座標変換とスピノール

KENZOU

2004年4月25日

座標変換とスピノールの関係を以下に調べてみます。まず2次元の座標変換（等長変換）を調べ，それを3次元に拡張し，等長条件ついての条件式を明らかにします。続いて無限小回転を調べ，無限小回転が角運動量と密接に関係していることを見てみる。この辺りの議論は本HPの「解析力学ノート」を参照されるのもいいでしょう。次にいよいよスピノールの話に入っていくわけですが，ここではかなり抽象的な話となります。2成分量の間の変換マトリクス S を用いてスピノールを定義します。ところでこの変換マトリスク S は通常の3次元回転の変換マトリクス a_{ij} と緊密に関係付けられることが明らかになります。通常の3次元無限小回転の変換マトリクス a_{ij} は角運動量を含み，変換マトリクス S はスピン角運動量を含むことが明らかになる。それではぼちぼちとはじめましょうか。尚，小稿は筆者の力不足による誤りや誤解があるかも知れません。そのようなものを見つけられたときは是非一報いただけると幸いです。よろしくお願いします。

1　2次元空間における座標変換

1.1　推進

ϵ_i を2つの座標系（x, x') の関係を与えるパラメータとすると，空間推進は次式で与えられる。

$$x'_i = x_i + \epsilon_i \qquad (i = 1, 2) \tag{1}$$

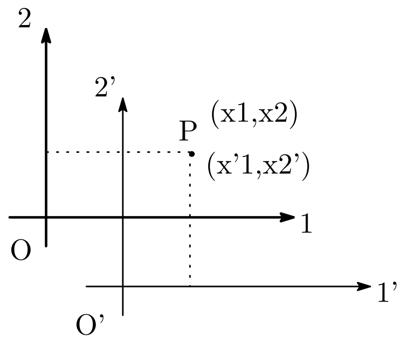


図 1: 空間推進

1.2　回転

θ を 2 つの座標系（x, x') の間の回転角とすると，回転[1]は次式で与えられる。

$$x'_i = \sum_{j=1,2} a_{ij} x_j \qquad (i = 1, 2) \tag{2}$$

$$a_{ij} = \begin{pmatrix} cos\theta & sin\theta \\ -sin\theta & cos\theta \end{pmatrix} \tag{3}$$

《座標回転であるための必要十分条件》
(4)(6) が必要十分条件。(6) だけが成立しても (4) が成立しなければその変換は回転ではない (例：反転→ $det(a_{ij}) = -1$)。

$$det(a_{ij}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = cos^2\theta + sin^2\theta = 1 \tag{4}$$

$$\sum_{i=1,2} a_{ij} a_{ik} = a_{1j} a_{1k} + a_{2j} a_{2k} \tag{5}$$

$$= \delta_{jk} \tag{6}$$

δ_{jk} はクロネッカーのデルタ。

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1 & j = k \\ 0 & j \neq k \end{cases} \tag{7}$$

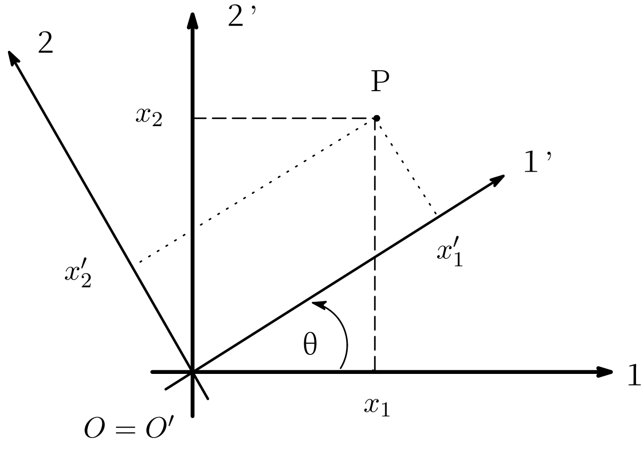


図 2: 回転

1.3　反転

右手座標系（x_i)，左手座標系（x'_i）とする。

[1]座標回転は長さを変えない等長変換であることに留意しましょう。

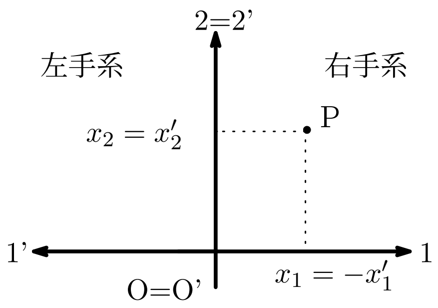


図 3: 反転

$$
\begin{aligned}
x'_1 = -x_1 \quad x'_2 = x_2 \\
x'_i = \sum_{j=1,2} a_{ij} x_j = a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 \qquad (8) \\
a_{ij} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
det(a_{ij}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = -1 \qquad (9)
\end{aligned}
$$

$$\sum_{i=1,2} a_{ij} a_{ik} = \delta_{jk} \qquad (10)$$

1.4　まとめ

以上，2 点間の距離が変わらない推進，回転，反転の座標変換を考えてきた。これを**等長変換**と呼ぶことにする。

- 非同次一次変換　$x'_i = \sum_{j=1,2} a_{ij} x_j + \epsilon_i \qquad (i = 1, 2)$
- 同次一次変換　$x'_i = \sum_{j=1,2} a_{ij} x_j$

