初等　場の量子論(1)

KENZOU

2005 年 10 月 30 日

さて，これから E.M.Henley, W.Thirring(著)，野上幸久 (訳)「初等場の量子論」(講談社) [1]を読んでいこう。非相対論的場の理論のテキストであるので，ややこしい数学に足をすくわれることなく，物理的な意味の直感的意味づけに重きを置いて書かれているので，場の理論の入門としては最適だろう。途中で沈没する可能性も大変高いが，兎も角，出船することにする。

1　自由場

1.1　線状に並んだ原子振動子

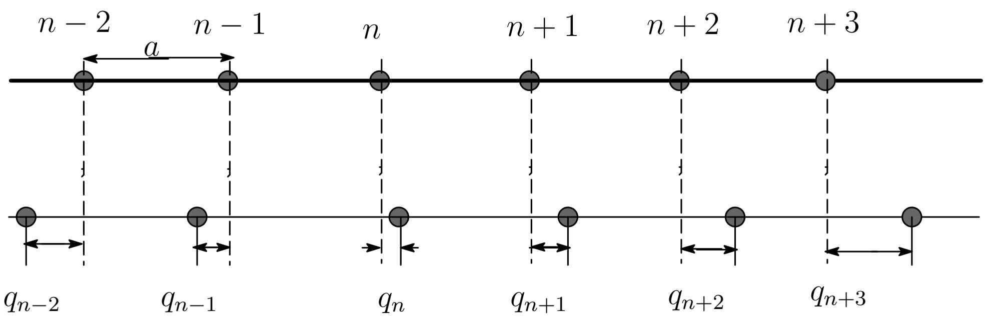


図 1: 原子振動子の例。原子の平行位置の間隔は a。n 番目の原子の平行位置からのずれは q_n である。

n 番目の原子に $n+i$ 番目の原子の変位が引き起こされる力は，それらの変位の差に比例すると仮定 (フックの法則) すると，n 番目の原子に及ぼされる全体の力は

$$F_n = \sum_i \Omega_i^2 (q_{n+i} - q_n) \tag{1}$$

で与えられる。ここで Ω_p^2 は相互作用の強さをあらわす定数である。運動方程式は，原子は単位質量をもつとして

$$\ddot{q}_n = \sum_i \Omega_i^2 (q_{n+i} - q_n) \tag{2}$$

となる。ここで i はすべての正負の値をとる。
さて，話を簡単にするために，隣接原子間に調和振動子的な相互作用（相互作用の強さを表す定数を Ω^2 とする）のみ働くという仮定を導入する。そうすると運動方程式 (2) は，

$$\left.\begin{aligned} \ddot{q}_n &= \Omega^2 (q_{n+1} - q_n + q_{n-1} - q_n) \\ &= \Omega^2 (q_{n+1} + q_{n-1} - 2q_n) \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

[1] $Elementary\ Quantum\ Field\ Theory$, (1962) , $McGraw-Hill$

となる。　結合振動子の系を有限にするために周期的境界条件 $q_{i+N}=q_i$ を適用する[2]。方程式 (3) は，N 個の連立方程式となり，規準座標を導入することによって解かれる。そのためには正準形式を使うのが便利である。振動子列の運動エネルギー $\dfrac{1}{2}\sum_n \dot{q}_n^2$，ポテンシャルエネルギーは方程式 (1) より $\dfrac{1}{2}\sum_n \Omega^2(q_n-q_{n+1})^2$ となるから，この系のハミルトニアンは $p_n=\dot{q_n}$を使って

$$H=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\left[p_n^2+\Omega^2(q_n-q_{n+1})^2\right] \tag{4}$$

となる。ハミルトンの正準方程式は

$$.\begin{cases} q_n=\dfrac{\partial H}{\partial p_n}=p_n & \text{(5a)}\\ \dot{p}_n=-\dfrac{\partial H}{\partial q_n}=\Omega^2(q_{n+1}+q_{n-1}-2q_n) & \text{(5b)}\end{cases}$$

