

=====

**Heisenberg の運動方程式から  $DE = \hbar n$  を導く**

2001.8.13

by KENZOU

=====

任意の力学変数を  $A(t)$  とする。Heisenberg の運動方程式は

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} A(t) = [A(t), H]$$

となる。ここで演算子  $H$  はエルミート演算子とする。

$H$  に属する固有ケットを  $|n\rangle$ 、その固有値を  $E_n$  とすると

$$H |n\rangle = E_n |n\rangle$$

となる。

式を  $\langle n' |$  と  $|n\rangle$  ではさむと

$$\begin{aligned} i\hbar \langle n' | \frac{\partial}{\partial t} A(t) |n\rangle &= \langle n' | [A(t), H] |n\rangle \\ &= \langle n' | A(t)H - HA(t) |n\rangle \\ &= E_n \langle n' | A(t) |n\rangle - \langle n' | HA(t) |n\rangle \\ &= E_n \langle n' | A(t) |n\rangle - \sum_j \langle n' | H |a_j\rangle \langle a_j | A(t) |n\rangle \\ &= E_n \langle n' | A(t) |n\rangle - E_n \langle n' |n\rangle \langle n' | A(t) |n\rangle \\ &= (E_n - E_n) \langle n' | A(t) |n\rangle \end{aligned}$$

ここで  $|a_j\rangle$  は  $|n\rangle, |n'\rangle$  を含む  $H$  に属する全ての固有ケットとする。

ここで  $\langle n' | A(t) |n\rangle$  のフーリエ積分を考えると

$$\langle n' | A(t) |n\rangle = \int d\mathbf{w} \exp(-i\mathbf{w}t) \langle n' | \widehat{A}(\mathbf{w}) |n\rangle$$

これから

$$\begin{aligned} \langle n' | \frac{\partial}{\partial t} A(t) |n\rangle &= \int d\mathbf{w} \frac{\partial}{\partial t} \exp(-i\mathbf{w}t) \langle n' | \widehat{A}(\mathbf{w}) |n\rangle \\ &= \int d\mathbf{w} \{ (-i\mathbf{w}) \exp(-i\mathbf{w}t) \langle n' | \widehat{A}(\mathbf{w}) |n\rangle \} \\ &= -i\mathbf{w} \int d\mathbf{w} \exp(-i\mathbf{w}t) \langle n' | \widehat{A}(\mathbf{w}) |n\rangle \end{aligned}$$

式を 式にを使って

$$\begin{aligned} \hbar \mathbf{w} \int d\mathbf{w} \exp(-i\mathbf{w}t) \langle n' | \widehat{A}(\mathbf{w}) |n\rangle \\ = (E_n - E_n) \int d\mathbf{w} \exp(-i\mathbf{w}t) \langle n' | \widehat{A}(\mathbf{w}) |n\rangle \end{aligned}$$

式を整理すると

$$\{\hbar\omega - (E_n - E_{n'})\} \langle n' | A(t) | n \rangle = 0$$

式はすべての  $A(t)$  について成り立たなければならない。したがって  $A(t)$  の 0 でない行列要素に対しては

$$\hbar\omega = E_n - E_{n'}$$

が成り立たなければならない。

(以上)