****

*Dirac*の量子力学を読む（－０）

２００１．７．５

by ＫＥＮＺＯＵ

****

－　プロローグ（序　章）　－

さて、いよいよ*Dirac*の量子力学を読み始めるわけですが、その前に序章として量子力学における一般的な考え方やブラケット記法の要点をかいまつまんで簡単にレビューしておきたいと思います。この序章は、一応*Dirac*の教科書を読む前の準備というかなんというか、読めば霊験新たなものが得られるでしょう。。。いや、そうだと信じて読み進めることにしましょう。(^^;

０．量子力学の基本的考え

・天下り的であるが、以下に量子力学の基本的な考え方を書いておく。

①ある事象のおきる確率は確率振幅と呼ばれる複素数f の絶対値の２乗で与えられる。

P ＝ **確率**

f ＝ **確率振幅**

$$P=|f|^2$$

②１つの事象がいくつかの異なる過程を経て起きるとき、その事象に対する確率振幅は、夫々の別の過程に対する確率振幅の和で表わされる。このとき干渉が起きる。

$$f=f_1+f_2 \qquad \text{（重ね合わせの原理）}$$

$$P=|f_1+f_2|^2$$

③ある実験を行ったとき、その実験によってある過程と別の過程のどちらを実際にとったかを決定できるときには、その事業の起きる確立は、夫々の過程の起きる確率の和で表わされる。このとき、干渉は失われる。

$$P=P_1+P_2$$

１．振幅の結合則

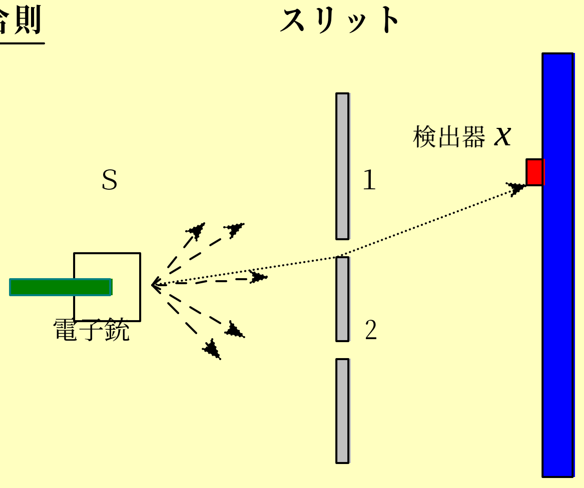


*Fig*１

・例によって電子銃の実験をとりあげる。電子銃Ｓから発射された電子がスリットを通り抜け、点 x に置かれている検出器に１個の電子が検出される確率を求めてみる。ここで、スリットと電子との間で相互作用はないことを仮定しておく。

＜量子力学の第 1番目の一般原理＞

・電子が源 S を出て検出器 x に到達する確率は、確率振幅（ S を出た電子が x に到達する振幅）と呼ばれる複素数の絶対値の2乗に等しい。

・ここで確率振幅を次のように書いておく(*Dirac*による表記法)。

$$＜電子が\ x\ に到達する｜電子が\ S\ を出る＞ \tag{1}$$

・この＜ ＞は { なになにの振幅 } と同じことを示す記号と受け止めていただきたい。そして、真中の垂直の棒の右側はいつでも始めの状態を示し、左側のものは終わりの状態を表わしているとする。そうすると(１)式は

$$\langle x \mid S \rangle \tag{2}$$

と書くこともできる。

＜量子力学の第 2 番目の一般原理＞

・１個の電子が２つの可能な経路を通って、ある与えられた状態に到達することができるとき、その過程に対する全振幅は２つの経路に対して別々に考えた振幅の和で与えられる。

$$\langle x|S\rangle_{\text{両孔とも開いている}} = \langle x|S\rangle_{\text{孔1を通る}} + \langle x|S\rangle_{\text{孔2を通る}} \tag{3}$$

