磁場と中心ポテンシャル下での荷電粒子の運動について*

by K E N Z O U

2004 年 2 月 14 日

z 方向に一様な磁場と中心ポテンシャル $V = \dfrac{m\omega^2}{r^2}$ **が作用する荷電粒子の運動状態を調べる。** $\cdots$ えらいドハデなタイトルとなったが，$Latex2\epsilon$ でやるとこういうことに。。。(笑い)

磁場の強さを B とし, 荷電粒子の質量を m, 荷電を e とする。電磁場のベクトルポテンシャルを A とすると

$$
\begin{aligned}
rotA &= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) \\
&= (0, 0, B) \qquad (1)
\end{aligned}
$$

これから

$$
A_x = -\frac{B}{2}y, \quad A_y = -\frac{B}{2}x, \quad A_z = 0 \qquad (2)
$$

系のハミルトニアンは自由粒子のハミルトニアンにおける運動量演算子 $\mathbf{p}$ を $\mathbf{p} - \dfrac{e}{c}\mathbf{A}$ で置き換えて

$$
\begin{aligned}
H &= \frac{1}{2m}\left(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 + \frac{m\omega^2}{2}r^2 \\
&= \frac{1}{2m}\left(\mathbf{p}^2 - \frac{e}{c}\mathbf{p}\cdot\mathbf{A} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\cdot\mathbf{p} + \frac{c^2}{e^2}\mathbf{A}^2\right) + \frac{m\omega^2}{2}r^2 \\
&= \frac{1}{2m}\left(\mathbf{p}^2 - \frac{e}{c}\mathbf{A}\cdot\mathbf{p} + \frac{c^2}{e^2}\mathbf{A}^2\right) + \frac{m\omega^2}{2}r^2 \\
&= \frac{1}{2m}\mathbf{p}^2 + \frac{1}{2m}\left(\frac{Be}{2c}\right)^2\left(x^2 + y^2\right) + \frac{m\omega^2}{2}\left(x^2 + y^2 + z^2\right) - \frac{eB}{2mc}\left(xp_y - yp_x\right) \\
&= \frac{1}{2m}\mathbf{p}^2 + \frac{m}{2}\left(\omega_L^2 + \omega^2\right)\left(x^2 + y^2\right) + \frac{m\omega^2}{2}z^2 - \omega_L L_z \qquad (3)
\end{aligned}
$$

*これは LaTeX 2_ε の練習を兼ねて作成しました。

ただし

$$\omega_L = \frac{eB}{2mc} \tag{4}$$

とおいた。(3) を代数的に解いてみる。そこで例によって $\mathbf{p}, \mathbf{r}$ の代わりに次の演算子を導入する。

$$\begin{aligned}
a_i &= \sqrt{\frac{m\Omega}{2\hbar}} r_i + \frac{i}{\sqrt{2m\Omega\hbar}} p_i, \qquad (i = 1, 2) \qquad (\Omega = \omega_L^2 + \omega^2) & (5) \\
a_3 &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} r_3 + \frac{i}{\sqrt{2m\omega\hbar}} p_3 & (6) \\
a_\pm &= \frac{a_1 \mp i a_2}{\sqrt{2}}, \qquad a_\pm^\dagger = \frac{a_1^\dagger \pm i a_2^\dagger}{\sqrt{2}} & (7)
\end{aligned}$$

交換関係は

$$\begin{aligned}
\left[a_i . a_j{}^\dagger\right] &= \delta_{ij} \\
\left[a_+, a_+^\dagger\right] &= \left[a_-, a_-^\dagger\right] = 1 \\
\left[a_+, a_-^\dagger\right] &= \left[a_-, a_+^\dagger\right] = 0
\end{aligned}$$

交換関係について

$$\begin{aligned}
a_i a_j^\dagger &= (\alpha r_i + i\beta p_i)(\alpha r_j - i\beta p_j) = \alpha^2 r_i r_j + \beta^2 p_i p_j - i\alpha\beta r_i p_j + i\alpha\beta p_i r_j \\
a_j^\dagger a_i &= (\alpha r_j - i\beta p_j)(\alpha r_i + i\beta p_i) = \alpha^2 r_j r_i + \beta^2 p_j p_i + i\alpha\beta r_j p_i - i\alpha\beta p_j r_i
\end{aligned}$$

これから

$$a_i a_j{}^\dagger - a_j{}^\dagger a_i = 2\hbar\alpha\beta\delta_{ij} = \delta_{ij}$$

あとの交換関係は簡単に証明できるので演習問題としておく（←手抜き）。

ハミルトニアン（3）を生成消滅演算子で表す

ハミルトニアン (3) を眺めると調和振動子のハミルトニアン ($H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2\mathbf{q}^2}{2}$) とよく似ていることに気付く。調和振動子の場合は $N = aa^\dagger$ としてハミルトニアンは $H = \hbar\omega(N + 1/2)$ と表すことができた。今の場合，ハミルトニアンは x, y 座標で対称な形で z 座標に関しては非対称な姿をしているから生成消滅演算子として $a_\pm$ が顔をだすと想像できる。そこで

$$a_\pm = \frac{a_1 \mp i a_2}{\sqrt{2}}, \qquad a_\pm^\dagger = \frac{a_1^\dagger \pm i a_2^\dagger}{\sqrt{2}}$$