《等長変換の条件》

$$\sum_i a_{ij} a_{ik} = \delta_{jk} \qquad (11)$$

$$[回転] \qquad det(a_{ij}) = 1 \qquad (12)$$

$$[反転] \qquad det(a_{ij}) = -1 \qquad (13)$$

[**補足その１**]
3 次元空間の点 $P(x_1, x_2, x_3)$ の原点からの距離の 2 乗は

$$D^2 = \sum_i x_i x_i$$

で与えられる。この座標と原点を共有するもう一つの座標系での点 P の座標を $P(x'_1, x'_2, x'_3)$ とすると，この新しい座標系での原点から点 P の距離の 2 乗は

$$D'^2 = \sum_i x'_i x'_i$$

である。この座標変換が１次変換で

$$x'_i = \sum_j a_{ij} x_j$$

という形をしていると仮定し，座標変換で距離が変わらないとすると，$D = D'$ であるから

$$\sum_{i,j,k} a_{ij} a_{ik} x_j x_k = \sum_i x_i x_i$$

が成り立たなければならない。これから式（11）の

$$\sum_i a_{ij} a_{ik} = \delta_{jk}$$

が得られる。

[補足その 2]
同次１次変換の逆変換はどう書けるか？　同次１次変換は $x'_i = \sum_{j=1,2} a_{ij} x_j$ で表わされるからその逆変換は

$$x_i = \sum_{j=1,2} a_{ji} x'_i$$

となる。ここで行列 $\{a_{ij}\}$ の転置行列[2] $\{a_{ji}\}$ になっていることに注意しよう。等長条件 $a_{ij} a_{ik} = \delta_{jk}$ は，a_{ij} を行列要素とする行列を A とした場合，

$$A^T A = I$$

と書くことができる。これから A は逆行列 A^{-1} と同じであることが分かる。つまり

$$A^T = A^{-1}$$

ということで，このような関係を満たす行列 A を直交行列とよんでいる。

[補足終わり]

1.5　無限小回転

無限小回転は無限小角の回転で，a_{ij} がクロネッカーのデルタ δ_{ij} から無限小だけ離れている[3]ということ。1 次の無限小 ω_{ij} を用いて

$$a_{ij} = \delta_{ij} + \omega_{ij} \tag{14}$$

と置くと，等長条件 (11) より

$$\begin{aligned} \sum_{i=1,2} a_{ij} a_{ik} &= \sum_{i=1,2} (\delta_{ij} + \omega_{ij})(\delta_{ik} + \omega_{ik}) \\ &= \sum_{1=i,2} (\delta_{ij}\delta_{ik} + \omega_{ij}\delta_{ik} + \delta_{ij}\omega_{ik}) \\ &= \delta_{jk} + \omega_{kj} + \omega_{jk} = \delta_{jk} \qquad (j, k = 1, 2) \end{aligned} \tag{15}$$

《 ω_{ij} の満たすべき条件 》
変換が回転である場合には，

[2]行と列を入れ替えたもの。
[3]この離れが無限小観点核に相当することがすぐ後で分かります。

- ω_{ij} は反対称となる $\cdots$ これは (15) より明らか

$$\omega_{ij} = -\omega_{ji} \qquad (i,j=1,2)$$

- さらに ω_{ij} は無限小回転角となる。というのは

$$det(a_{ij}) = \begin{vmatrix} 1 & \omega_{12} \\ \omega_{21} & 1 \end{vmatrix} = 1$$

  で（12）を満たし，回転を表わすことが分かる。次に (3) と比較すると，$\theta \longrightarrow$ 無限小角とすると，$cos\theta \approx 1, sin\theta \approx \theta$ となるから

$$\begin{vmatrix} cos\theta & sin\theta \\ -sin\theta & cos\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \theta \\ -\theta & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \omega_{12} \\ \omega_{21} & 1 \end{vmatrix}$$

これから $\omega_{12} = \theta, \omega_{21} = \theta$ となり，ω は回転角そのものであることがわかる。

2 3次元空間における座標変換

今まで扱ってきた 2 次元の考え方を 3 次元空間に拡張するのは容易。つまり 2 次元空間の座標成分の数 2 を 3 にまで延長すればよい。

$$x'_i = \sum_j a_{ij}x_j + \epsilon_i \qquad (i=1,2,3) \tag{16}$$

2.1 等長変換

- 等長条件 $\sum_i a_{ij}a_{ik} = \delta_{jk}$
- 回転・反転条件 $\det(a_{ij}) = \pm 1$ （$+1$：回転，-1：反転）

n 次元空間においても上の条件はそのまま成り立つ。n 次元空間では（16）で $i = 1, 2, \ldots, n$ とすればよい。そこで一般に n 次元空間での回転（等長変換）を指定するパラメータは何個になるか調べてみよう。等長条件は j と k に対して対称な関係であるから，独立な制限は

$$(\text{対角項の数}) + \frac{1}{2}(\text{非対角項の数}) = n + \frac{1}{2}(n \times n - n) = \frac{n(n+1)}{2} \tag{17}$$

個となる。

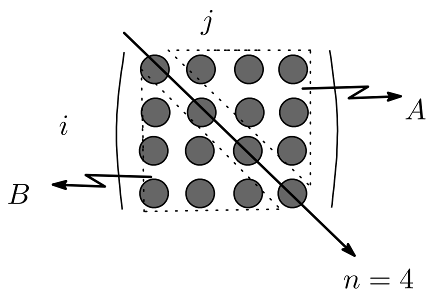
n^2 個の量 a_{ij} に対して式（17）の制限があるわけだから，a_{ij} のうち独立にとれる量は

$$(a_{ij}\text{の総数}) - (\text{条件の数}) = n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \tag{18}$$

となる。つまり独立な a_{ij} の数は

$$\begin{cases} 2\text{ 次元（n=2）} & \cdots 1 \\ 3\text{ 次元（n=3）} & \cdots 3 \\ 4\text{ 次元（n=4）} & \cdots 6 \\ 5\text{ 次元（n=5）} & \cdots 15 \end{cases} \tag{19}$$

となる。2 次元では独立なパラメータは 1 個で回転角 θ で回転が決まる。3 次元の回転では独立なパラメータ 3 個で回転が決まるわけで，このパラメータとして回転の軸（軸の方向を決めるのに 2 個のパラメータが必要）とその軸の回りの回転角が考えられる。



