

初等場の量子論 (2)

KENZOU

2005年11月13日

「初等場の量子論」も第2章に入りました。第1章は古典力学の復習のようで、なんだと思われた方も多いのではないかと思います。第2章は調和振動子の議論に入ります。生成消滅演算子 a, a^\dagger が定義され、これを使った代数的方法で議論が進みます。量子論で調和振動子を扱おうと、位置 q の期待値がゼロとなり、振動するイメージがでてきません。古典的描像と決定的に違うところです。しかし、コヒーレント状態においては振動するイメージがでてきます。ただ、このコヒーレント状態の議論は結構ややこしく、手抜き(笑い)しているところもありますので留意してください。それでは参りましょうか。

2 調和振動子

2.1 Hの固有値

1次元調和振動子のハミルトニアンは

$$H = \frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 q^2) \quad (35)$$

で、座標 q と運動量 p は正準交換関係¹ $[q, p] = i$ を満たす演算子である。ハミルトニアン (35) を代数的方法で解こう。そのために次のエルミート共役な演算子 a, a^\dagger を導入する²。

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{\omega q + ip}{(2\omega)^{\frac{1}{2}}} \\ a^\dagger &= \frac{\omega q - ip}{(2\omega)^{\frac{1}{2}}} \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

または

$$\left. \begin{aligned} q &= \frac{a + a^\dagger}{(2\omega)^{\frac{1}{2}}} \\ p &= -i\omega \frac{a - a^\dagger}{(2\omega)^{\frac{1}{2}}} \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

q, p の間の交換関係 $[q, p] = i$ を a, a^\dagger で表すと

$$\begin{aligned} qp &= -\frac{i}{2}(a + a^\dagger)(a - a^\dagger) = -\frac{i}{2}(a^2 - aa^\dagger + a^\dagger a - a^\dagger a^\dagger) \\ pq &= -\frac{i}{2}(a - a^\dagger)(a + a^\dagger) = -\frac{i}{2}(a^2 + aa^\dagger - a^\dagger a + a^\dagger a^\dagger) \\ qp - pq &= i(aa^\dagger - a^\dagger a) = i[a, a^\dagger] = i \end{aligned}$$

これから

$$[a, a^\dagger] = 1 \quad (38)$$

¹本レポートでは常に $\hbar = 1$ となる自然単位系を使う。

²この演算子はボーズ演算子と呼ばれる。また、ボーズ演算子の交換関係はボーズ交換関係とも呼ばれる。

$$[a, a] = [a^\dagger, a^\dagger] = 0 \quad (39)$$

ハミルトニアン (35) を a, a^\dagger で表すと

$$p^2 = -\frac{1}{2}\omega(a - a^\dagger)(a - a^\dagger) = -\frac{1}{2}\omega(a^2 - aa^\dagger - a^\dagger a + a^\dagger a^\dagger)$$

$$\omega^2 q^2 = \frac{1}{2}\omega(a + a^\dagger)(a + a^\dagger) = \frac{1}{2}\omega(a^2 + aa^\dagger + a^\dagger a + a^\dagger a^\dagger)$$

であるから

$$H = \omega \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) \quad (40)$$

となる。

<おまけ-1 >

ハミルトニアン (35) を因数分解すると^a

$$H = \frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 q^2) = \frac{1}{2}\omega^2 \left[\left(q + \frac{i}{\omega} p \right) \left(q - \frac{i}{\omega} p \right) - \frac{1}{\omega} [q, p] \right]$$

$$= \omega \left(\frac{\omega q + ip}{(2\omega)^{\frac{1}{2}}} \right) \left(\frac{\omega q - ip}{(2\omega)^{\frac{1}{2}}} \right) + \frac{1}{2}\omega$$

$$= \omega \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right)$$

<おまけ-2 >

$$[a^n, a^\dagger] = na^{n-1}, \quad [a, (a^\dagger)^n] = n(a^\dagger)^{n-1}$$

$$[a, a^\dagger] = aa^\dagger - a^\dagger a = 1 \quad a^2 a^\dagger - aa^\dagger a = a \quad aa^\dagger a - a^\dagger a^2 = a \quad a^2 a^\dagger - a^\dagger a^2 = 2a$$

同様にして

$$aa^\dagger a^2 - a^\dagger a^3 = a^2 \quad a^3 a^\dagger - aa^\dagger a^2 = 2a^2 \quad a^3 a^\dagger - a^\dagger a^3 = 3a^2$$

以下続いて逐次 (n-1) 回同じ手続きを繰り返すと

$$aa^\dagger a^{n-1} - a^\dagger a^n = a^{n-1} \quad a^n a^\dagger - aa^\dagger a^{n-1} = (n-1)a^{n-1} \quad a^n a^\dagger - a^\dagger a^n = [a^n, a^\dagger] = na^{n-1}$$

^aハミルトニアンの最後の項の交換関係「 q, p 」の存在が後でわかるがゼロ点振動に関係してくる。

さて、ここで上で導入した a, a^\dagger とはなにものなのか？ (38) と (40) より

$$[H, a^\dagger] = \omega a^\dagger \quad (41)$$

$$[a, H] = \omega a \quad (42)$$

$$[H, a^\dagger] = \omega \left[(a^\dagger a + 1/2)a^\dagger - a^\dagger(a^\dagger a + 1/2) \right] = \omega(a^\dagger aa^\dagger - a^\dagger a^\dagger a) = \omega a^\dagger(1 + a^\dagger a) - a^\dagger a^\dagger a = \omega a^\dagger$$

$$[a, H] = \omega \left[aa^\dagger a - a^\dagger aa \right] = \omega(a(aa^\dagger - 1) - a^\dagger aa) = \omega a$$

固有値 E に属する H の固有関数を ψ_E とすると $H\psi_E = E\psi_E$, また , (42) より $Ha = aH - \omega a$ であるので、これに左から ψ_E をかけると

$$Ha\psi_E = (E - \omega)a\psi_E \quad (43)$$

が得られる。これは、 $a\psi_E$ は固有値 $(E - \omega)$ に属する H の固有関数で、固有値を ω だけ減少させることを意味している。まったく同様にして

$$Ha^\dagger\psi_E = \left(\frac{E}{2} + \omega \right) a^\dagger\psi_E \quad (44)$$

