangle$ の代わりにその共役虚の量 $\overline{a}|P\rangle$ をおくと

$$\langle B|A\rangle = \langle B|\overline{a}|P\rangle, \quad \overline{\langle A|B\rangle} = \overline{\langle P|a|B\rangle} \quad //$$

(6) で a の代わりに $\overline{a}$ をおくと

$$\langle B|\overline{\overline{a}}|P\rangle = \overline{\langle P|\overline{a}|B\rangle} = \langle B|a|P\rangle \quad (7)$$

(7) 式はどんなケット $|P\rangle$ に対しても成り立つから

$$\langle B | \overline{\overline{a}} = \langle B | \quad (8)$$

と書ける。また(8)式はどんなブラ $\langle B |$ に対しても成り立つから

$$\overline{\overline{a}} = a \quad (9)$$

従って、**1次演算子のアジョイントのアジョイントはもとの1次演算子である**ということになる。ここから1次演算子のアジョイントは力学変数の共役複素数に対応すると仮定する。

アジョイントという代わりに共役複素1次演算子と呼ぶことにする。

ある1次演算子とそのアジョイントと等しいとき、セルフアジョイントであるという。これは実の力学変数に対応する。また、どんな1次演算子も実部と虚部に分けることができるから、**1次演算子には「共役虚」ということばでなく「共役複素」という言葉が使える。**

- 2つの1次演算子の積の共役複素数は夫々の共役複素数を逆の順に並べた積に等しい。

$$\overline{\overline{b} \overline{a}} = \overline{a} \overline{b} \quad (10)$$

$\therefore \langle A | = \langle P | a, \langle B | = \langle Q | \overline{b}$ とおくと $|A\rangle = \overline{a} |P\rangle, |B\rangle = b |Q\rangle$ これを(6)に入
れると $\langle Q | \overline{\overline{b} \overline{a}} | P \rangle = \overline{\langle P | ab | Q \rangle} = \langle Q | \overline{ab} | P \rangle$, これは任意の $|P\rangle, |Q\rangle$ につ
いて成り立つ。//

- 3つの1次演算子の積の共役複素量は夫々の共役複素量を逆の順に掛け合わせた積に等しい。

$$\overline{\overline{a} \overline{b} \overline{g}} = \overline{a} \overline{(b g)} = \overline{b g} \overline{a} = \overline{g} \overline{b} \overline{a} \quad (11)$$

- 1次演算子 $|A\rangle\langle B|$ の共役複素量は

$$\overline{|A\rangle\langle B|} = |B\rangle\langle A| \quad (12)$$

ブラベクトル、ケットベクトル及び1次演算子のどんな積でも、その共役複素量あるいは共役虚の量をつくるには、夫々の共役複素量が虚役虚の量をとって、それらすべてを逆の順に掛け合わせればよい。

【定理】 x が実の1次演算子であり、ある特定のケット $|P\rangle$ に対して

$$x^m |P\rangle = 0 \quad (13)$$

であるとする、必ず

$$x |P\rangle = 0$$

が成り立つ。ただし m はある正の整数とする。

[証明]

$m=2$ の場合を考えると(13)式より

$$\langle P | x^2 | P \rangle = 0$$

これはケット $x |P\rangle$ にその共役虚のブラ $\langle P | x$ を掛けたものがゼロであることを示している。"Diracを読む(-1)"の(8)式 ($\langle A | A \rangle \geq 0$) で $|A\rangle$ の代わりに $x |P\rangle$ と置けば、 $x |P\rangle$ がゼロでなければならないことが分かる。これで $m=2$ に対して定理は証明された。

次に $m > 2$ の場合、

$$x^{m-2} |P\rangle = |Q\rangle$$

とおく。すると方程式(13)から

$$x^2 |Q\rangle = 0$$

が得られる。これは $m=2$ の場合に相当するから

$$x |Q\rangle = 0$$

すなわち

$$x^{m-1} |P\rangle = x |Q\rangle = 0 \quad (14)$$

が得られる。以下、同様にして同じ手順を繰り返すと次々に

$$x^{m-2} |P\rangle = 0, x^{m-3} |P\rangle = 0, \dots, x^2 |P\rangle = 0, x |P\rangle = 0$$

が得られる。//

(以上)

(P.S)第2回目はここまで。量子力学の基礎となる1次演算子の勉強でした。まあこの辺は大事なところですのでしっかり読んでおくことしましょう(^^)。