A の部と B の部はそれぞれ対称（$a_{ij} = a_{ji}$）

4 次元の場合の独立な制限の個数は 10 個となるが，
この絵をよくみて理解して欲しい。

図 4: 4 次元の場合

2.2　無限小回転（1）

3 次元回転は，回転軸の指定に 2 個のパラメータ，回転方向に 1 個のパラメータの合計 3 個のパラメータで一義的に決まることが分かった。次は角運動量やスピンに関係してくる無限小回転について取り扱うこととする。回転軸方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{e}$，その軸の周りの無限小回転角を θ とする。回転後の座標 $\boldsymbol{x'}$ と回転前の座標を $\boldsymbol{x}$ とは次の関係で結ばれている[4]。

$$\boldsymbol{x'} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{e\theta} \tag{20}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x'_1} &= \boldsymbol{x_1} + (\boldsymbol{x_2 e_3} - \boldsymbol{x_3 e_2})\boldsymbol{\theta} \\ \boldsymbol{x'_2} &= \boldsymbol{x_2} + (\boldsymbol{x_3 e_1} - \boldsymbol{x_1 e_3})\boldsymbol{\theta} \\ \boldsymbol{x'_3} &= \boldsymbol{x_3} + (\boldsymbol{x_1 e_2} - \boldsymbol{x_2 e_1})\boldsymbol{\theta} \end{aligned} \tag{21}$$

2 次元の時と同じように無限小のパラメータ $\boldsymbol{\omega_{ij}}$ を用いて

$$\boldsymbol{a_{ij}} = \boldsymbol{\delta_{ij}} + \boldsymbol{\omega_{ij}} \tag{22}$$

すると，等長条件は

$$\boldsymbol{\omega_{ij}} = -\boldsymbol{\omega_{ji}} \tag{23}$$

となる。(16) に (22) を代入すると（$\boldsymbol{\epsilon_i = 0}$ として）

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x'_1} &= \boldsymbol{x_1} + \boldsymbol{\omega_{12} x_2} + \boldsymbol{\omega_{13} x_3} \\ \boldsymbol{x'_2} &= \boldsymbol{x_2} + \boldsymbol{\omega_{21} x_1} + \boldsymbol{\omega_{23} x_3} \\ \boldsymbol{x'_3} &= \boldsymbol{x_3} + \boldsymbol{\omega_{31} x_1} + \boldsymbol{\omega_{32} x_2} \end{aligned} \tag{24}$$

(21) と比較して，$\boldsymbol{\omega_{ij}}$ が反対称であったことを用いると

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega_{12}} &= -\boldsymbol{\omega_{21}} = \boldsymbol{e_3 \theta} \\ \boldsymbol{\omega_{23}} &= -\boldsymbol{\omega_{32}} = \boldsymbol{e_1 \theta} \\ \boldsymbol{\omega_{31}} &= -\boldsymbol{\omega_{13}} = \boldsymbol{e_2 \theta} \end{aligned} \tag{25}$$

となる。Levi-Civita の全反対称テンソル[5]

$$\boldsymbol{\epsilon_{ijk}} = \begin{cases} \mathbf{1} & \boldsymbol{i, j, k} \text{ が } \mathbf{1, 2, 3} \text{ の偶置換であるとき} \\ \mathbf{-1} & \boldsymbol{i, j, k} \text{ が } \mathbf{1, 2, 3} \text{ の奇置換であるとき} \\ \mathbf{0} & \text{それ以外のとき} \end{cases}$$

[4] この辺の話はホームページの「解析力学ノート」などを参照してください。

[5] この $\boldsymbol{\epsilon_{ijk}}$ はエディントンのイプシロンとも呼ばれています

を使うと，次のようにスッキリと書ける[6]

$$\omega_{ij} = \sum_k \epsilon_{ijk} e_k \theta \tag{26}$$

ϵ_{ijk} に対して成り立つ公式

$$\sum_{j,k} \epsilon_{ijk}\epsilon_{ljk} = 2\delta_{il} \tag{27}$$

を使うと (26) は逆に解くことができて，

$$e_i\theta = \frac{1}{2}\sum_{j,k}\epsilon_{ijk}\omega_{jk} \tag{28}$$

となる。その証明は次の通り。
《証明》

$$\begin{aligned}
\omega_{jk} &= \sum_i \epsilon_{jki} e_i \theta \\
\sum_{jk} \epsilon_{ljk}\omega_{jk} &= \sum_i \left(\sum_{j,k} \epsilon_{ljk}\epsilon_{ijk} e_i \theta \right) \\
&= \sum_{j,k} (\epsilon_{ljk}\epsilon_{1jk} e_1 + \epsilon_{ljk}\epsilon_{2jk} e_2 + \epsilon_{ljk}\epsilon_{3jk} e_3)\theta \\
&= 2e_l\theta
\end{aligned}$$

これから

$$e_i\theta = \frac{1}{2}\sum_{j,k}\epsilon_{ijk}\omega_{jk}$$

［証明終わり］

【余禄】　エディントンの ϵ_{ijk} についての公式とその証明 ⋯ 脚注 (6) 参照

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl} \tag{29}$$

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{jkl} = 2\delta_{il} \tag{30}$$

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} = 6 \tag{31}$$

＜証明＞
（29）i と j が同じ番号の場合,，$\epsilon_{iik} = 0$ であるから左辺は 0 となる。右辺は

$$\delta_{il}\delta_{im} - \delta_{im}\delta_{il} = 0$$

となって両辺ともに 0 に等しい。次に i と j が異なる場合を具体的に見てみる。$i = 1, j = 2$ の場合，左辺は

$$\epsilon_{12k}\epsilon_{klm} = \epsilon_{123}\epsilon_{3lm} = \epsilon_{3lm} = \begin{cases} 1 & (l = 1, m = 2) \\ -1 & (l = 2, m = 1) \\ 0 & (\text{その他の場合}) \end{cases}$$

となる。一方，右辺は

$$\delta_{1l}\delta_{2m} - \delta_{1m}\delta_{2l} = \begin{cases} 1 & (l = 1, m = 2) \\ -1 & (l = 2, m = 1) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

[6] $\epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = -\epsilon_{132} = -\epsilon_{213} = -\epsilon_{321} = 1$　i, j, k のうちどれかが等しいと $\epsilon_{ijk} = 0$
$\epsilon_{ijk}\epsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$，$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}$，$\epsilon_{ijk}\epsilon_{jkl} = 2!\delta_{il}$。

となって等号が成り立つ。i, j がその他の番号の場合でも同様に証明できる。
（30）(29) で j と m について縮約[7]すると

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{klj} = \delta_{il}\delta_{jj} - \delta_{ij}\delta_{jl} = 3\delta_{il} - \delta_{il} = 2\delta_{il}$$