＜量子力学の第 3 番目の一般原理＞

・電子がある特定の経路を辿っていくとき、その全体の経路に対する振幅は、特定の経路の一部をいく振幅と、その経路の残りの部分をいく振幅の積として表わされる。

$$\langle x|S\rangle_{\text{孔1を通る}} = \langle x|1\rangle\langle 1|S\rangle \tag{4}$$

・以上、量子力学の３つの一般原理を述べた。ここで再び＜|＞の読み方を思い出すと、垂直の棒の右側はいつでも始めの状態を示し、左側のものは終わりの状態を表わすということでしたね。その読み方で量子力学の第３番目の一般原理である(４)式の右辺を解釈すると「電子はSから孔1にいき、孔1から x にいく」ということになりますね。つまり、電子のとる経路を分解して表わすことができ、経路全体に対する振幅は次々に起きる夫々の事象に対する振幅を掛け合わせることによって計算できるということになる。

この法則を利用すると、(３)式は次のように書きなおすことができる。

$$\langle x|S\rangle_{\text{両孔とも開いている}} = \langle x|1\rangle\langle 1|S\rangle + \langle x|2\rangle\langle 2|S\rangle \tag{5}$$

(５)式の解釈は各自試みられたい。(^^);

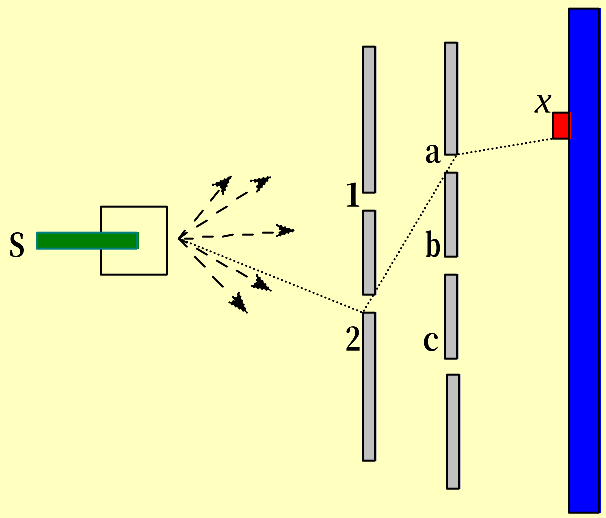


Fig 2

・さて、上で述べた法則を使うともっと複雑な問題が計算できる。*Fig* 2のケースを考えて見よう。Sから発射された電子は

①孔1を通り、次に孔ａを通って検出器 x に到達する
②孔1を通り、次に孔ｂを通って検出器 x に到達する
③孔1を通り、次に孔ｃを通って検出器 x に到達する
④孔2を通り、次に孔ａを通って検出器 x に到達する
⑤孔2を通り、次に孔ｂを通って検出器 x に到達する
⑥孔2を通り、次に孔ｃを通って検出器 x に到達する

の６通りが考えられる。従って、S から x への全体の振幅は

$$\begin{aligned}<x|S>=&<x|a><a|1><1|S>+<x|b><b|1><1|S>\\ &+<x|c><c|1><1|S>+<x|a><a|2><2|S>\\ &+<x|b><b|2><2|S>+<x|c><c|2><2|S>\end{aligned}$$

となる。これを簡潔に書くと

$$<x|S>=\sum_{i=1,2/\alpha=a,b,c}<x|a><a|i><i|S> \qquad (6)$$

となりますね。

2．振幅とベクトル

・c と f の２つの状態があるとする。すると f から始まって c に終わる振幅は、f から基本状態の１つに移る振幅と、それからその基本状態から c に移る振幅の積の和として表わすことができる（第３番目の一般原理）。ただし、基本状態は、完全系をなす全ての基本状態をとらなければならない。

$$<c|f>=\sum_{i}^{all}<c|i><i|f> \qquad (7)$$

また完全系の条件より

$$<i|j>=d_{ij} \qquad (8)$$

(7)式は単に振幅 $<c\,|\,f>$ に対する１つの公式とみなすことができる。

・通常$<c\,|\,f>$を$<c\,|$と$|\,f>$のスカラー積（内積）と呼んだりしているが、このあたりの事情を次に調べてみよう。（$<c\,|$や$|\,f>$を"状態ベクトル"と見なしているのですね）