より, $a^\dagger \psi_E$ は固有値 $(E + \omega)$ に属する H の固有関数で, 固有値を ω だけ増加させることが分かる。これを繰り返していくと

$$\begin{aligned} Ha^2 \psi_E &= (E - 2\omega)a^2 \psi_E \\ Ha^3 \psi_E &= (E - 3\omega)a^3 \psi_E \\ &\vdots \\ H(a^\dagger)^2 \psi_E &= (E + 2\omega)(a^\dagger)^2 \psi_E \\ H(a^\dagger)^3 \psi_E &= (E + 3\omega)(a^\dagger)^3 \psi_E \\ &\vdots \end{aligned}$$

が得られる。このことから, H には定間隔 ω で並んだ一連の固有値があることがわかる。しかし, この固有値の列はどこかで止まらなければならない。というのは, $a^\dagger a$ が正定値符号³であるから, H は負の固有値をもち得ないという理由による。このあたりの話しは, テキストでは結構すっ飛ばして(笑)議論をしているように感じるので, 以下に少し詳しく議論していくことにする。

2.2 Hの固有状態の性質

エルミート演算子 $N \equiv a^\dagger a$ を導入⁴すると, ハミルトニアン (40) は

$$H = \omega \left(N + \frac{1}{2} \right) \quad (45)$$

と書かれる。 N の固有値を n , それに属する固有ベクトルを $|n\rangle$ で表すと

$$N |n\rangle = n |n\rangle \quad (46)$$

ここで, 固有ベクトル $|n\rangle$ は規格直行化されているとする。つまり

$$\langle n|m\rangle = \delta_{n,m} \quad (47)$$

固有値 n は 0 かまたは正の整数となることを次に示す。交換関係 (38) より

$$[N, a] = -a \quad (48)$$

右から $|n\rangle$ をかけると

$$\left. \begin{aligned} [N, a] |n\rangle &= Na |n\rangle - aN |n\rangle = Na |n\rangle - an |n\rangle = -a |n\rangle \\ Na |n\rangle &= (n - 1)a |n\rangle \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

これは $a |n\rangle$ は固有値 $(n - 1)$ の固有ベクトルであることを示している。この性質から a を消滅演算子と呼んでいる。同じことを繰り返すと

$$\left. \begin{aligned} Na^2 |n\rangle &= (n - 2)a^2 |n\rangle \\ Na^3 |n\rangle &= (n - 3)a^3 |n\rangle \\ &\vdots \\ Na^m |n\rangle &= (n - m)a^m |n\rangle \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

³ a^\dagger と a は互いにエルミート共役であるから, それらの積の固有値は正の値をとる。

⁴ $(a^\dagger b)^\dagger = b^\dagger (a^\dagger)^\dagger$ より $(a^\dagger a)^\dagger = a^\dagger (a^\dagger)^\dagger = a^\dagger a$ となるから $N^\dagger = N$ で N はエルミート演算子である。

が得られる。つまり, $a^m |n\rangle$ は固有値 $(n - m)$ の固有状態ということになる。正值計量の条件⁵より

$$\langle n | a^\dagger a | n \rangle = \langle n | N | n \rangle \geq 0 \quad (51)$$

また, (46) を使うと

$$\langle n | a^\dagger a | n \rangle = \langle n | N | n \rangle = n \langle n | n \rangle \quad (52)$$

これから, 一般に $|n\rangle \neq 0$ ならば, N の固有値 n は $n \geq 0$ であることがわかる。(50) を眺めると, 十分大きな m に対して $(n - m) < 0$ となりうる m の値の存在が考えられるが, これはすぐ上で述べたように N の固有値は 0 が正である, という事実と矛盾する。従って, 背理法⁶から, ある整数 $\ell (\ell \geq 0)$ に対して

$$a^m |n\rangle \begin{cases} \neq 0 & (m \leq \ell) \\ = 0 & (m \geq \ell + 1) \end{cases} \quad (53)$$

でなくてはならない。このとき, $a^\ell \neq 0$ に対し,

$$\left. \begin{aligned} Na^\ell |n\rangle &= (n - \ell)a^\ell |n\rangle = 0 \\ \text{なので, } n &= \ell \text{ となる} \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

いま,

$$\underbrace{a \cdots a}_{n \text{ 個}} |n\rangle \equiv |0\rangle \quad (55)$$

とすると⁷, (54) により,

$$a |0\rangle = 0 \quad (56)$$

したがって,

$$N |0\rangle = 0 |0\rangle \quad (57)$$

交換関係 (38) を使うと

$$Na^\dagger |0\rangle = a^\dagger (a^\dagger a + 1) |0\rangle = a^\dagger |0\rangle \quad (58)$$

が得られる。これは, $a^\dagger |0\rangle$ に属する N の固有値は 1 であることを示している。〈おまけ - 2〉の交換関係を利用すると

$$N(a^\dagger)^n |0\rangle = a^\dagger a (a^\dagger)^n |0\rangle = (n(a^\dagger)^n + (a^\dagger)^{n+1} a) |0\rangle = n(a^\dagger)^n |0\rangle \quad (59)$$

が導かれる。つまり, $(a^\dagger)^n |0\rangle$ は固有値 n に属する固有ベクトルである。

ところで, $(a^\dagger)^n |0\rangle$ は, 固有値 n に属する固有ベクトルであるが, うまく規格化されていない。例えば $n = 1$ の場合, $a^\dagger |0\rangle$ の内積をとると

$$\langle 0 | a a^\dagger | 0 \rangle = \langle 0 | a^\dagger a + 1 | 0 \rangle = \langle 0 | 0 \rangle \quad (60)$$

となるから

$$\langle 0 | 0 \rangle = 1 \quad (61)$$

⁵ $a |n\rangle$ のエルミート共役は $\langle n | a^\dagger$ 。内積 $\langle n | a^\dagger a | n \rangle \geq 0$, 等号は $|n\rangle = 0$ に限る。

⁶ ある事柄 P を証明するために, P の否定 \bar{P} を仮定すると矛盾が起きることを利用した証明法。

⁷ n 個の粒子系から n 個粒子を差し引くと粒子の数が 0 の系になるという感じで理解すればよいだろう。

と規格化しておけばよい。しかし $n = 2$ の場合には

$$\left. \begin{aligned} \langle 0 | a a a^\dagger a^\dagger | 0 \rangle &= \langle 0 | a (a^\dagger a + 1) a^\dagger | 0 \rangle = \langle 0 | a a^\dagger (a^\dagger a + 1) | 0 \rangle + \langle 0 | a a^\dagger | 0 \rangle \\ &= 2 \langle 0 | a a^\dagger | 0 \rangle = 2 \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