となり，これらは方程式（3）と同等である。

【註】ハミルトニアン (4) から (5b) の右辺がどうして導かれるのか，式を目だけで追うだけでは分からない。そこで具体的に計算してみよう。　$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\Omega^2(q_n-q_{n+1})^2$ の $\sum$ 部を書き表すと

$$(q_1-q_2)^2+(q_2-q_3)^2+(q_3-q_4)^2+\cdots+(q_n-q_{n+1})^2+\cdots+(q_N-q_{N+1})^2 \quad \text{但し } q_{N+1}=q_1$$

となる。いま，この式を仮に q_2 で偏微分したとすると

$$2(q_2-q_3)-2(q_1-q_2)=-2(q_3-q_2+q_1-q_2)$$

となることが分かる。方程式 (5b) の右辺はこれを一般化したものである。

規準座標 Q_s とそれに対応する運動量 P_s を次式で定義する[3]。

$$q_n=\sum_s e^{isn}Q_sN^{-\frac{1}{2}} \qquad p_n=\sum_s e^{-isn}P_sN^{-\frac{1}{2}} \tag{6}$$

周期的境界条件[4]から s がとる値は $s=2\pi\ell/N$ ($\ell=0,\pm1,\pm2,\cdots$) となる。次に (6) の逆変換を求めてみよう。(6) の第 1 式に $\sum_{s'}e^{-is'n}$ を掛け，規格化直交条件[5]

$$\sum_{n=1}^{N}e^{in(s-s')}=N\delta_{ss'} \tag{7}$$

を用いると，

$$\sum_{s'}e^{-is'n}q_n=\sum_{s,s'}e^{-is'n}e^{isn}Q_sN^{-\frac{1}{2}}=\sum_{s,s'}e^{-i(s'-s)n}Q_sN^{-\frac{1}{2}}=Q_sN^{\frac{1}{2}} \tag{8}$$

[2]系は N 個の原子で閉じている。

[3]これは Fourie 変換ですね。$N^{-\frac{1}{2}}$ は規格化因子。

[4]N 個の原子がリング状に連結しているので 1 番目の原子は N+1 番目の原子と同じ。常に $u(n+N)=u(n)$ が成り立つ。これから $e^{is(n+N)}=e^{isn}$，つまり $e^{isN}=1$ となる。これを満たす s は $s=2\pi\ell/N$ ($\ell=0,\pm1,\pm2,\cdots$)

[5]s=s'：$\displaystyle\sum_{n=1}^{N}e^{in(s-s')}=\sum_{n=1}^{N}1=N.$　　$s\neq s'$：$\displaystyle\sum_{n=1}^{N}e^{in(s-s')}=\frac{e^{i(s-s')}(-1+e^{iN(s-s')})}{-1+e^{i(s-s')}}=0 \quad \because s=2\pi\ell/N$

が得られる。(6) の第 2 式も同様に計算し，

$$Q_s = \sum_{n=1}^{N} e^{-isn} q_n N^{-\frac{1}{2}} \qquad P_s = \sum_{n=1}^{N} e^{isn} p_n N^{-\frac{1}{2}} \tag{9}$$

が得られる。また

$$Q_{-s} = \sum_{n=1}^{N} e^{isn} q_n N^{-\frac{1}{2}} \qquad P_{-s} = \sum_{n=1}^{N} e^{-isn} p_n N^{-\frac{1}{2}} \tag{10}$$

(9) より q_n, p_n は実数であるので

$$Q_s^* = \sum_{n=1}^{N} e^{isn} q_n N^{-\frac{1}{2}} \qquad P_s^* = \sum_{n=1}^{N} e^{-isn} p_n N^{-\frac{1}{2}} \tag{11}$$

