
*Dirac*の量子力学を読む (－ 4)

2001.9.5

by KENZOU

- ・ いよいよやってきましたね、オブザーバブルのところまで。まあゆっくり読み進めることにしますか(笑)。

II. 力学変数とオブザーバブル

§ 10. オブザーバブル

- ・ *Dirac*の教科書には、ある特定の実の力学変数がオブザーバブルであるかどうかを数学的に決めるのは非常に難しい場合が多いと書かれていますね。例えば、エネルギーがオブザーバブルであることを証明するのは現在の数学解析の力ではできないとも書いてあります。また、電荷のような物理定数はただ1つの固有値を持つオブザーバブルと見なしてもよいし、単なる数と見なしてもよい。この2つの立場は同じことである、ということも書かれています。

- ・ さて、キーワードを並べておく。

①「測定できる力学変数(x)はどれも実の力学変数(エルミート演算子)である」

- 複素力学変数の実数部分と虚数部分を別々に測定すればいいじゃないかということとは古典力学では差し支えないが、量子力学では成り立たない。2つの観測を素早く続けて行なったとしても、第1の観測は体系の状態をかき乱して第2の測定に影響を及ぼすことになる。従って、測定できる力学変数は実のものに限られる。

$$x|P\rangle = a|P\rangle \quad (1)$$

②「実の力学変数 x の固有値は実数である。また異なる固有値に属する x の固有ケットは互いに直交している」

- *Dirac* (-3)で証明しているが、再掲しておく。

$x|P\rangle = a|P\rangle$ とする。さて、 $\langle B|\bar{a}|P\rangle = \overline{\langle P|a|B\rangle}$ の関係式を利用して $\langle B|$ の代わりに $\langle P|$ 、 a の代わりに実の1次演算子(エルミート演算子 x :

$x = \bar{x}$) とすると

$$\langle B|\bar{a}|P\rangle \rightarrow \langle P|x|P\rangle$$

$$\overline{\langle P|a|B\rangle} \rightarrow \langle P|x|P\rangle$$

となる。よって $\langle P|x|P\rangle$ は実数となることが分かる。また、 $\langle P|P\rangle$ は0以外の実数でなければならないから

$$\langle P|x|P\rangle = \langle P|a|P\rangle = a\langle P|P\rangle$$

従って a は実数となる。同様に b も実数であることが証明される。

次に後半の証明をおこなう。 $|x'\rangle$ を x の固有値 x' に属する固有ケットを表わすとして、

$$x|x'\rangle = x'|x'\rangle \quad (2)$$

$$x|x''\rangle = x''|x''\rangle \quad (3)$$

とする。(2)の共役虚をとると

$$\langle x'|x = x'\langle x'|$$

が得られる。これに右から $|x''\rangle$ を掛けると

$$\langle x'|x|x''\rangle = x'\langle x'|x''\rangle$$

となり、(3)の左から $\langle x'|$ を掛けると

$$\langle x'|x|x''\rangle = x''\langle x'|x''\rangle$$

が得られる。これらを差し引くと

$$(x' - x'')\langle x'|x''\rangle = 0 \quad (4)$$

$x' \neq x''$ であれば $\langle x'|x''\rangle = 0$ となって2つの固有ベクトル $|x'\rangle$ と $|x''\rangle$ は直交していることを示す。

④「測定をすればいつでもその測定した力学変数 x の固有状態へ体系を飛び移らせることになる」

→ 体系が飛び移れるいろいろな状態はすべて x の固有状態 ($|x\rangle$) である。従って、どんな状態でも x のいろいろな固有状態に從属していると結論できる。つまり x の固有状態は完全な組を形作る。

ここで完全な組の説明をしておくと、 x の任意の1つの固有状態は x のいろいろな固有状態の和として表わせるということである。

ところで固有状態は連続固有値を持つ場合もあるし離散固有値を持つ場合もある。そこで x の固有状態が完全な組を作るということを一般的に表わすと、任意のケットを $|P\rangle$ として

$$|P\rangle = \sum_r C_r |x^r\rangle + \int c(x') |x'\rangle dx' \quad (5)$$

と書ける。今、簡単のために離散固有値だけを持つ場合を考えると、

$$|P\rangle = \sum_r C_r |x^r\rangle \quad (6)$$

測定された結果、系が $|P\rangle$ の1つの固有状態 x^r に飛び移る確率は

$$|\langle x^r | P \rangle|^2 = |C_r|^2 \quad (7)$$

で与えられる。ただし $|P\rangle$ は規格化されているとする $\left(\sum_r |C_r|^2 = 1 \right)$ 。

ついでに(6)式をもう少し調べてみよう。

(6)式の左側から $\langle x^r |$ を掛け、規格直交性の関係を使うと展開係数 C_r が得

られる。

$$C_r = \langle x^r | P \rangle \quad (8)$$

従って

$$|P\rangle = \sum_r |x^r\rangle \langle x^r | P \rangle \quad (9)$$

となり、これはEuclid空間内のベクトル V の展開

$$V = \sum_i e_i (e_i \cdot V)$$

とよく似ている。ここで $\{e_i\}$ は単位ベクトルの直交系である。さて、Diracの掛け算の結合公理 (Diracを読む(-2)の(11)式) によれば、