一般の n では、

$$\left. \begin{aligned} \langle 0 | a^n (a^\dagger)^n | 0 \rangle &= \langle 0 | a^{n-1} a (a^\dagger)^n | 0 \rangle = n \langle 0 | a^{n-1} (a^\dagger)^{n-1} | 0 \rangle = \langle 0 | a^{n-2} a (a^\dagger)^{n-1} | 0 \rangle \\ &= n(n-1) \langle 0 | a^{n-2} (a^\dagger)^{n-2} | 0 \rangle = n(n-1) \langle 0 | a^{n-2} a (a^\dagger)^{n-2} | 0 \rangle \\ &\quad \vdots \\ &= n(n-1)(n-2) \cdots 1 \langle 0 | 0 \rangle = n! \langle 0 | 0 \rangle = n! \end{aligned} \right\} \quad (63)$$

となる。したがって、規格化された固有ベクトル系をつくるには

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (a^\dagger)^n |0\rangle \quad (64)$$

と定義しておけばよい。この固有ベクトルは (65) より規格化直交ベクトル系をなしている⁸。

$$\left. \begin{aligned} m \geq n \text{ の場合} \\ \langle m | n \rangle &= \langle 0 | a^m (a^\dagger)^n | 0 \rangle = \frac{1}{n!} n! \langle 0 | a^{m-n} | 0 \rangle = \delta_{mn} \\ m < n \text{ の場合} \\ \langle m | n \rangle &= \langle 0 | a^m (a^\dagger)^n | 0 \rangle = \frac{1}{n!} \frac{n!}{(n-m)!} (a^\dagger)^{n-m} |0\rangle = \delta_{mn} \end{aligned} \right\} \quad (65)$$

<テキスト p20 の補足>

$\psi_n = (n!)^{-\frac{1}{2}} a^\dagger n \psi_0$ で $(n!)^{-\frac{1}{2}}$ が正しい規格化因子となっていることを帰納法で示す。

$$H \psi_{n-1} = E_{n-1} \psi_{n-1} = \left((n-1)\omega + \frac{1}{2}\omega \right) \psi_{n-1} = \omega \left(n - \frac{1}{2} \right) \psi_{n-1}$$

$$\psi_n = (1/\sqrt{n!}) (a^\dagger)^n \psi_0 = (1/\sqrt{n!}) a^\dagger (1/\sqrt{(n-1)!}) (a^\dagger)^{n-1} \psi_0 = (1/\sqrt{n!}) a^\dagger \psi_{n-1}$$

$$\psi_n^* = (1/\sqrt{n!}) \psi_0^* a^n = (1/\sqrt{n!}) a^\dagger (1/\sqrt{(n-1)!}) \psi_0^* a^{n-1} a = (1/\sqrt{n!}) \psi_{n-1}^* a$$

$$\int \psi_n^* \psi_n = \int \psi_{n-1}^* \frac{a a^\dagger}{n} \psi_{n-1} = \frac{1}{n} \int \psi_{n-1}^* \left(\frac{H}{\omega} + \frac{1}{2} \right) \psi_{n-1} = \int \psi_{n-1}^* \psi_{n-1} = \cdots = \int \psi_0^* \psi_0 = 1$$

⁸おまけ-2 の交換関係と (56) を使ってコツコツ計算すれば確かめられる。

Memo

(49) より, $a|n\rangle$ は固有値 $n-1$ に属する N の固有ケットであるから, 定数倍を別にするとこれは $|n-1\rangle$ と同じ^a.

$$a|n\rangle = c_n|n-1\rangle$$

定数 c_n は $|n\rangle, |n-1\rangle$ の規格化条件 ($\langle n|n\rangle = \langle n-1|n-1\rangle = 1$) より決めることができる。定式の両辺のノルムをとると

$$\langle n|a^\dagger a|n\rangle = n\langle n|n\rangle = n = |c_n|^2\langle n-1|n-1\rangle = |c_n|^2 \quad (66)$$

c_n を正の実数にとると $c_n = \sqrt{n}$ 。したがって

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle \quad (67)$$

同様にして

$$\left. \begin{aligned} a^\dagger|n\rangle &= c_n|n+1\rangle & \langle n|aa^\dagger|n\rangle &= |c_n|^2 & \langle n|1+a^\dagger a|n\rangle &= |c_n|^2 \\ 1+n &= |c_n|^2 & c_n &= \sqrt{n+1} \end{aligned} \right\}$$

これから

$$a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle \quad (68)$$

$n\rangle$ に a を次々とかけていくと

$$\left. \begin{aligned} a^2|n\rangle &= \sqrt{na}|n-1\rangle = \sqrt{n(n-1)}|n-2\rangle \\ a^3|n\rangle &= \sqrt{n(n-1)a}|n-2\rangle = \sqrt{n(n-1)(n-2)}|n-3\rangle \\ &\vdots \end{aligned} \right\} \quad (69)$$

$${}^aNa|n-1\rangle = (n-1)a|n\rangle \quad Na|n\rangle = (n-1)a|n\rangle \quad a|n\rangle = c_n|n-1\rangle$$

以上の話をまとめると, 交換関係 (38) を満たす演算子 a と a^\dagger から作られる演算子 $N = aa^\dagger$ は固有値 $n = 0, 1, 2, 3, \dots, \infty$ をもち, $n=0$ に属する固有ベクトル $|0\rangle$ を (64) のように規格化しておくこと, 固有値 n に属する固有ベクトルは (64) で与えられ, 規格化直交条件 (65) を満たす。

ハミルトニアン (45) の固有値を E_n , 固有ベクトルを $|n\rangle$ とすると

$$\left. \begin{aligned} H|n\rangle &= \omega \left(N + \frac{1}{2} \right) |n\rangle = \omega \left(n + \frac{1}{2} \right) |n\rangle = E_n |n\rangle \\ E_n &= \omega \left(n + \frac{1}{2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (70)$$

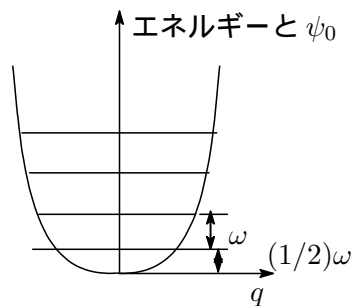


図 1: 調和振動子のエネルギー準位

固有ベクトル $|n\rangle$ の空間座標 q による表式を求めよう。この表示では $p = -i\partial/\partial q$ であるから

$$a|0\rangle = \left(\frac{1}{2\omega} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\omega q + \frac{\partial}{\partial q} \right) |0\rangle = 0 \quad (71)$$