(10) と比較すると

$$Q_{-s} = Q_s^* \qquad P_{-s} = P_s^* \tag{12}$$

つまり，Q_s, P_s は上の条件を満たす複素数である。ハミルトニアン (4) に (6) を代入すると

$$H = \frac{1}{2} \sum_s \left[P_s P_s^* + Q_s Q_s^* \Omega^2 \left(2sin\frac{s}{2} \right)^2 \right] \tag{13}$$

となるとのことだが，以下に之を導出してみよう。下付きインデックス s は $\pm$ の値をとることに留意しながら，ハミルトニアン (4) の第 1 項は

$$p_n = \sum_{s>0} \left(e^{-isn} P_s + e^{isn} P_{-s} \right) = \sum_{s>0} \left(e^{-isn} P_s + e^{isn} P_s^* \right)$$

と書けることに注意しよう[6]。そうすると

$$\begin{aligned}
p_n^2 &= \sum_{s,s'>0} \left[\left(e^{-isn} P_s + e^{isn} P_s^* \right) \times \left(e^{-is'n} P_s' + e^{is'n} P_{s'}^* \right) \right] && (14)\\
&= \sum_{s,s'>0} \left(e^{-i(s+s')n} P_s P_{s'} + e^{-i(s-s')n} P_s P_{s'}^* + e^{i(s-s')n} P_s^* P_{s'} + e^{i(s+s')n} P_s^* P_{s'}^* \right) && (15)\\
&= \sum_{s>0} \left(P_s P_s^* + P_s^* P_s \right) && (16)\\
&= 2 \sum_{s>0} P_s P_s^* && (17)\\
&= \sum_s P_s P_s^* && (18)
\end{aligned}$$

となり，めでたく第一項がでてきた。ここで規格化直交条件 (7) を使った。また (18) の最後の式は s の正負に対して対称であることから得られる。

[6]面倒だから規格化因子 $N^{-\frac{1}{2}}$ は省略していることに注意。

全く同様にしてハミルトニアン (4) の第 2 項を計算してみよう。

$$(q_n - q_{n+1}) = \sum_{s>0} \left(e^{isn}Q_s + e^{-isn}Q_s^* - e^{is(n+1)}Q_s - e^{is(n+1)}Q_s^* \right) \tag{19}$$

$$(q_n - q_{n+1})^2 = \sum_{s,s'>0} \left(e^{isn}Q_s + e^{-isn}Q_s^* - e^{is(n+1)}Q_s - e^{is(n+1)}Q_s^* \right) \tag{20}$$

$$\times \left(e^{is'n}Q_s + e^{-is'n}Q_{s'}^* - e^{is'(n+1)}Q_{s'} - e^{is'(n+1)}Q_{s'}^* \right) \tag{21}$$

$$= \sum_{s,s'>0} 4Q_sQ_s^* \left(1 - \frac{1}{2}(e^{-is} + e^{is}) \right) \tag{22}$$

$$= \sum_{s,s'>0} 4Q_sQ_s^* \left(2sin^2\frac{s}{2} \right) \tag{23}$$

$$= \sum_{s} Q_sQ_s^* \left(2sin\frac{s}{2} \right)^2 \tag{24}$$

以上の計算より求めるハミルトニアンは

$$H = \frac{1}{2}\sum_s \left[P_sP_s^* + Q_sQ_s^*\Omega^2 \left(2sin\frac{s}{2} \right)^2 \right] \tag{25}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_s \left(P_sP_s^* + \omega_s^2 Q_sQ_s^* \right) \quad 但し\ \omega_s = \Omega \left(2sin\frac{s}{2} \right) \tag{26}$$