この辺の事情をもっと具体的に書くと (←老婆親切の蛇足)

$$\begin{cases} j=1 & m=1 & \delta_{il}\delta_{11} - \delta_{i1}\delta_{1l} \\ & m=2 & \delta_{il}\delta_{12} - \delta_{i2}\delta_{1l} \\ & m=3 & \delta_{il}\delta_{13} - \delta_{i3}\delta_{1l} \\ j=2 & m=1 & \delta_{il}\delta_{21} - \delta_{i1}\delta_{2l} \\ & m=2 & \delta_{il}\delta_{22} - \delta_{i2}\delta_{2l} \\ & m=3 & \delta_{il}\delta_{23} - \delta_{i3}\delta_{2l} \\ j=3 & m=1 & \delta_{il}\delta_{31} - \delta_{i1}\delta_{3l} \\ & m=2 & \delta_{il}\delta_{32} - \delta_{i2}\delta_{3l} \\ & m=3 & \delta_{il}\delta_{32} - \delta_{i3}\delta_{3l} \end{cases} \tag{32}$$

(32) の 3 列目の第 1 項で生き残るのは $\delta_{il}\delta_{kk}$ で足し合わせると $3\delta_{il}$ となります。次に 3 列目の第 2 項で生き残るのは l が $l = 1, 2, 3$ のいずれかの番号の時だけですから結局 δ_{il} だけが生き残ることになります。ということで結局 3 列目の総計は $3\delta_{il} - \delta_{il} = 2\delta_{il}$ となるわけですね。
(31) さらに上の結果で i と l について縮約すると

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{kij} = \epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} = 2\delta_{ii} = 2 \cdot 3 = 6$$

[**余禄終わり**]

2.3　無限小回転（２）

スピンの話をするときに必要となるので，無限小回転を少々異なった形に書いておく。次の 3 個の 3 行 3 列のエルミート行列を導入する。

$$(T_i)_{jk} = -i\epsilon_{ijk} \tag{33}$$

これは具体的に書くとエディントンのイプシロンの性質

$$\epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = -\epsilon_{213} = \cdots = -\epsilon_{321} = 1, \quad i, j, k \text{ のうちどれかが等しいと} \epsilon_{ijk} = 0$$

から次のように書ける。

$$T_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix} \tag{34}$$

$$T_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{35}$$

$$T_3 = \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{36}$$

また，行列の関係

$$T_1T_2 - T_2T_1 = iT_3 \qquad \text{（循環）} \tag{37}$$

が成り立つ。(37) は正準交換関係の記号を使うともっときれいに

$$[T_i,\, T_j] = i\sum_k \epsilon_{ijk}\, T_k \tag{38}$$

[7] テンソルの同じ指標について 1 から 3 まで加えること。

と書くことができる。その証明は以下の通り。

［証明］

$$
\begin{aligned}
(T_1T_2)_{jk} &= \sum_l (T_1)_{jl}(T_2)_{lk} \\
&= -\sum_l \epsilon_{1jl}\epsilon_{2lk} \\
(T_2T_1)_{jk} &= \sum_l (T_2)_{jl}(T_1)_{lk} \\
&= -\sum_l \epsilon_{2jl}\epsilon_{1lk} \\
(T_1T_2 - T_2T_1)_{jk} &= \sum_l (\epsilon_{2jl}\epsilon_{1lk} - \epsilon_{1jl}\epsilon_{2lk})
\end{aligned}
\tag{39}
$$

(1) ϵ_{ijk} で i, j, k のうちどれかが等しいと $\epsilon_{ijk} = 0$
(2) $\epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = 1, \qquad \epsilon_{132} = \epsilon_{213} = \epsilon_{321} = -1$
(39) の右辺を調べると

$$
\begin{aligned}
j = 1 &\begin{cases} k = 1 & \sum_l (\epsilon_{21l}\epsilon_{1l1} - \epsilon_{11l}\epsilon_{2l1}) = 0 \\ k = 2 & \sum_l (\epsilon_{21l}\epsilon_{1l2} - \epsilon_{11l}\epsilon_{2l2}) = 1 \\ k = 3 & \sum_l (\epsilon_{21l}\epsilon_{1l3} - \epsilon_{11l}\epsilon_{2l3}) = 0 \end{cases} \\
j = 2 &\begin{cases} k = 1 & \sum_l (\epsilon_{22l}\epsilon_{1l1} - \epsilon_{12l}\epsilon_{2l1}) = -1 \\ k = 2 & \sum_l (\epsilon_{22l}\epsilon_{1l2} - \epsilon_{12l}\epsilon_{2l2}) = 0 \\ k = 3 & \sum_l (\epsilon_{22l}\epsilon_{1l3} - \epsilon_{12l}\epsilon_{2l3}) = 0 \end{cases} \\
j = 3 &\begin{cases} k = 1 & \sum_l (\epsilon_{23l}\epsilon_{1l1} - \epsilon_{13l}\epsilon_{2l1}) = 0 \\ k = 2 & \sum_l (\epsilon_{23l}\epsilon_{1l2} - \epsilon_{13l}\epsilon_{2l2}) = 0 \\ k = 3 & \sum_l (\epsilon_{23l}\epsilon_{1l3} - \epsilon_{13l}\epsilon_{2l3}) = 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

一方，$i(T_3)_{jk} = \epsilon_{3jk}$ であるから

$$
\begin{aligned}
i(T_3)_{12} &= \epsilon_{312} = 1 \\
i(T_3)_{21} &= \epsilon_{321} = -1
\end{aligned}
$$

これより

$$
T_1T_2 - T_2T_1 = iT_3
$$

まったく同様にして

$$
\begin{aligned}
T_2T_3 - T_3T_2 &= iT_1 \\
T_3T_1 - T_1T_3 &= iT_2
\end{aligned}
$$