となり，基底状態の規格化された固有ベクトルは微分方程式 $(\omega q + \frac{\partial}{\partial q}) |0\rangle = 0$ の解として求められ⁹，

$$|0\rangle = (\omega/\pi)^{\frac{1}{4}} e^{-\omega q^2/2} \quad (72)$$

となる。これはいわゆるガウス分布関数で，基底状態の波動関数の広がり幅は $\omega^{-1/2}$ 程度であることがわかる。

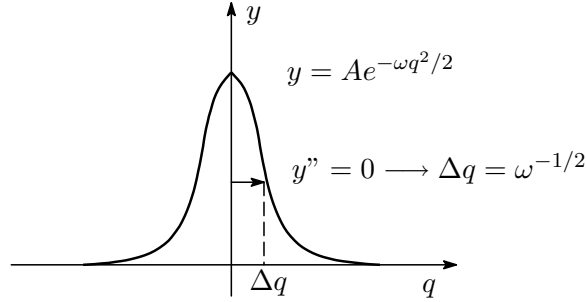


図 2: ガウス分布関数と広がり幅

励起状態 $|n\rangle$ は微分演算子 $a^\dagger = (\omega q - \partial/\partial q)(2\omega)^{-\frac{1}{2}}$ を適用して求められる。

$$|1\rangle = a^\dagger |0\rangle = \left(\frac{1}{2\omega}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\omega q - \frac{\partial}{\partial q}\right) |0\rangle = 0 \quad (73)$$

$$|2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2!}} (a^\dagger)^2 |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2!}} \left(\frac{1}{2\omega}\right) \left(\omega q - \frac{\partial}{\partial q}\right)^2 |0\rangle \quad (74)$$

$$\vdots \quad (75)$$

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (a^\dagger)^n |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} \left(\frac{1}{2\omega}\right)^{\frac{n}{2}} \left(\omega q - \frac{\partial}{\partial q}\right)^n |0\rangle \quad (76)$$

励起状態の波動関数

$x \equiv \sqrt{\omega} q$ とおくと $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{\omega}} \frac{\partial}{\partial q}$ となるから

$$a^\dagger = \frac{\omega q - \frac{\partial}{\partial q}}{\sqrt{2\omega}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(x - \frac{\partial}{\partial x}\right) \quad (77)$$

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (a^\dagger)^n |0\rangle = (-1)^n C_n \left(\frac{\partial}{\partial x} - x\right)^n e^{-x^2/2} \quad C_n = \sqrt{\frac{\omega^{1/2}}{\pi^{1/2} n! 2^n}}$$

ところで任意の $f(x)$ に対して

$$\begin{aligned} e^{x^2/2} \frac{d}{dx} e^{-x^2/2} f(x) &= \left(\frac{d}{dx} - x\right) f(x) \\ e^{x^2/2} \frac{d^2}{dx^2} e^{-x^2/2} f(x) &= e^{x^2/2} \frac{d}{dx} e^{-x^2/2} e^{x^2/2} \frac{d}{dx} e^{-x^2/2} f(x) \\ &= e^{x^2/2} \frac{d}{dx} e^{-x^2/2} \left(\frac{d}{dx} - x\right) f(x) = \left(\frac{d}{dx} - x\right)^2 f(x) \end{aligned} \quad (78)$$

⁹ $sol = y[q]/.DSolve[y'[q] + \omega q y[q] == 0, y[q], q][[1]] \quad Solve[Assuming[\omega > 0, \int_{-\infty}^{\infty} sol^2 dq] == 1, C[1]]$

一般に

$$\left(\frac{d}{dx} - x\right)^n f(x) = e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2/2} f(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (79)$$

この関係式を使うと (77) は

$$|n\rangle = C_n e^{-x^2/2} H_n(x), \quad \text{ただし} \quad H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \quad (80)$$

H_n はエルミート多項式と呼ばれ、

$$H_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \frac{n!}{k!(n-2k)!} (2x)^{n-2k} \quad (81)$$

と表される。ここで $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ はガウス記号で、 $\frac{n}{2}$ を超えない最大の整数を表す。エルミート多項式 $H_n(x)$ の具体的な値を *Mathematica* で求めてみると

```
In[1] := Table[HermiteH[n,x],{n,0,5}]/TableForm
Out[1] :=1
        =2x
        =-2+4x2
        =-12x+8x3
        =12-48x2+16x4
        =120x-160x3+32x5
```

さて、座標 q の分散の期待値は

$$\langle (\Delta q)^2 \rangle = \langle (q - \langle q \rangle)^2 \rangle = \langle q^2 - 2q\langle q \rangle + \langle q \rangle^2 \rangle = \langle q^2 \rangle - 2\langle q \rangle \langle q \rangle + \langle q \rangle^2 = \langle q^2 \rangle - \langle q \rangle^2 \quad (82)$$

であるから、基底状態における座標 q の不定さを

$$(\Delta q)^2 = \langle 0 | \langle q^2 \rangle - \langle q \rangle^2 | 0 \rangle = \langle 0 | \langle q^2 \rangle | 0 \rangle - \langle 0 | \langle q \rangle^2 | 0 \rangle \quad (83)$$

で定義できる。ここで、 $\langle q \rangle$ は q の平均値であるが、それは次式より 0 となることが容易に示される¹⁰。

$$\langle q \rangle = \langle 0 | q | 0 \rangle = \frac{1}{(2\omega)^{1/2}} \langle 0 | a + a^\dagger | 0 \rangle = \frac{1}{(2\omega)^{1/2}} \langle 0 | a^\dagger | 0 \rangle = \frac{1}{(2\omega)^{1/2}} \langle 0 | 1 \rangle = 0 \quad (84)$$

(83) は、したがって

$$(\Delta q)^2 = \langle 0 | \langle q^2 \rangle | 0 \rangle = \frac{1}{2\omega} \langle 0 | (a + a^\dagger)(a + a^\dagger) | 0 \rangle = \frac{1}{2\omega} \langle 0 | aa^\dagger | 0 \rangle = \frac{1}{2\omega} \quad (85)$$

ここで (60) を使った。同様にして運動量 p の不定さを求めると

$$\langle p \rangle = \langle 0 | p | 0 \rangle = -i\omega \frac{1}{(2\omega)^{1/2}} \langle 0 | a - a^\dagger | 0 \rangle = i\omega \frac{1}{(2\omega)^{1/2}} \langle 0 | a^\dagger | 0 \rangle = \frac{1}{(2\omega)^{1/2}} \langle 0 | 1 \rangle = 0 \quad (86)$$