$|x^r\rangle \langle x^r | x \rangle$ は $|x^r\rangle$ にただの数 $\langle x^r | x \rangle$ が掛かっているとも、 $|x \rangle$ に演算子 $|x^r\rangle \langle x^r |$ が作用しているとも見ることができる。(9)式の $|P\rangle$ は任意のケットであるから

$$|P\rangle = \{ |x^1\rangle \langle x^1 | + |x^2\rangle \langle x^2 | + \dots |x^n\rangle \langle x^n | \} |P\rangle$$

より

$$\sum_r |x^r\rangle \langle x^r | = 1 \quad (10)$$

でなければならない(補記参照)。この右辺の 1 は**恒等演算子**と見なすことができる。(10)は**完備関係式**と呼ばれている。

- ⑤ 最後に「**実の力学変数ならばどれも完全な組を作れる固有状態を持っているわけではない。固有状態が完全な組を作らないようなものは測定できる量ではない**」

→ 以上①～⑤をまとめて「**オブザーバブル**」というものを定義すると

「**実の力学変数で、その固有状態が完全な組を作っているものを²オブザーバブル²と呼ぶ**」ということになります。(^^)

- Diracを読む(-3)の後半の議論から、もし実の力学変数(x)がある代数方程式を満たすならその力学変数はオブザーバブルであるといえる。この一例として $|A\rangle \langle A|$ を考える。ただし $|A\rangle$ は規格化されているものとする。この1次演算子はDiracを読む(-2)の(23)式より

$$\overline{|A\rangle \langle A|} = |A\rangle \langle A|$$

となって実であり、その平方は、 $\langle A | A \rangle = 1$ であるから

$$\{|A\rangle \langle A|\}^2 = |A\rangle \langle A | A \rangle \langle A| = |A\rangle \langle A| \quad (11)$$

となる。つまり次の代数方程式を満足しているからオブザーバブルである。

$$\{|A\rangle \langle A|\}^2 - |A\rangle \langle A| = 0 \quad (12)$$

その固有値は1 と 0であり、 $|A\rangle$ が固有値 1 に属する固有ケット、 $|A\rangle$ に直交するすべてのケットが固有値 0 に属する固有ケットである。

【補記】

- ・ (10) 式の有用性はいくら強調しても強調しすぎることがない(J. J. Sakurai)。
例えばケットや演算子やブラの一連の積が与えられたとき、どこでも都合のよい場所に (10) の形で恒等演算子を挿入してよい。例えば $\langle x | x \rangle$ を考えると、

$$\begin{aligned}\langle x | x \rangle &= \langle x | \cdot \left(\sum_r |x^r\rangle \langle x^r| \right) \cdot |x\rangle \\ &= \langle x | \cdot \{ |x^1\rangle \langle x^1| + |x^2\rangle \langle x^2| + \dots + |x^n\rangle \langle x^n| \} \cdot |x\rangle \\ &= \{ \langle x | x^1 \rangle \} \langle x^1 | x \rangle + \{ \langle x | x^2 \rangle \} \langle x^2 | x \rangle + \dots + \{ \langle x | x^n \rangle \} \langle x^n | x \rangle \\ &= \overline{\langle x^1 | x \rangle} \langle x^1 | x \rangle + \overline{\langle x^2 | x \rangle} \langle x^2 | x \rangle + \dots + \overline{\langle x^n | x \rangle} \langle x^n | x \rangle \\ &= \sum_r |\langle x^r | x \rangle|^2\end{aligned}\tag{①}$$

が得られる。そしてこの式は、 $|x\rangle$ が規格化されているとするなら (6) 式の展開係数が

$$\sum_r |C_r|^2 = \sum_r |\langle x^r | x \rangle|^2 = 1\tag{②}$$

を満足しなければならないことを示している。

- ・ Dirac を読む (-2) の (A) (B) 式で $|A\rangle \langle B|$ という1次演算子の働きを述べたが、ついでに $|x^r\rangle \langle x^r|$ の働きを述べておく (ここでは $\sum$ が付いていないことに注意)。

この1次演算子を $|P\rangle$ に作用させると

$$\{ |x^r\rangle \langle x^r| \} \cdot |P\rangle = |x^r\rangle \langle x^r | P \rangle = C_r |x^r\rangle\tag{③}$$

となる。 **$|x^r\rangle \langle x^r|$ には、ケット $|P\rangle$ から $|x^r\rangle$ に平行な成分を選び出す働き**のあることが分かる。そのため $|x^r\rangle \langle x^r|$ は基底ケット $|x^r\rangle$ への**射影演算子**と呼ばれ、 L_x で表わされる。すなわち

$$L_x = |x^r\rangle \langle x^r|\tag{④}$$

であり、完備関係式(10)は

$$\sum_r L_x = 1\tag{⑤}$$

と書くことができる。

(以上)

(P.S) DRACを読むシリーズ4回目はこの辺でお開きとしておく。オブザーバブルの必要な項目は一応網羅したつもり (^^) ;。テキストにはいろいろとゴタゴタ書かれているが、また必要な時に戻ればよいということで(^^)、シリーズ5階目は § 11の「オブザーバブルの関数」から始めることにします。それでは。。