が成立する。これをまとめて書くと

$$
[T_i,\, T_j] = i\sum_k \epsilon_{ijk}\, T_k
$$

と書ける[8]。

［証明終わり］

[8]この関係式は量子力学における角運動量の満たす交換関係に他ならない。角運動量の 3 成分を $J_i(i = 1, 2, 3)$ とすると 3 成分 J_i は交換関係　$[J_j,\, J_j] = i\epsilon_{ijk}J_k$ を満たすエルミート行列として定義される。

無限小回転は

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a_{ij}} &= \boldsymbol{\delta_{ij} + \omega_{ij}} \\
&= \boldsymbol{\delta_{ij} + \sum_k \epsilon_{ijk} e_k \theta} \\
&= \boldsymbol{\delta_{ij} + i \sum_k (T_k)_{ij} e_k \theta}
\end{aligned} \tag{40}
$$

と書けるので，座標を 3 行 1 列の行列

$$
\boldsymbol{X} \equiv \begin{pmatrix} \boldsymbol{x_1} \\ \boldsymbol{x_2} \\ \boldsymbol{x_3} \end{pmatrix}
$$

で表すと，無限小回転は

$$
\boldsymbol{X' = [I + i \sum_k T_k e_k \theta] X} \tag{41}
$$

と表されることになる。ただし，$\boldsymbol{I}$ は 3 行 3 列の単位行列である。

【余禄】　(41) を具体的に書いておくと

$$
\begin{gathered}
\begin{pmatrix} \boldsymbol{x'_1} \\ \boldsymbol{x'_2} \\ \boldsymbol{x'_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} & \boldsymbol{a_{13}} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} & \boldsymbol{a_{23}} \\ \boldsymbol{a_{31}} & \boldsymbol{a_{32}} & \boldsymbol{a_{33}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x_1} \\ \boldsymbol{x_2} \\ \boldsymbol{x_3} \end{pmatrix} \\
\boldsymbol{a_{11} = \delta_{11} + i \sum_k T_k e_k \theta = 1 + i \sum_k T_k e_k \theta} \\
\boldsymbol{a_{12} = \delta_{12} + i \sum_k T_k e_k \theta = 0 + i \sum_k T_k e_k \theta} \\
\boldsymbol{a_{13} = \delta_{13} + i \sum_k T_k e_k \theta = 0 + i \sum_k T_k e_k \theta} \\
\vdots
\end{gathered}
$$

——————【余禄終わり】

2.4　回転の異なった表現（スピノールへの準備）

2 行 2 列のエルミート行列

$$
\boldsymbol{z} \equiv \begin{bmatrix} \boldsymbol{x_3} & \boldsymbol{x_1 - i x_2} \\ \boldsymbol{x_1 + i x_2} & \boldsymbol{-x_3} \end{bmatrix} \tag{42}
$$

を導入する。この行列式を計算すると

$$
\boldsymbol{R^2 = -det\, z = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \tag{43}
$$

となって，行列式 $\boldsymbol{det\, z}$ は距離をあらわすことがわかる。そうすると（42）の行列式を不変にする変換として等長変換を定義することができる。今，変換後の 2 行 2 列のエルミート行列を

$$
\boldsymbol{z'} \equiv \begin{bmatrix} \boldsymbol{x'_3} & \boldsymbol{x'_1 - i x'_2} \\ \boldsymbol{x'_1 + i x'_2} & \boldsymbol{-x'_3} \end{bmatrix} \tag{44}
$$

とおくと，等長変換は 2 行 2 列の変換 $\boldsymbol{S(a)}$ を用いて

$$\boldsymbol{z' = S(a) z S^{-1}(a)} \tag{45}$$

と表すことができる。この $\boldsymbol{S(a)}$ は単模ユニタリー[9]の変換で，変換のパラメータ $\boldsymbol{a_{ij}}$ に依存する。$\boldsymbol{\alpha, \beta, \gamma, \delta}$ をすべて複素数とし，

$$\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha} & \boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{\gamma} & \boldsymbol{\delta} \end{bmatrix} \tag{46}$$

とおくと，逆行列 $\boldsymbol{S^{-1}}$ は

$$\boldsymbol{S^{-1}} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{\alpha\delta - \beta\gamma}} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\delta} & \boldsymbol{-\beta} \\ \boldsymbol{-\gamma} & \boldsymbol{\alpha} \end{bmatrix} \tag{47}$$

エルミート共役行列[10] $\boldsymbol{S^{\dagger}}$ は

$$\boldsymbol{S^{\dagger}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha^*} & \boldsymbol{\gamma^*} \\ \boldsymbol{\beta^*} & \boldsymbol{\delta^*} \end{bmatrix} \tag{48}$$

となる。単模とユニタリーとだから

$$\boldsymbol{det\, S = \alpha\delta - \beta\gamma = 1} \tag{49}$$

$$\boldsymbol{S^{-1} = S^{\dagger}} \tag{50}$$

これから $\boldsymbol{S}$ の行列要素は

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\alpha^* = \delta} \\ \boldsymbol{\beta^* = -\gamma} \end{array} \right. \tag{51}$$

を満たさなければならない。条件（49）（51）は，$\boldsymbol{\alpha, \beta, \gamma, \delta}$ の 4 個の複素数（8 個の実数）の間に 5 個の条件[11]をおくことにあたる。したがって，$\boldsymbol{8-5=3}$ の 3 個だけ独立なパラメータが残ることになる。これはちょうど 3 次元空間での回転の自由度と一致していることがわかる。

さて，以下に $\boldsymbol{S(a)}$ を具体的に求めてみよう。（42）（44）は $\boldsymbol{Pauli}$ 行列を使って

$$\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{x_1} \\ \boldsymbol{x_1} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{-ix_2} \\ \boldsymbol{ix_2} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{x_3} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{-x_3} \end{pmatrix} = \sum_{\boldsymbol{i}} \boldsymbol{x_i \sigma_i} \tag{52}$$

$$\boldsymbol{z'} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{x'_1} \\ \boldsymbol{x'_1} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{-ix'_2} \\ \boldsymbol{ix'_2} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{x'_3} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{-x'_3} \end{pmatrix} = \sum_{\boldsymbol{i}} \boldsymbol{x'_i \sigma_i} \tag{53}$$