¹⁰古典力学での調和振動子では座標 q が行ったり来たり振動しているが、量子力学では座標 q の期待値が 0 ということから振動している古典イメージとは大きくかけ離れている!! 古典的調和振動子に対応する量子状態はコヒーレント状態と呼ばれる。後ほど議論するのでお楽しみに。

$$(\Delta p)^2 = \langle 0 | \langle p^2 | 0 \rangle = -\omega^2 \frac{1}{2\omega} \langle 0 | (a - a^\dagger)(a - a^\dagger) | 0 \rangle = \omega^2 \frac{1}{2\omega} \langle 0 | aa^\dagger | 0 \rangle = \frac{\omega}{2} \quad (87)$$

となる。これから、

$$\langle 0 | (\Delta q)^2 | 0 \rangle \langle 0 | (\Delta p)^2 | 0 \rangle = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \quad (88)$$

となり、よく知られている不確定性原理

$$\langle (\Delta q)^2 \rangle^{1/2} \langle (\Delta p)^2 \rangle^{1/2} \geq 1/2 \quad (89)$$

が示される。つまり、基底状態では、最低のエネルギー状態では Δq は (85) で与えられ、古典論でのように零でなく $\omega/2$ であることがわかる。これがいわゆるゼロ点振動である¹¹。液体 He が常圧のもとでは固体化しないのはこのゼロ点振動の効果とされている。

< テキスト p22 >

エネルギーの平均値 $\frac{1}{2}[(\Delta p)^2 + \omega^2(\Delta q)^2]$ の最小値を $\Delta p \Delta q = \frac{1}{2}$ の制約の下に求めてみよう。ラグランジュの未定数法を使う。 $\Delta q = x$ $\Delta p = y$ とおく。

$$h = \frac{1}{2}[\omega^2 x^2 + y^2] + \lambda xy, \quad \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial y} = 0 \quad \text{から} \quad \omega^2 x + \lambda y = 0, \quad y + \lambda x = 0$$

これを $xy = \frac{1}{2}$ の条件の下に解くと $x = (2\omega)^{-\frac{1}{2}}$ の時に最小エネルギーは $\frac{\omega}{2}$ となる。

2.3 運動の時間的变化

2.3.1 シュレーディンガー表示

系の波動関数がユニタリー変換を用いて形式的に

$$\psi(r, t) = U(t)\psi(r) \quad (90)$$

と変数分離の形で表される力学系の状態表示をシュレーディンガー表示という。ここで $\psi(t)$ は時刻 $t = 0$ での任意の座標系の位置 r の関数であり、 $U(r)$ は時間に連続なユニタリー演算子¹²である。この系の状態の変化を記述する方程式

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi(r, t) = H\psi(r, t) \quad (91)$$

をシュレーディンガーの方程式という。ハミルトニアン H が時間 t をあらわに含まない場合は、初期条件として $t = 0$; $\psi(r, 0) = \psi(r)$ として (91) を解くと

$$\psi(r, t) = e^{-iHt}\psi(r) \quad (92)$$

を得る。 $U = e^{-iHt}$, その共役演算子を $U^\dagger = e^{iH^\dagger t}$ とすると、

$$U(t)U^\dagger = \exp(-iHt)\exp(iH^\dagger t) = 1 \quad (93)$$

¹¹〈おまけ - 1〉でハミルトニアンを因数分解したとき、 $[q, p]$ の交換関係がでてきた。これがゼロ点振動の素。

¹²線形演算子 U に共役な演算子 U^\dagger が U の逆演算子 U^{-1} に等しいとき、演算子 U はユニタリーであるという。 $UU^\dagger = U^\dagger U = 1$ また、 A がエルミート演算子であるとき、 $A' = U^{-1}AU$ もまたエルミート演算子であり、演算子 A を A' に移すと解釈できる。この操作をユニタリー変換という。

ここでハミルトニアン H はエルミート演算子であるから $H = H^\dagger$ を使った。まったく同様にして

$$U^\dagger(t)U(t) = 1 \quad (94)$$

が得られるから, U はユニタリー演算子である。(92) は, 系の状態の時間的变化はユニタリー変換で表されることを示している。

2.3.2 ハイゼンベルグ表示

ある力学系に対応する演算子が時間に依存し, その系の状態関数 ψ が時間に独立であるとき, すなわち

$$\frac{d\psi}{dt} = 0 \quad (95)$$

であるときの形式をハイゼンベルグ表示という。ハイゼンベルグ表示の状態関数 ψ はシュレーディンガー表示から次のようにして求めることができる。

$$\left. \begin{aligned} \psi(r, t) = U(t)\psi(r) &\longrightarrow \psi_H(r) = U^{-1}\psi_s(r, t) \\ \psi_H(r) = U^{-1}\psi_s(r, t) &= e^{iHt}\psi_s(r, t) = e^{iHt}\psi_s(r)e^{-iHt} \end{aligned} \right\} \quad (96)$$

ここで添え字の $_H$ はハイゼンベルグ, $_s$ はシュレーディンガー表示を意味する。特に $U(t)$ は時間 t が 0 のとき

$$U(0) = U^{-1}(0) = 1 \quad (97)$$

となる単位演算子であるから, (96) より, $t = 0$ のとき, 両者の表示での状態関数は一致する。

ハイゼンベルグ演算子 $A_H(t) = U^\dagger(t)A_sU(t)$ を時間微分すると

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial A_H}{\partial t} &= \frac{\partial U^\dagger(t)}{\partial t}A_sU(t) + U^\dagger(t)A_s\frac{\partial U(t)}{\partial t} \\ &= iHe^{iHt}A_s e^{-iHt} + e^{iHt}A_s\left(e^{-iHt}(-iH)\right) \\ &= iHA_H(t) - A_H(t)H = i[H, A_H(t)] \end{aligned} \right\} \quad (98)$$

を得る。(98) はハイゼンベルグの運動方程式である。今後の議論は, 古典論との対応のつきやすいハイゼンベルグ表示をとることとする。また, 記号 ψ を場の演算子のためにとっておくこととして, これからはディラックのブラ $| \rangle$ とケット $\langle |$ を使うこととする。