をつかって

$$N_\pm = a_\pm^\dagger a_\pm$$

を定義する。これより

$$N_+ = a_+^\dagger a_+ = \frac{1}{2}(a_1^\dagger + ia_2^\dagger)(a_1 - ia_2) = \frac{1}{2}(a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2 - ia_1^\dagger a_2 + ia_2^\dagger a_1)$$

$$N_- = a_-^\dagger a_- = \frac{1}{2}(a_1^\dagger - ia_2^\dagger)(a_1 + ia_2) = \frac{1}{2}(a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2 + ia_1^\dagger a_2 - ia_2^\dagger a_1)$$

$$\begin{aligned} N_+ + N_- &= a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2 & (8)\\ N_+ - N_- &= -i(a_1^\dagger a_2 - a_2^\dagger a_1) = i(a_1 a_2^\dagger - a_2 a_1^\dagger) & (9)\\ N_3 &= a_3^\dagger a_3 & (10)\end{aligned}$$

また,

$$\begin{aligned} a_1^\dagger a_1 &= \alpha^2 x^2 + \beta^2 p_1^2 + i\alpha\beta(xp_1 - p_1 x) = \alpha^2 x^2 + \beta^2 p_1^2 - \alpha\beta\hbar \\ a_2^\dagger a_2 &= \alpha^2 y^2 + \beta^2 p_2^2 + i\alpha\beta(yp_2 - p_2 y) = \alpha^2 y^2 + \beta^2 p_2^2 - \alpha\beta\hbar \\ a_3^\dagger a_3 &= \frac{m\omega}{2\hbar} z^2 + \frac{1}{2m\omega\hbar} p_3^2 - \frac{1}{2} & (11)\end{aligned}$$

これから

$$\begin{aligned} a^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2 &= \alpha^2(x^2+y^2) + \beta^2(p_1^2 + p_2^2) - 1 \\ &= \alpha^2(x^2+y^2) + \beta^2(\mathbf{p}^2 - p_3^2) - 1 \\ N_+ + N_- + 1 &= \alpha^2(x^2+y^2) + \beta^2(\mathbf{p}^2 - p_3^2) \\ &= \frac{\Omega}{2\hbar}(x^2+y^2) + \frac{1}{2m\Omega\hbar}(\mathbf{p}^2 - p_3^2) & (12)\\ \hbar\omega N_3 &= \hbar\omega a_3^\dagger a_3 = \frac{m\omega^2}{2} z^2 + \frac{1}{2m} p_3^2 - \frac{1}{2}\hbar\omega & (13)\end{aligned}$$

$$\left(\alpha = \sqrt{\frac{m\Omega}{2\hbar}}, \beta = \frac{1}{\sqrt{2m\Omega\hbar}}\right)$$

式（11）（12）より

$$\begin{aligned} \hbar\Omega(N_+ + N_- + 1) &= \hbar\Omega\left[\frac{m\Omega}{2\hbar}(x^2+y^2) + \frac{1}{2m\Omega\hbar}(\mathbf{p}^2 - p_3^2)\right] \\ &= \frac{1}{2m}\mathbf{p}^2 + \frac{m}{2}\Omega^2(x^2+y^2) - \frac{1}{2m}p_3^2 \\ &= H + \omega_L L_z - \hbar\omega\left(N_3 + \frac{1}{2}\right) & (14)\end{aligned}$$

だんだん求めるべきハミルトニアンの姿がでてきたぞ〜，もう一息。角運動量の z 成分 L_z を生成消滅演算子で書いてみる。

$$\begin{aligned} L_z &= \hbar(xp_2 - yp_1) \\ &= \hbar(a_+ a_+^\dagger - a_{a_-}^\dagger) = \hbar(N_+ - N_-) & (15)\end{aligned}$$

上式の証明は容易なので演習問題としておく。さて，式（15）を式（14）に代入して整理するとハミルトニアンは

$$H = \hbar\Omega(N_+ + N_- + 1) + \hbar\omega\left(N_3 + \frac{1}{2}\right) - \hbar\omega_L(N_+ - N_-) \tag{16}$$

となる。N_3 の固有値を　$n_3(=0,1,2,\cdots)$,$N_\pm$ の固有値を $n_\pm(=0,1,2,\cdots)$ と書くとハミルトニアン（14）のエネルギー固有値は $n_\pm, n_3$ で表されることになる。いま，

$$n_+ - n_- = m \tag{17}$$

とおくと

$$\begin{aligned} n_+ + n_- &= n_+ + n_+ - m \\ &= n_- + n_- + m \end{aligned}$$

となるから

$$n_+ + n_- = 2n + |m|$$

と定義してみる。するとハミルトニアンの固有値は

$$E_{nmk} = \hbar\Omega(2n + |m| + 1) + \hbar\omega(n_3 + \frac{1}{2}) - \hbar\omega_L m \tag{18}$$

となる。ここで $m\hbar$ は角運動量 L_z の固有値であることは明らかですね。n は式 (17) より $n_\pm$ のうちの小さいほうと一致する（←簡単ですから是非確かめてください)。これらのことから n, m, n_3 のとりうる値は次の通りとなる。

$$\begin{aligned} n &= 0,1,2,\cdots, \\ m &= 0,\pm1,\pm2,\cdots, \\ n_3 &= 0,1,2,\cdots, \end{aligned}$$

z 軸方向の磁場の存在により z 軸方向の角運動量の成分のみ保存量となる固有値 $m\hbar$ を持つ。角運動量の大きさは保存量とならないことに注意しよう。

− −

お疲れさまでした。LaTeX 2ε で書き，一応チェックはしましたが，まだ，誤字・誤植が残っているかも知れません。おかしな点があれば前後関係で判断していただいてご自分で修正するか間違い指摘メールをいただければ嬉しいです。