と書ける。ちなみに $\boldsymbol{Pauli}$ 行列は

$$\boldsymbol{\sigma_1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{1} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{\sigma_2} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{-i} \\ \boldsymbol{i} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{\sigma_1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{1} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{-1} \end{pmatrix} \tag{54}$$

である。（45）と（52）（53）から

$$\sum_{\boldsymbol{i}} \boldsymbol{x'_i \sigma_i} = \boldsymbol{S(a)} \left(\sum_{\boldsymbol{i}} \boldsymbol{x_i \sigma_i} \right) \boldsymbol{S^{-1}(a)} \tag{55}$$

---

[9]単模とはその行列式が 1 になるユニタリー行列のこと。$\boldsymbol{det\, S(a) = 1}$

[10]行列要素 $\boldsymbol{S_{ij}}$ の複素共役 $\boldsymbol{(S_{ij})^*}$ をとり，それらを行と列を逆にして並べた行列。

[11]$\boldsymbol{\alpha = a + bi, \beta = c + di, \gamma = e + fi, \delta = g + hi}$ とおく。$\boldsymbol{\alpha^* = \delta, \beta^* = -\gamma}$ より $\boldsymbol{a = g, b = -h, c = -e, d = f}$ の 4 個の条件がでてくる。さらに $\boldsymbol{detS = \alpha\delta - \beta\gamma = 1}$ より $\boldsymbol{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1}$。これで合計 5 個の条件となる。

(55) に $\boldsymbol{x'_j = \sum_j a_{ij} x_j}$ を入れると

$$\begin{aligned}
\sum_i \left(\sum_j a_{ij} x_j \right) \boldsymbol{\sigma}_i &= S(a) \left(\sum_i x_i \boldsymbol{\sigma} i \right) S^{-1}(a) \\
\sum_i \left(\sum_j a_{ij} x_j \right) \boldsymbol{\sigma}_i &= \sum_j \left(\sum_i a_{ij} \boldsymbol{\sigma}_j \right) x_j \\
\sum_j \left(\sum_i a_{ij} \boldsymbol{\sigma}_i \right) x_j &= \sum_j \left(S(a) \boldsymbol{\sigma}_j S^{-1}(a) \right) x_j \\
\therefore \qquad \sum_i a_{ij} \boldsymbol{\sigma}_i &= S(a) \boldsymbol{\sigma}_j S^{-1}(a) \qquad (56)
\end{aligned}$$

(56) は $\boldsymbol{S(a)}$ の定義とみてよい。つまり $\boldsymbol{a_{ij}}$ が与えられたとき, (56) によって $\boldsymbol{S}$ を定義することができる。したがって $\boldsymbol{a_{ij}}$ の代わりに，2 行 2 列の単模ユニタリー行列 $\boldsymbol{S}$ で回転を代表させてもよいということになる。ついでに

$$\sum_j a_{ij} \boldsymbol{\sigma}_j = S(a)^{-1} \boldsymbol{\sigma}_i S(a) \qquad (57)$$

とかけることも以下にフォローしておこう。

$$\begin{aligned}
z' = S(a) z S^{-1}(a) &\longrightarrow z = S^{-1}(a) z (S(a) \\
z = \sum_i x_i \boldsymbol{\sigma}_i &= \sum_i \left(\sum_j a_{ji} x'_j \right) \boldsymbol{\sigma}_i \\
&= \sum_j \left(\sum_i a_{ij} x'_i \right) \boldsymbol{\sigma}_j = \sum_i \left(\sum_j a_{ij} \boldsymbol{\sigma}_j \right) x'_i \\
S^{-1} z S = S^{-1} \left(\sum_i x'_i \boldsymbol{\sigma}_i \right) S &= \sum_i \left(S^{-1} \boldsymbol{\sigma}_i S \right) x'_i \\
\therefore \qquad \sum_j a_{ij} \boldsymbol{\sigma}_j &= S(a)^{-1} \boldsymbol{\sigma}_i S(a)
\end{aligned}$$

さて，無限小回転を考えてみよう。$\boldsymbol{Pauli}$ 行列の交換関係 $[\boldsymbol{\sigma}_i, \boldsymbol{\sigma}_j] = 2i\epsilon_{ijk}\boldsymbol{\sigma}_k$ を使って

$$\begin{aligned}
\sum_i a_{ij} \boldsymbol{\sigma}_i &= \sum_i (\delta_{ij} + \omega_{ij}) \boldsymbol{\sigma}_i \\
&= \boldsymbol{\sigma}_j + \sum_i \left(\sum_k \epsilon_{ijk} e_k \theta \right) \boldsymbol{\sigma}_i \\
&= \boldsymbol{\sigma}_j - \sum_k \left(\sum_i \epsilon_{kji} \boldsymbol{\sigma}_i \right) e_k \theta \\
&= \boldsymbol{\sigma}_j - \frac{i}{2} \sum_k [\boldsymbol{\sigma}_i, \boldsymbol{\sigma}_j] \, e_k \theta \\
&= \left(I + \frac{i}{2} \sum_k \boldsymbol{\sigma}_k e_k \theta \right) \boldsymbol{\sigma}_j \left(I - \frac{i}{2} \sum_l \boldsymbol{\sigma}_l e_l \theta \right) \qquad (58)
\end{aligned}$$

ただし，最後の段階の計算では $\boldsymbol{\theta}$ が無限小であるからその 2 次以上の項は無視した。
（56）と（58）を比較すると，無限小回転については

$$\boldsymbol{S(a) = I + \frac{i}{2}\sum_k \sigma_k e_k \theta} \tag{59}$$

であるということになる。この式と（40）を比べると面白いことが分かる。

$$\boldsymbol{a_{ij} = \delta_{ij} + i\sum_k (T_k)_{ij} e_k \theta} \tag{60}$$

（59）は 2 行 2 列,（60）は 3 行 3 列という違いがあるものの，$\boldsymbol{\frac{1}{2}\sigma_k}$ も $\boldsymbol{T_k}$ も全く同じ交換関係を満たしている。
さて，具体的に $\boldsymbol{S(a)}$ と $\boldsymbol{a_{ij}}$ の関係をだしてみよう。（56）に $\boldsymbol{\sigma_k}$ をかけて，トレース（対角和）をとると，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Tr\left[\sigma_k\left(\sum_i a_{ij}\sigma_i\right)\right]} &= \boldsymbol{\sum_i a_{ij} Tr\left[\sigma_k \sigma_i\right]} \\ &= \boldsymbol{2\sum_i a_{ij}\delta_{ki}} \qquad \boldsymbol{(Tr[\sigma_i\sigma_j] = 2\delta_{ij}\text{を利用})} \\ &= \boldsymbol{2a_{kj}} \\ &= \boldsymbol{Tr\left[\sigma_k S \sigma_j S^{-1}(a)\right]}\end{aligned}$$