2.3.3 ブラケット算法

ブラケット算法¹³を簡単に復習しておく。

- $|n\rangle = \int dq'|q'\rangle\langle q'|n\rangle$
任意の状態 $|n\rangle$ は固有ケット $|q'\rangle$ で展開できる。 $q|q'\rangle = q'|q'\rangle$ $\langle q''|q'\rangle = \delta(x'' - x')$
- $\psi_n(q') = \langle q'|n\rangle$
 $\langle q'|n\rangle$ は普通状態 $|n\rangle$ の波動関数と呼ばれ, $\psi_n(q')$ と表す。波動関数 $\psi_n(q')$ は状態ケット $|n\rangle$ の位置表示 (基底として位置ケットを取った時の $|n\rangle$ の q' 成分) である。

¹³Coffee Break のブラケット算法を参照。

- $\phi_n(p') = \langle p'|n \rangle = \int dq' \langle p'|q' \rangle \langle q'|n \rangle = \int dq' \langle p'|q' \rangle \psi_n(q')$
 $\phi_n(p')$ を運動量空間の波動関数と呼ぶ。 $\langle p'|n \rangle$ は、状態 $|n\rangle$ において粒子が運動量 p' をもつ確率振幅である。この式に $\langle p'|q' \rangle = (2\pi)^{-1/2} e^{-ip'q}$ を代入¹⁴すれば運動量空間における波動関数のよく知られた表式が得られる。
- $\mathcal{O}|n\rangle = \alpha|n\rangle \longrightarrow \langle q'|\mathcal{O}|n\rangle = \int dq'' \langle q'|\mathcal{O}|q''\rangle \langle q''|n\rangle = \alpha\langle q'|n\rangle$
- $\mathcal{O}|n\rangle = \alpha|n\rangle \longrightarrow \langle q'|\mathcal{O}|n\rangle = \int dq'' \langle q'|\mathcal{O}|q''\rangle \psi_n(q'') = \alpha\psi_n(q')$
- 一般の行列要素 $\langle m|\mathcal{O}|n\rangle = \int dq'dq'' \psi_m^*(q) \langle q'|\mathcal{O}|q''\rangle \psi_n(q'')$
- \mathcal{O} が対角行列となる表示を選べば $\langle q'|\mathcal{O}|q''\rangle = \delta(q' - q'')\mathcal{O}(q'')$
- $q|q'\rangle = q'|q'\rangle \longrightarrow \langle p'|q|q'\rangle = \int \langle p'|q|p''\rangle \langle p''|q'\rangle dp'' = q'\langle p'|q'\rangle$
- 運動量空間での q の対角表示は $\langle p'|q|p''\rangle = i\frac{\partial}{\partial p'}\delta(p' - p'')$
- $\langle p'|q|q'\rangle = i\int \frac{\partial}{\partial p'}\delta(p' - p'')\langle p''|q'\rangle dp'' = i\frac{\partial}{\partial p'}\int \delta(p' - p'')\langle p''|q'\rangle dp'' = i\frac{\partial}{\partial p'}\langle p'|q'\rangle = q'\langle p'|q'\rangle$
 これから $\langle p'|q'\rangle \propto e^{-ip'q'}$ が導かれる。

2.3.4 運動の時間的变化

(42) とハイゼンベルグの運動方程式 (98) より、

$$\left. \begin{aligned} \dot{a}(t) &= -i\omega a(t) \\ \dot{a}^\dagger &= i\omega a^\dagger(t) \end{aligned} \right\} \quad (99)$$

これはただちに積分できて

$$\left. \begin{aligned} a(t) &= e^{-i\omega t} a(0) \\ a^\dagger(t) &= e^{i\omega t} a(0) \end{aligned} \right\} \quad (100)$$

が得られる。(37) より

$$\left. \begin{aligned} q(t) &= \frac{a(0)e^{-i\omega t} + a^\dagger(0)e^{i\omega t}}{(2\omega)^{\frac{1}{2}}} \\ p(t) &= -\frac{i\omega[a(0)e^{-i\omega t} - a^\dagger(0)e^{i\omega t}]}{(2\omega)^{\frac{1}{2}}} \end{aligned} \right\} \quad (101)$$

また (37) は、

$$\left. \begin{aligned} \omega q(t) + ip(t) &= \omega q(0)e^{-i\omega t} + ip(0)e^{-i\omega t} \\ \omega q(t) - ip(t) &= \omega q(0)e^{i\omega t} - ip(0)e^{i\omega t} \end{aligned} \right\} \quad (102)$$

と書き直せるから

$$\left. \begin{aligned} q(t) &= q(0)\cos\omega t + \frac{p(0)}{\omega}\sin\omega t \\ p(t) &= -\omega q(0)\sin\omega t + p(0)\cos\omega t \end{aligned} \right\} \quad (103)$$

を得る。ハイゼンベルグ描像では演算子 q, p は古典論の場合と同じように”振動している”。しかし、(84) で見たように演算子の期待値は 0 であるから古典的振動子と似た振動を観測できるというわけで

¹⁴ $\langle q'|p|n\rangle = -i\frac{\partial}{\partial q'}\langle q'|n\rangle$ 一方 $\langle q'|p|p'\rangle = p'\langle q'|p'\rangle$ $-i\frac{\partial}{\partial q'}\langle q'|n\rangle = p'\langle q'|p'\rangle$ $\langle q'|p'\rangle = Ne^{ip'q'}$

はないことに注意しよう。

<おまけ-3 >

ベーカー・ハウズドルフ (*Baker – Hausdorff*) の公式 :

$$e^{iA\lambda} B e^{-iA\lambda} = A + i\lambda[A, B] + \left(\frac{i^2\lambda^2}{2!}\right) [A, [A, B]] + \dots + \left(\frac{i^n\lambda^n}{n!}\right) [A, [A, \dots [A, B] \dots]] + \dots$$

ここで A はエルミート演算子で λ は実数パラメータである。

【註】(103) は直接ハイゼンベルグの方程式を解いて得たが、ここで<おまけ-3 >の公式を使って導出してみよう。ハイゼンベルグ表示で位置演算子は $q(t) = e^{iHt} q(0) e^{-iHt}$ となるから

$$\left. \begin{aligned} e^{iHt} q(0) e^{-iHt} &= q(0) + (it)[H, q(0)] + \left(\frac{i^2 t^2}{2!}\right) [H, [H, q(0)]] + \dots \\ &= q(0) + p(0)t - \left(\frac{1}{2!}\right) t^2 \omega^2 q(0) - \frac{1}{3!} t^3 \omega^2 p(0) + \dots \\ &= q(0) \cos \omega t + \frac{p(0)}{\omega} \sin \omega t \end{aligned} \right\} \quad (104)$$