となることが分かる。
さて，ここでハミルトニアン (4) と (26) を見比べていただきたい。ハミルトニアン (26) は，相互作用のない $2s$ 個の独立な振動子の集まりとなっている! 規準座標 Q_s, P_s を導入することで系を簡単化することができたわけである (←これが規準座標のうまみ ; 笑い)。
次にハミルトニアン (26) から運動方程式を導出しよう。この計算は決して難しくはないが結構気を使うので，具体的な計算で一般の場合のあたりをつけておくことにする。ハミルトニアン (26) は次のように書けることに注意しよう。

$$\begin{aligned} H = &\frac{1}{2}\left[\left(P_1P_{-1} + \omega_1^2 Q_1Q_{-1}\right) + \left(P_2P_{-2} + \omega_2^2 Q_2Q_{-2}\right) + \left(P_3P_{-3} + \omega_3^2 Q_3Q_{-3}\right) + \cdots \right] \\ &+ \frac{1}{2}\left[\left(P_{-1}P_1 + \omega_{-1}^2 Q_{-1}Q_1\right) + \left(P_{-2}P_2 + \omega_{-2}^2 Q_{-2}Q_2\right) + \left(P_{-3}P_3 + \omega_{-3}^2 Q_{-3}Q_3\right) + \cdots \right] \end{aligned} \tag{27}$$

例えば $s = 2$ の調和振動子の運動方程式は

$$\begin{aligned} &\dot{Q}_2 = \frac{\partial H}{\partial P_2} = \frac{1}{2}(P_{-2} + P_{-2}) = P_2^* \\ \therefore\quad &\ddot{Q}_2 = \dot{P}_2^* \\ &\dot{P}_{-2} = \dot{P}_2^* = -\frac{\partial H}{\partial {Q_2}^*} = -\frac{1}{2}(\omega_2^2 Q_2 + \omega_{-2}^2 Q_2) = -\omega_2^2 Q_2 \\ &\ddot{Q}_2 = -\omega_2^2 Q_2 \quad ,\ 但し\omega_s = \left| 2\Omega sin\frac{s}{2} \right| \end{aligned}$$

以上のことから，一般的運動方程式は

$$\ddot{Q}_s = -\omega_s^2 Q_s \qquad \omega_s = \left| 2\Omega sin\frac{s}{2} \right| \tag{28}$$

となる。

【註】運動方程式は (6) を (3) に直接代入しても (28) は得られる (規格化因子は省略)。

$$\begin{aligned}
\ddot{q_n} &= \sum_s e^{isn}\ddot{Q}_s \\
\Omega^2\left(q_{n+1}+q_{n-1}-2q_n\right) &= \Omega^2\sum_s Q_s e^{ins}(e^{is}+e^{-is}-2) \\
&= -2\Omega^2\sum_s Q_s e^{isn}\left(1-\frac{1}{2}\left(e^{is}+e^{-is}\right)\right) \\
&= -\Omega^2\sum_s Q_s e^{isn}\left(2sin\frac{s}{2}\right)^2
\end{aligned}$$

(3) より

$$\sum_s e^{isn}\ddot{Q}_s = -\Omega^2\sum_s Q_s e^{isn}\left(2sin\frac{s}{2}\right)^2$$

$$\therefore\quad \sum_s e^{isn}\left[\ddot{Q}_s+\Omega^2 Q_s\left(2sin\frac{s}{2}\right)^2\right] = 0$$

(28) の解は $t=0$ での初期位置 $Q_s(0)$，初期速度 $\dot{Q}_s(0)$ として

$$Q_s(t) = Q_s(0)cos\omega_s t + \frac{\dot{Q}_s(0)}{\omega_s}sin\omega_s t \tag{29}$$

と求まる[7]。この系の運動は振動数 ω_s をもつ振動の重ね合わせである。

1.2 線状連続体の振動

今まで系を原子論的な見方でみてきた。系を連続体とみなした場合の取り扱いをここで議論しよう。全体の長さ $L=aN$ を一定に保ちながら，原子間距離 $a\to 0$，個数 $N\to\infty$ の極限を取ればよい。この極限では，系の自由度は無限大となり，従って無限個の変数が必要となる。つまり，極限では原子は直線上に連続的に分布しているとみなせるから，原子の変位を表す力学変数 q_n は座標 x の位置にある原子の変位 $q(x)$ で表すことができる。添え字 n が極限操作により座標 x に置き換わる（$[q_n \longrightarrow q(x)]$）ことになる[8]。
(3) の運動方程式は連続体極限では，図 (2) を参照し，

$$\ddot{q}(x) = \Omega^2 a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}q(x) \tag{30}$$