・$\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$を３次元ベクトルとし、そのスカラー積は次式で定義される。

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z=\sum_i^3(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}_i)(\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{B}) \quad (8)$$

ここで $\boldsymbol{e}_i$ は単位ベクトルである。ここで(7)式と(8)式を見較べると、

$$c\Leftrightarrow\boldsymbol{A},\quad i\Leftrightarrow\boldsymbol{e}_i,\quad f\Leftrightarrow\boldsymbol{B}$$

と対応していることが見いだせる。 任意のベクトルは基本ベクトル $\boldsymbol{e}_i$ の線形結合で表わすことができ、さらにこの線形結合における各基本ベクトルの係数が（その3つの成分)が分かっていれば、そのベクトルに関する全てのことが分かる。
同じように、任意の量子力学的状態はそれが基本状態に移る振幅 $<i\,|\,f>$ によって完全に記述され、それらの係数が分かればその状態について知りたいことは全て分かる。
このように、一般のベクトルと量子力学的状態の間には密接な対応関係がある。基本ベクトル$\boldsymbol{e}_i$ と基本状態$|\,i>$は次の直交関係でも明らかな対応がある。

$$\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j=d_{ij} \quad\Leftrightarrow\quad <i\,|\,j>=d_{ij} \quad (9)$$

ただし、注意すべき点としてベクトルのスカラー積と量子力学的状態のスカラー積は、まずベクトルの場合は積の順番はどうでもよかった(10)が、一方、量子力学的状態

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A} \quad (10)$$

の場合は

$$<c\,|\,f>=\overline{<f\,|\,c>} \quad (11)$$

となり、積の順番を勝手に変えることができない。（Diracでいう共役虚な関係）

・次に大変有用な式の紹介をしておく。(12)式のベクトル式を考えてみる。

$$\boldsymbol{A}=\sum_i\boldsymbol{e}_i(\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{A}) \quad (12)$$

(12)式は

$$\boldsymbol{A}=\sum_i A_i\boldsymbol{e}_i=A_x\boldsymbol{e}_x+A_y\boldsymbol{e}_y+A_z\boldsymbol{e}_z \quad (13)$$

と同じ意味である。
さて、(7)式の両辺から $<c\,|$ を取り除いて次のような式を書くと、(12)式と非常によく似ていることに気付く。

$$|\,f>=\sum_i^{all}|\,i><i\,|\,f> \quad (14)$$

(7)式は任意の c に対して成り立つ式であるから、フルに書くのを節約して(14)式

のように書いてもよい。ただし、これは未完の式であって、常にその両辺にある$<c|$を左から掛けることによって完成されるべき表式であることを了解しておかなければならない。

・これを一歩進めて、もっと過激(^^);に(14)式から $|f>$を抜いてしまうと

$$| = \sum_{i}^{all} |i><i| \qquad (14)'$$

と書ける。左辺の｜はブラケット(<|>)の境界にある真中の垂直の棒である。この式はのちのちいろいろと役に立つ式であるから、是非、頭に入れておいたほうがよい。

3．状態ベクトルの分解

・さて、(14)式に再び注目してみる。

$$|f> = \sum_{i}^{all} |i><i|f> \qquad (14)$$

ここで**$<i|f>$をただの数（複素数）**と見なすと、任意の状態ベクトル$|f>$は、適当な係数を用いて、基本ベクトルの組の線形結合で表わしたものであるといえる。$<i|f>$を