右辺の各項の展開は $[H, q(0)] = -ip(0)$, $[H, p(0)] = i\omega^2 q(0)$ を繰り返し用いた。

2.3.5 コヒーレント状態

系のある状態 $| \rangle$ における時間発展を調べよう。このため、いくつかの固有状態 $|n\rangle$ の重ね合わせを考える。この中で特に有用な例として、非エルミート演算子 a の固有状態として定義される波束状態 $|d\rangle$ を考えよう¹⁵。

$$a(0)|d\rangle = (\omega/2)^{\frac{1}{2}} d|d\rangle \quad (105)$$

$$\left. \left(\frac{1}{2\omega}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\omega q + \frac{\partial}{\partial q}\right) |d\rangle = \left(\frac{\omega}{2}\right)^{\frac{1}{2}} d|d\rangle \right\}$$

$$\text{この微分方程式を解いて } |d\rangle = C e^{-\frac{\omega}{2}(q'-d)^2}$$

$$\text{規格化定数 } C \text{ は } \langle d|d\rangle = 1 \text{ より } C = \left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \text{ と求まる。}$$

これから求める波動関数は

$$\psi_d(q') = \langle q'|d\rangle = (\omega/\pi)^{\frac{1}{4}} e^{-(q'-d)^2 \omega/2} \quad (106)$$

となり (ガウス型波束と呼ばれる), これは基底状態と同じ幅をもつガウス分布関数であるが, ピークの中心点を示す q 座標は原点から距離 d のところにシフトしている。この状態はもちろん H の固有状態ではなく, 状態 $|n\rangle$ がこの波束に含まれる割合は¹⁶

$$|\langle n|d\rangle|^2 = \frac{1}{n!} |\langle 0|a^n|d\rangle|^2 = \left(\frac{\omega d^2}{2}\right)^n \frac{1}{n!} |\langle 0|d\rangle|^2 \quad (107)$$

¹⁵これはいわゆるコヒーレント状態こと。粒子数の確定した状態では波の位相は全く不確定となるが, 粒子数が巨視的な数の場合のときは, 巨視的な意味で粒子数と位相とが同時に確定した状態を作ることができる。これをコヒーレント状態と呼ぶ。 a はエルミートでないから固有値 λ は複素数である。

¹⁶(64) より $\langle n| = \frac{1}{\sqrt{n!}} \langle 0|a^n$

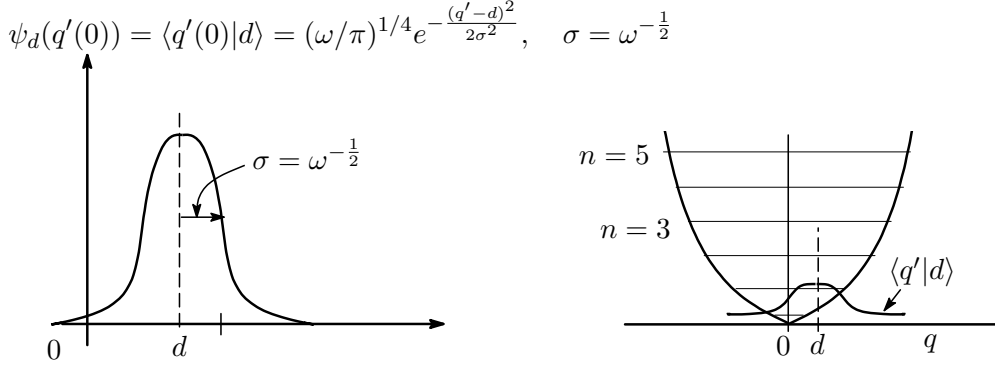


図 3: コヒーレント状態

で与えられる。状態 $|n\rangle$ の完全性の条件を使って¹⁷

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\langle n|d\rangle|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{\omega d^2}{2}\right)^n |\langle 0|d\rangle|^2 = e^{d^2\omega/2} |\langle 0|d\rangle|^2 = 1 \longrightarrow |\langle 0|d\rangle|^2 = e^{-d^2\omega/2} \quad (108)$$

したがって

$$P(n) = |\langle n|d\rangle|^2 = \frac{e^{-d^2\omega/2} (d^2\omega/2)^n}{n!} \quad (109)$$

が得られる。つまり、コヒーレント状態を測定して n 個の光子 (n 番目の励起状態) が観測される確率分布 $P(n)$ はポアソン分布¹⁸で与えられるということになる。 n 番目の励起状態が $|d\rangle$ に含まれる割合は、 n の平均値として

$$n = \frac{\omega d^2}{2} \sim \left(\frac{\text{原点からのズレ}}{\text{零点振動の振幅}}\right)^2 \quad (110)$$

となる。したがって、波束に含まれる主な状態は、古典論でのエネルギー $\frac{1}{2}\omega^2 d^2$ に対応する励起状態なのである¹⁹。すぐ後でわかるが、振幅 d で振動する古典描像イメージに相当する。

状態 $|d\rangle$ を $q(t)$ の固有状態で表そう。(101) より、

$$a(0) = e^{i\omega t} \left(\frac{\omega}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \left[q(t) + \frac{ip(t)}{\omega} \right] \quad (111)$$

$\psi_d(q'(t)) = \langle q'(t)|d\rangle$ に対する方程式は、(105) より、 $p'(t) = -i\partial/\partial q'$ を使って

$$\left. \begin{aligned} [\omega q'(t) + ip'(t)] \psi_d &= \left[\omega q'(t) + \frac{\partial}{\partial q'(t)} \right] \psi_d \\ &= \omega q'(t) \psi_d + (-q'(t) + d) \omega \psi_d \\ &= \omega d e^{-i\omega t} \psi_d \end{aligned} \right\} \quad (112)$$

この微分方程式の解は²⁰

$$\psi_d(q'(t)) = C(t) \exp \left[-\frac{1}{2} \omega (q' - d e^{-i\omega t})^2 \right], \quad C(t) = \alpha \exp \left[\frac{1}{2} d^2 \omega e^{-2i\omega t} \right] \quad \text{但し、}\alpha \text{は積分定数} \quad (113)$$

¹⁷ $e^{d^2\omega/2} = 1 + \frac{\omega d^2}{2} + \frac{1}{2!} \left(\frac{\omega d^2}{2}\right)^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{\omega d^2}{2}\right)^n$

¹⁸ ポアソン分布の確率関数は $f(x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$ 、但し $x = 0, 1, \dots, \lambda > 0$ である。ポアソン分布の平均は λ である。