と書けることが分かる。これはよく知られた波動方程式で，Ωa は波の速度をあらわす。

(30) を規準座標系に焼きなおしてみよう。

$$q(x) = q(x+L)$$

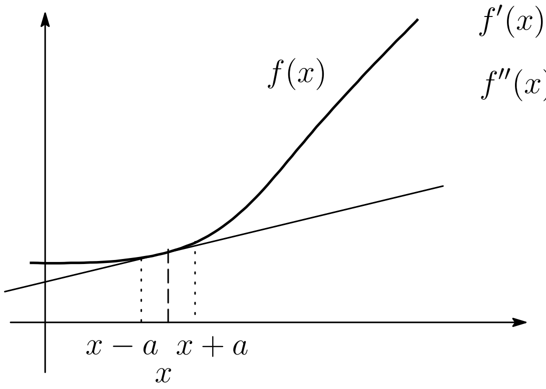
$$k = s/a = 2\pi\ell/L \qquad -\infty<\ell<\infty$$

$$q(x) = L^{-\frac{1}{2}}\sum_k e^{ikx}Q_k\,, \qquad \ddot{q(x)} = L^{-\frac{1}{2}}\sum_k e^{ikx}\ddot{Q}_k\,, \qquad \frac{\partial^2}{\partial x^2}q(x) = -L^{-\frac{1}{2}}\sum_k k^2 e^{ikx}Q_k$$

$$\sum_{k'} e^{ik'x}\ddot{Q}_{k'} = -v^2\sum_k k^2 e^{ikx}Q_k\,, \qquad \sum_{k'} e^{i(k'-k)x}\ddot{Q}_{k'} = -v^2k^2Q_k$$

[7] Mathematica で計算した。$DSolve[x''[t]+\omega^2x[t]==0, x[0]==Q[0], x'[0]==Q'[0], x[t], t]//Simplify$

[8] 有限エネルギーに対し $q(x)$ が有限にとどまるように $q(x)=q_n/a^{\frac{1}{2}}$ とおく。



$$f'(x) = \frac{1}{a}[f(x+a) - f(x)]$$
$$\begin{aligned} f''(x) &= -\frac{1}{a}[f'(x-a) - f'(x)] \\ &= -\frac{1}{a}[\frac{1}{a}[f(x) - f(x-a) - f(x+a) - f(x)]] \\ &= \frac{1}{a^2}[f(x+a) + f(x-a) - 2f(x)] \end{aligned}$$

図 2: 2 階微分の幾何学的意味

これから Q_k に対する運動方程式

$$\ddot{Q}_k = -k^2 v^2 Q_k \tag{31}$$

が得られる。したがって，振動数 ω_k は $kv(= k\Omega a)$ となる。これは (28) の極限である[9]。つまり，系の（連続体極限でない）原子構造が効いてくるのは，波長が短い場合（$k \to$ 大）だけということになる。逆に言うと，波長が長い場合は離散的な原子構造は連続体とみなすことができるということである。連続体極限で，ハミルトニアン（4）は次の極限近似

$$\sum_{n=1}^{N} \longrightarrow \frac{1}{a}\int_0^L dx \qquad \dot{q}_n^2 \longrightarrow a\dot{q}^2(x) \qquad \Omega^2(q_n - q_{n+1})^2 \longrightarrow \Omega^2 a \left(\frac{\partial q(x)}{\partial x}\right)^2 \tag{32}$$

を使うことで

$$H = \frac{1}{2}\int_0^L dx \left[\dot{q}^2(x) + v^2\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)^2\right] = \frac{1}{2}\sum_k \left(|\dot{Q}_k|^2 + k^2 v^2 |Q_k|^2\right) \tag{33}$$