これから

$$\boldsymbol{a_{ij} = \frac{1}{2} Tr\left[\sigma_i S \sigma_j S^{-1}\right]} \tag{61}$$

が得られる。つまり $\boldsymbol{S}$ が与えられると右辺の演算をすることによって $\boldsymbol{a_{ij}}$ が得られることになる。
ここで天下り的であるが回転軸 $\boldsymbol{e}$ と回転角 $\boldsymbol{\theta}$ を含む，次の複素量を導入する。

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha} &\boldsymbol{\equiv cos\frac{\theta}{2} + ie_3 sin\frac{\theta}{2}} \\ \boldsymbol{\beta} &\boldsymbol{\equiv i(e_1 - ie_2) sin\frac{\theta}{2}} \\ \boldsymbol{\alpha^*} &\boldsymbol{\equiv cos\frac{\theta}{2} - ie_3 sin\frac{\theta}{2}} \\ \boldsymbol{\beta^*} &\boldsymbol{\equiv -i(e_1 + ie_2) sin\frac{\theta}{2}}\end{aligned}$$

これから

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1} \\ \boldsymbol{S} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha} & \boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{-\beta^*} & \boldsymbol{\alpha^*} \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{det[S]} &= \boldsymbol{|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1} \\ \boldsymbol{S^\dagger} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha^*} & \boldsymbol{-\beta} \\ \boldsymbol{\beta^*} & \boldsymbol{\alpha} \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{S^\dagger S = SS^\dagger} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{|\alpha|^2 + |\beta|^2} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{|\alpha|^2 + |\beta|^2} \end{bmatrix} = \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{S^\dagger} &= \boldsymbol{S^{-1}}\end{aligned}$$

となって $\boldsymbol{S}$ はユニタリーである。$\boldsymbol{S}$ をあらわすパラメータ $\boldsymbol{\alpha, \beta}$ を $\boldsymbol{Cayley - Klein}$ パラメー

タと呼ぶ。$\boldsymbol{S}$ を再度書くと

$$\begin{aligned}
S &= \begin{bmatrix} cos\frac{\theta}{2}+ie_3sin\frac{\theta}{2} & i(e_1-ie_2)sin\frac{\theta}{2} \\ i(e_1+ie_2)sin\frac{\theta}{2} & cos\frac{\theta}{2}-ie_3sin\frac{\theta}{2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} cos\frac{\theta}{2} + i\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} e_1sin\frac{\theta}{2} \\
&\quad + i\begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} e_2sin\frac{\theta}{2} + i\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} e_3sin\frac{\theta}{2} \\
&= Icos\frac{\theta}{2} + i\sigma\cdot esin\frac{\theta}{2} \qquad (62) \\
&= exp\left[\frac{1}{2}i\sigma\cdot e\theta\right] \qquad (63)
\end{aligned}$$

となる。ただしここで次の公式を使った。

$$\begin{aligned}
[\sigma_i, \sigma_j] &= 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k \\
\{\sigma_i, \sigma_j\} &= 2\delta_{ij} \\
\sigma_i\sigma_j &= \delta_{ij} + i\epsilon_{ijk}\sigma_k \\
(\sigma\cdot A)(\sigma\cdot B) &= (A\cdot B) + i\sigma\cdot(A\times B) \\
(\sigma\cdot A)^2 &= (A\cdot A) \\
[\sigma_i, \sigma\cdot A] &= 2i\epsilon_{ijk}A_j\sigma_k = 2i(A\times\sigma)_i
\end{aligned}$$

上の公式のうち一つだけ証明しておく。$\boldsymbol{A}$ および $\boldsymbol{B}$ は $\boldsymbol{\sigma}$ と互いに交換する 3 つの任意ベクトルとする。

$$\begin{aligned}
(\sigma\cdot A)(\sigma\cdot B) &= \sum_{123}({\sigma_1}^2A_1B_1 + \sigma_1\sigma_2A_1B_2 + \sigma_2\sigma_1A_2B_1) \\
&= (A\cdot B) + \sigma_1\sigma_2(A_1B_2 - A_2B_1) + \sigma_1\sigma_3(A_1B_3 - A_3B_1) \\
&\quad + \sigma_2\sigma_3(A_2B_3 - A_3B_2) \quad (\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij} + i\epsilon_{ijk}\sigma_k\text{を使って}) \\
&= (A\cdot B) + i\sigma_1(A_2B_3 - A_3B_2) + i\sigma_2(A_1B_3 - A_3B_1) + i\sigma_3(A_1B_2 - A_2B_1) \\
&= (A\cdot B) + i\sigma\cdot(A\times B)
\end{aligned}$$

2.5 スピノール

本小稿も最終ラウンドに入った。いよいよスピノールについて話を進めていくことにする。スピノール $\psi_\alpha(x)$[12] とは，上で述べた $S(a)$ を用いて

$$\psi'_\alpha(x') = S_{\alpha\beta}(a)\psi_\beta(x) \qquad (64)$$

と変換する量であると定義される。

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \end{pmatrix} \qquad (65)$$

で定義し, (64) を単に

$$\psi'(x') = S(a)\psi(x) \qquad (66)$$

と書かれることも多い。

[12] ψ_α をスピノール場という。ちなみにスカラー場は $\phi(x)\to\phi'(x') = \phi(x)$, ベクトル場は $V_i(x)\to V'_i(x') = a_{ij}V'_i(x')$ と変換される場である。