$$<i|f> = C_i \qquad (15)$$

とすれば、(14)式は

$$|f> = \sum_{i} |i>C_i \qquad (16)$$

と書ける。また、他の任意の状態ベクトル$|c>$も同様にして、例えば係数をD_iとして

$$|c> = \sum_{i} |i>D_i \qquad (17)$$

と表わせる。ここでD_iは $<i|c>$ である。

・次に(7)式から f を抜き取ると

$$<c| = \sum_{i} <c|i><i| \qquad (18)$$

となる。ここで$<c|i> = \overline{<i|c>}$であることを思い出すと(17)式は

$$<c| = \sum_{i} \overline{D}_i <i| \qquad (19)$$

と書ける。さて、ここで(16)式と(19)式を掛け合わせるとどうなるか？

$$<c|f> = \sum_{i,j} \overline{D}_j <j|i>C_i \qquad (20)$$

となる。ところで $<j|i> = d_{ji}$ であるので

$$<c|f> = \sum_{i} \overline{D}_i C_i \qquad (21)$$

(20)式は(21)式となり、この式はまさにベクトル$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$のスカラー積

$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\sum_i A_iB_i$ と同じ格好をしているではないか！！　これがここでのミソである。

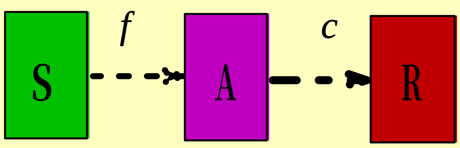
・以上の話を整理すると(21)式は状態ベクトル$<c|$および$|f>$をそれぞれ基本ベクトル$<i|$と$|i>$で展開した場合、 f から c に移る振幅は$<c|$と$|f>$のスカラー積で与えられるということである。そしてさらにいえば、これは(7)式を単に別の記号を用いて書き表したものにすぎないということである。

・とまぁ、ここまできてホットと一息というところであるが、いよいよプロローグの最後に向かうことにする。

・ 1.振幅の結合則 の項で、電子とスリットが互いに相互作用がない場合、電子が源 S を出て検出器 x に到達する確率振幅 （S を出た電子が x に到達する振幅)は

＜電子が x に到達する｜電子が S を出る＞

と表わされると書いた。いま、これを拡張する。S という装置があり、次に A というなにかごちゃごちゃしたガラクタがあり、次にR という装置があるとする。



$Fig\,3$

S から出た粒子（初期状態f)がAに入り、Aから出てきて粒子は状態（c）に変化しておりRに達するという実験を考える。ここで粒子とAは相互作用があるものとする。このような振幅に対しては

＜おわり｜途中｜はじめ＞

という記法で書くことができ、従って求める振幅は

$$<c|A|f> \qquad (22)$$

となる。ところで(22)式を(14)'式を使って次のように書くことができる。

$$<c|A|f>=\sum_{i,j}<c|i><i|A|j><j|f> \qquad (23)$$

・ついでに、$Fig\,3$でもう１個の装置BをAと直列に並べておくと次のように書けることも分かる(※)。

$$<c|BA|f>=\sum_{i,j,k}<c|i><i|B|j><j|A|k><k|f> \qquad (24)$$

(※)こういうときはいつでもBとAの間に垂直の棒 ”|　”を置くことができることを憶えておくとよい(^^)。

4. 終わりに

・これで『Diracを読む』シリーズの序章を終わります。まぁここまでくればDiracのブラケットの記法とも多少は親しくなれたと思いますが、如何でしょうか。最初は振幅の結合則あたりで切り上げるつもりだったのですが、ついつい筆が進んで（指先が勝手に動いて）しまいました。(^^;

・尚、ここで議論したことをさらに詳しく調べたい方は、ファインマン物理学V「量子力学」を紐解いてください。ここの議論はこのテキストに全面的に負っています。ご健闘を期待する。

・それでは、引き続いてDiracを読む(-1)に進むことにしましょう。。。ナヌ、まだ序章を読みきれていないだと。。。それではゆっくりと読んでいただき、着実に進むことにしましょう。

（以上）