となる。Q_k は k のサフィックスが付いているように可付番無限個の座標であり，このハミルトニアンからは (31) の Q_k の運動方程式が直ちに導かれる。つまり $P_k = -\partial H/\partial Q_k = -k^2 v^2 Q_k$ というようにターゲットとなる k がはっきりしていた。しかし，非可付番無限個の座標[10]$q(x)$ を相手にするとそういう分けにもいかない。そこで $q(x)$ についての運動方程式を導くには通常の力学の正準形式を一般化しておく必要がある。そのために，ディラックの δ 関数を使って次の汎関数微分を導入することにする。

$$\frac{\delta q(x)}{\delta q(x')} = \delta(x - x') \tag{34}$$

$$\frac{\delta}{\delta q(x')}\frac{\partial q(x)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\delta(x - x') \tag{35}$$

(34) は，$\partial q_n/\partial q'_n = \delta_{n,n'}$ の連続体極限であり，(35) は (34) を x について微分したものである。
正準変数 p と q で表したハミルトニアンは

$$H = \frac{1}{2}\int_0^L dx \left\{p^2(x) + v^2\left[\frac{\partial q(x)}{\partial x}\right]^2\right\} \tag{36}$$

[9] $lim_{k\to 0}\omega_k = lim_{k\to 0}|2\Omega sin\frac{k}{2}| \approx \Omega k$
[10] 座標は実数で表され，実数は数えきれないくらい無限個（不可符番無限個）ある。

となり，可付番無限個の場合の正準方程式 $\dot{p}_i = -\dfrac{\partial H}{\partial q_i}, \dot{q}_i = \dfrac{\partial H}{\partial p_i}$ は一般化されて

$$\dot{p}(x) = -\frac{\delta H}{\delta q(x)} = -v^2 \int_0^L dx' \frac{\partial q(x')}{\partial x'} \frac{\delta}{\delta q(x')} \frac{\partial q(x)}{\partial x} = -v^2 \int_0^L dx' \frac{\partial q(x')}{\partial x'} \frac{\partial}{\partial x} \delta(x - x') = v^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} q(x)$$
$$\dot{q(x)} = \frac{\delta H}{\delta p(x)} = p(x)$$

となる。これらは (30) と同等である。

ところで電磁場や素粒子の場のように，その背景となる力学系が存在しないような場の取り扱いはどうするのだろうか？　そのような場に対しては力学系の性質に基いて運動方程式を書き下すことができない。しかし，特殊相対性理論にもとづいて場の不変性を見出すことができる。
素粒子の場の運動方程式は非斉次ローレンツ群に対して不変な形となっている。このローレンツ不変性の要求は，いかなる力学系ももっていない注目すべき性質を場に与える。
任意の時空平行移動に対して理論が不変であるためには，場は連続的でなければならず，原子的構造をもつことはできない意の時空平行移動に対して理論が不変であるためには，場は連続的でなければならず，原子的構造をもつことはできない。さらに場は時空のあらゆる点で存在セナ場ならず，またそれは永遠に存続せねばならない。場を消し去ることは不可能である。

《以上で序論を終了します。大変お疲れ様でした。次回は第２章「調和振動子」を読みます。お楽しみに，それでは〜》

memo

■ $q(x) \longrightarrow Q_k$ への変換の意味
場の量子論は空間の各点ごとに演算子が定義された無限自由度の量子力学系です。各点ごとに定義された非可付番無限個の $q(x)$ が量子力学的な力学変数で、x は量子力学的な力学変数ではなく、q のラベルということになります。ところで非可付番無限個の $q(x)$ はそのままでは扱いにくいので系を長さ L の中に閉じ込め (1 次元の場合)、周期境界条件を用いて $q(x)$ をフーリエ展開し可付番無限個の Q_k の演算子の集まりに書き直します。