2.5.1　スピノールの２価性

x_3 軸回りの回転を考える。（62）より求める S は

$$S = Icos\frac{\theta}{2} + i\sigma_3\, sin\frac{\theta}{2} \tag{67}$$

したがって $\psi(x)$ は次のように変換される。

$$\psi'(x') = \left(Icos\frac{\theta}{2} + i\sigma_3\, sin\frac{\theta}{2}\right)\psi(x) \tag{68}$$

ここで $\theta = 2\pi$ と置くと

$$\psi'(x') = -\psi(x)$$

となる。つまり座標系は x_3 軸周りに 2π 回転すると元の座標系の戻るが，スピノールは元に戻らず符合が変わる。もう一度 2π だけ回転してはじめて $\psi'(x')$ は元に戻るという特異な性質を持っていることが分かる。つまり $\psi(x)$ は 2 価関数ということになる。

2.5.2　スピノール，スカラー，ベクトル

（65）のエルミート共役は

$$\psi^{\dagger}(x) = \begin{pmatrix} \psi_1^*(x) & \psi_2^*(x) \end{pmatrix} \tag{69}$$

となる。このエルミート共役は次の変換

$$= \psi^{\dagger}(x)S^{-1}(a) \tag{70}$$

を受けるから，$\psi^{\dagger}(x)\psi(x)$ および $\psi^{\dagger}(x)\sigma_i\psi(x)$ はそれぞれ

$$\begin{aligned}
\psi^{\dagger}(x)\psi(x) &\rightarrow \psi^{\dagger\prime}(x')\psi'(x') && (71)\\
&= \psi^{\dagger}(x)S^{-1}(a)S(a)\psi(x)\\
&= \psi^{\dagger}(x)\psi(x)\\
\psi^{\dagger}(x)\sigma_i\psi(x) &\rightarrow \psi^{\dagger\prime}(x')\sigma_i\psi'(x')\\
&= \psi^{\dagger}(x)S^{-1}(a)\sigma_i\, S(a)\psi(x)\\
&= a_{ij}\psi^{\dagger}(x)\sigma_j\psi(x) \qquad \text{(【補足その 2】を思いだそう)} && (72)
\end{aligned}$$

と変換する。これらはそれぞれスカラーとベクトル変換である。つまりスピノール $\psi(x)$ からスカラーやベクトルを作ることができる。そういう意味でスピノールは物理学における基本的な量の 1 つとされる。
復習するとスピノールの変換性は

$$\psi'_{\alpha}(x\text{'}) = S_{\alpha\beta}(a)\psi_{\beta}(x)$$

または

$$\psi^{\dagger}(x) = \psi^{\dagger}(x)S^{-1}(a)$$

で明確に与えられる。

2.5.3　スピノール場（場のスピン）

座標の回転に対してスカラー，ベクトル，スピノールの変換は次の通りとなった。

- **座標の回転**

$$x_i \longrightarrow x'_i = a_{ij}x_j \tag{73}$$
$$a_{ij}a_{ik} = \delta_{jk} \tag{74}$$
$$det[a_{ij}] = 1 \tag{75}$$

- **スカラー**

$$\phi(x) \longrightarrow \phi'(x') = \phi(x) \tag{76}$$

- **ベクトル**

$$A_i(x) \longrightarrow A'_i(x') = a_{ij}A_j(x) \tag{77}$$

- **スピノール**

$$\psi(x) \longrightarrow \psi'(x') = S(a)\psi(x) \tag{78}$$

無限小回転に対する a_{ij} および S は（60）（59）で与えられており，それぞれ次の通り

$$a_{ij} = \delta_{ij} + i\sum_k (T_k)_{ij}e_k\theta$$

$$S(a) = I + \frac{i}{2}\sum_k \sigma_k e_k \theta$$

《場のスピン》
上の a や $S(a)$ を軸 e 周りの無限小角 θ の回転に対して

$$I + i\mathsf{S}\cdot e\theta \tag{79}$$

という形に書いたとき，S を場の持つスピン（または intrnsic な角運動量）と呼んでいる。

$$\mathsf{S} = \begin{cases} 0 & \textbf{スカラー} \\ T & \textbf{ベクトル} \\ \frac{1}{2}\sigma & \textbf{スピノール} \end{cases} \tag{80}$$

T や $\frac{1}{2}\sigma$ の各成分は次の交換関係を満たすから角運動量の性質を持っている。

$$[T_i, T_j] = i\epsilon_{ijk}T_k$$
$$\left[\frac{1}{2}\sigma_i, \frac{1}{2}\sigma_j\right] = i\epsilon_{ijk}\frac{1}{2}\sigma_k$$

ベクトル場，スピノール場のスピンの大きさを求めてみよう。
（34）（35）（36）と（54）より

$$T_1^2 + T_2^2 + T_3^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \tag{81}$$

$$\left(\frac{1}{2}\sigma_1\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\sigma_2\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\sigma_3\right)^2 = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \tag{82}$$

が得られる。量子力学の議論より角運動量の各成分の 2 乗の和は，固有値 $\hbar^2 j(j+1)$ をもち，状態は $2j+1$ 個ある。 これからベクトル場，スピノール場の角運動量はそれぞれ 1，1/2 をもつことが分かる。

- スカラー場： $j = 0$（スカラー場は角運動量 0 である）
- ベクトル場： $j(j+1) = 2 \longrightarrow j = 1$（ベクトル場は角運動量 1 [13]を持つ）
- スピノル場： $j(j+1) = \frac{3}{4} \longrightarrow j = \frac{1}{2}$（スピノール場は角運動量 1/2 を持つ）

[13] $\hbar$ が単位

【終わり】

この辺でそろそろお開きとします。ながながとお付き合いいただき，大変お疲れ様でした。どうもまとまりに欠けるきらいがありますが，その辺は以下にあげる参考書で補っていただければと思います。また，おかしな点や不明な点がありましたら掲示板にでも書き込んでいただければと思います。

See You Later!

[**参考書**]

1) 高橋康，量子場を学ぶための場の解析力学入門，講談社（1982)

2) 高橋康，物理数学ノート　，講談社（1999）

3) 田代嘉宏，基礎数学選書 23　テンソル解析，裳華房（2001）