==================================

Heisenbergの運動方程式からDE=hnを導く

2001.8.13

by KENZOU

==================================

任意の力学変数を $A(t)$ とする。Heisenbergの運動方程式は

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}A(t)=[A(t),H] \qquad ①$$

となる。ここで演算子H はエルミート演算子とする。

Hに属する固有ケットを$|n>$ 、その固有値を E_n とすると

$$H|n>=E_n|n> \qquad ②$$

となる。

①式を $<n'|$ と $|n>$ ではさむと

$$\begin{aligned}i\hbar<n'|\frac{\partial}{\partial t}A(t)|n>&=<n'|[A(t),H]|n>\\ &=<n'|A(t)H-HA(t)|n>\\ &=E_n<n'|A(t)|n>-<n'|HA(t)|n>\\ &=E_n<n'|A(t)|n>-\sum_j<n'|H|a_j><a_j|A(t)|n>\\ &=E_n<n'|A(t)|n>-E_{n'}<n'|n'><n'|A(t)|n>\\ &=\left(E_n-E_{n'}\right)<n'|A(t)|n> \qquad ③\end{aligned}$$

ここで$|a_j>$ は$|n>,|n'>$ を含むHに属する全ての固有ケットとする。

ここで $<n'|A(t)|n>$ のフーリエ積分を考えると

$$<n'|A(t)|n>=\int dw\,exp(-iw\,t)<n'|\widehat{A}(w)|n> \qquad ④$$

これから

$$\begin{aligned}<n'|\frac{\partial}{\partial t}A(t)|n>&=\int dw\frac{\partial}{\partial t}exp(-iw\,t)<n'|\widehat{A}(w)|n>\\ &=\int dw\left\{(-iw)exp(-iw\,t)<n'|\widehat{A}(w)|n>\right\}\\ &=-iw\int dw\,exp(-iw\,t)<n'|\widehat{A}(w)|n> \qquad ⑤\end{aligned}$$

⑤式を③式に使って

$$\hbar w\int dw\,exp(-iw\,t)<n'|\widehat{A}(w)|n>$$

$$=(E_n-E_{n'})\int dw\,exp(-iw\,t)<n'|\widehat{A}(w)|n> \qquad ⑥$$

⑥式を整理すると

$$\left\{\hbar w-\left(E_n-E_{n'}\right)\right\}<n'|A(t)|n>=0 \qquad ⑦$$

⑦式はすべての $A(t)$ について成り立たなければならない。したがって $A(t)$ の0でない行列要素に対しては

$$\hbar w=E_n-E_{n'} \qquad ⑧$$

が成り立たなければならない。

（以上）