¹⁹ 古典論では調和振動子の全エネルギー E は振幅を A とすると $E = (k/2)A^2$ 、ここで $k = \omega^2$

²⁰ *Mathematica* で解を求めると $\psi_d(q') = \exp \left[d e^{-i\omega t} q\omega - \frac{q^2\omega}{2} \right] C[1]$

これを規格化して

$$\left. \begin{aligned} \psi_d(q'(t)) &= (\omega/\pi)^{\frac{1}{4}} \beta(t) \exp\left[-\frac{\omega}{2}(q' - d\cos\omega t + 2idsin\omega t)(q' - d\cos\omega t)\right] \\ &\quad (\text{但し、}\beta(t) = \exp[-id^2\omega\cos(\omega t)\sin(\omega t)]) \\ |\psi_d(q'(t))|^2 &= (\omega/\pi)^{\frac{1}{2}} e^{-\omega[q'(t)-d\cos\omega t]^2} \end{aligned} \right\} \quad (114)$$

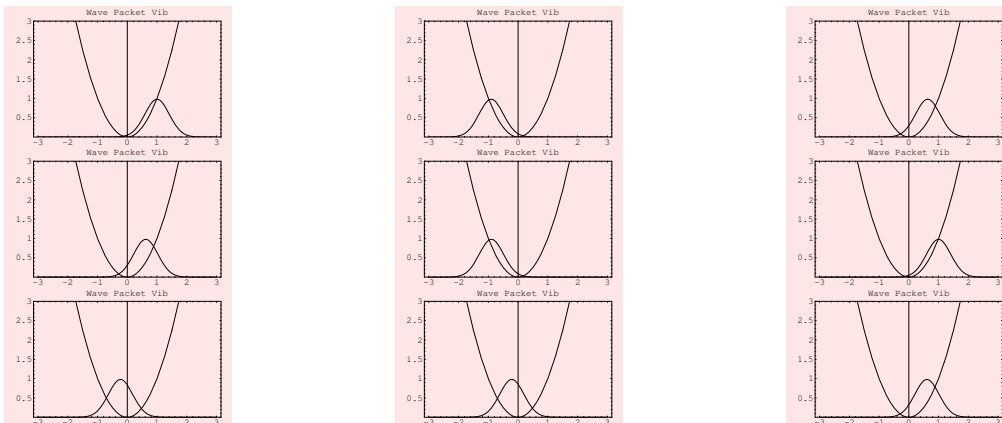
が得られる。この波束はその形を保ったまま振動数 ω で振動する (図.2.3.5 ~ 2.3.5) ことがわかる。位置の期待値は (114) より

$$\langle d|q(t)|d \rangle = (\omega/\pi)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} dq \psi_d^* q \psi_d = d\cos\omega t \quad (115)$$

となり、古典描像と同じように振幅 d 、振動数 ω で振動していることがわかる。運動量の期待値は

$$\langle d|p(t)|d \rangle = (\omega/\pi)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} dq \psi_d^* \left(-i\frac{\partial}{\partial q}\right) \psi_d = -\omega d \sin\omega t$$

となる。 $|\psi_d(q'(t))|^2$ の時間変化を下図に示す²¹。左の図の上から下へ順番に右のほうに眺めていただきたい。波束が振動している様子がお分かりなると思う。その振幅は d であることを確認されたい。



【コヒーレント状態についての補講】

消滅演算子 a の固有状態を $|\alpha\rangle$ とすると

$$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$$

固有状態 $a|\alpha\rangle$ を光子数状態 $|n\rangle$ の展開形で表すと

$$a|\alpha\rangle = \sum_n c_n |n\rangle$$

²¹ `Animate[Plot[$\sqrt{\omega/\pi} e^{-\omega(x-d\cos[\omega t])^2}$ /. $\omega \rightarrow 3$ /. $d \rightarrow 1$, {q, -3, 3}, PlotRange -> {0, 3}], {t, 0, 3, 0.3}]`

となる。ここで係数 c_n は $|n\rangle$ の直交性より, $c_n = \langle n|\alpha\rangle$ と求められるが, 以下に具体的に計算してみよう。

$$\begin{aligned} \langle n|a|\alpha\rangle &= \alpha\langle n|\alpha\rangle & \langle n|a &= \sqrt{n+1}\langle n+1| \\ \text{したがって} \quad \langle n|a|\alpha\rangle &= \sqrt{n+1}\langle n+1|\alpha\rangle = \alpha\langle n|\alpha\rangle \longrightarrow \langle n+1|\alpha\rangle = \frac{\alpha}{\sqrt{n+1}}\langle n|\alpha\rangle \end{aligned}$$

これから次の漸化式が導かれる $c_n = \langle n|\alpha\rangle = \frac{\alpha}{\sqrt{n}}\langle n-1|\alpha\rangle = \frac{\alpha^2}{\sqrt{n(n-1)}}\langle n-2|\alpha\rangle \cdots = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\langle 0|\alpha\rangle$

これから消滅演算子 a の固有状態 $|\alpha\rangle$ は

$$|\alpha\rangle = \langle 0|\alpha\rangle \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle$$

となるが, 次に規格化して具体的に係数 $\langle 0|\alpha\rangle$ を求めよう。

$$\langle \alpha|\alpha\rangle = |\langle 0|\alpha\rangle|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} = |\langle 0|\alpha\rangle|^2 \exp(|\alpha|^2) = 1$$

$$|\langle 0|\alpha\rangle|^2 = \exp(-|\alpha|^2) \longrightarrow \langle 0|\alpha\rangle = \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right)$$

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} |n\rangle$$

コヒーレント状態を測定して n 個の光子が観測される確率分布 $P(n)$ は, $|n\rangle$ の係数の 2 乗で与えられるから

$$P(n) = \left| e^{-|\alpha|^2/2} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \right|^2 = e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!}$$

確率分布 $P(n)$ はポワソン分布となる。平均光子数 \bar{n} はしたがって

$$\begin{aligned} \bar{n} &= \sum_{n=0}^{\infty} nP(n) = \sum_{n=0}^{\infty} n e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} \\ &= |\alpha|^2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2(n-1)}}{(n-1)!} = |\alpha|^2 \sum_{n=0}^{\infty} e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} = |\alpha|^2 \end{aligned}$$

《以上で第 2 章を終了します。特に, コヒーレントのところの議論は, 高橋康 (著) 「物性論研究者のための場の量子論」, J.J Sakurai の「現代の量子力学 (上)」や「演習現代の量子力学」が参考になるかもしれません。ファイトのある方は読まれるとよいでしょう。大変お疲れ様でした。次回は第 3 章結合振動子を読みます。お楽しみに, それでは~》