初等場の量子論(4)

KENZOU

2006年1月8日

「初等場の量子論」も第4章にきました。今まで調和振動子について考えてきました。調和振動子は振幅と振動数が互いに独立な系ですから、波動性と粒子性という矛盾したものを1個の振動子におしつけることができます。非常に荒っぽい言い方ですが、粒子性の方は振幅で解釈し、波動性の方は振動数で理解しようとするのが現代の考え方です。すべての場が調和振動子の集まりで記述されるわけではありませんが、粒子像が描けるのは調和振動子になる場合に限られることが知られています。第4章はいよいよ「場」を取り上げ、場の従う方程式を求めていきます。少しずつ佳境に入ってきました。それでは参りましょうか。

4　場

4.1　連続的な結合振動子

ハミルトニアンと運動方程式 (111) を aN を一定に保ちながら $N \to \infty$、$a \to 0$ とする連続体極限で記述[1]すると

$$q_n \longrightarrow q(x)a^{\frac{1}{2}} \qquad \sum_n \longrightarrow a^{-1}\int dx \qquad \Omega \longrightarrow v/a \tag{135}$$

と置き換えられるから

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}\int_0^L dx \left[p^2(x,t) + v^2\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)^2 + \Omega_0^2 q^2(x,t)\right] \\ &\ddot{q}(x,t) - v^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}q(x,t) + \Omega_0^2 q^2(x,t) = 0 \end{aligned} \tag{136}$$

例によってハミルトニアンを基準座標 $Q,\ P$ で書き換えてみよう。

$$\left.\begin{array}{c} q(x) = L^{-\frac{1}{2}}\sum_k e^{ikx}Q_k \qquad p(x) = L^{-\frac{1}{2}}\sum_k e^{-ikx}P_k \\ k = 2\pi/L \qquad -\infty < L < \infty \end{array}\right\} \tag{137}$$

そうすると

$$\left.\begin{array}{c} H = \dfrac{1}{2}\sum_k (P_k P_k^\dagger + \omega_k^2 Q_k Q_k^\dagger) \\ \omega_k^2 = v^2k^2 + \Omega_0^2 \end{array}\right\} \tag{138}$$

[1] 第1章1.2「線上連続体の振動」の項を参照。

となる。ここで連続体の極限 $\int_0^L dxe^{i(k-k')x} = L\delta_{k,k'}$ を使った。これで、系は無限個の独立振動子の集まりに帰着された。交換関係は

$$
\begin{aligned}
&[Q_k,\, P_{k'}] = i\delta_{k,\,k'} \\
&[Q_k,\, Q_{k'}] = [P_k,\, P_{k'}] = 0 \\
&\text{同様に} a \text{ と } a^\dagger \text{に対する交換関係は} \\
&[a_k,\, a^\dagger_{k'}] = \delta_{k,\,k'} \\
&[a_k,\, a_{k'}] = [a^\dagger_k,\, a^\dagger_{k'}] = 0
\end{aligned} \tag{139}
$$

となる。ハミルトニアンを演算子 a と $a^\dagger$ で書くと

$$
H = \sum_k \omega_k \left(a^\dagger_k a_k + \frac{1}{2} \right) \tag{140}
$$

(136) の 3 次元へ拡張は、$v = c = 1,\, \Omega_0 = m$ と置き換えて

$$
\begin{aligned}
H &= \frac{1}{2} \int d^3r \left\{ \dot{\phi}(\boldsymbol{r},\, t)^2 + [\nabla\phi(\boldsymbol{r},\, t)]^2 + m^2\phi^2(\boldsymbol{r},\, t) \right\} \\
&\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + m^2 \right) \phi(\boldsymbol{r},\, t) = 0
\end{aligned} \tag{141}
$$

となる。この第 2 式はクライン・ゴードン方程式である。

＜クライン・ゴードン場の方程式について＞

クライン・ゴードン場 $\phi(x)$ の波動方程式は（相対論的記述をすると）

$$
\left[\Box + \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right] \phi(x) = 0, \qquad \Box \equiv \partial_\mu \partial^\mu = \left(\frac{\partial}{c\partial t} \right)^2 - \nabla^2 \tag{142}
$$

この方程式が一辺 $2L : -L \le x, y, x \le L$ の立方体の中で成立しているとすると、場 $\phi(x)$ をフーリエ展開した展開係数 $q_{\boldsymbol{k}}$ は調和振動子の方程式を満たす。

$$
\begin{aligned}
&\phi(\boldsymbol{r}, t) = \sum_{\boldsymbol{k}=-\infty}^{\infty} q_{\boldsymbol{k}} \varphi_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r}), \quad \phi \text{は実数場であるから } q^*_{\boldsymbol{k}}(t) = q_{-\boldsymbol{k}}(t) \quad (\varphi_{-\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r}) = \varphi^*_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r})) \\
&\varphi_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r}) \equiv \varphi_{k1}(x)\varphi_{k2}(y)\varphi_{k3}(z), \quad \varphi_{k_i}(r_i) = \sqrt{\frac{1}{2L}} exp \left[i \frac{k_i \pi}{L} r_i \right] \quad -\infty \le k_i \le \infty
\end{aligned} \tag{143}
$$

$$
\nabla^2 \varphi_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r}) = -\left(\frac{\boldsymbol{p}_k}{\hbar} \right)^2 \varphi_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r}), \quad \left(\frac{\boldsymbol{p}_k}{\hbar} \right)^2 \equiv \left(\frac{k_1\pi}{L} \right)^2 + \left(\frac{k_2\pi}{L} \right)^2 + \left(\frac{k_3\pi}{L} \right)^2 \tag{144}
$$

であるから、KG 方程式は

$$
\sum_k \left[\frac{1}{c^2} \ddot{q}_{\boldsymbol{k}} + \left\{ \left(\frac{\boldsymbol{p}_k}{\hbar} \right)^2 + \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right\} q_{\boldsymbol{k}} \right] \varphi_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r}) = 0 \tag{145}
$$

$\varphi_{\boldsymbol{k}'}(\boldsymbol{r})$ を両辺に掛けて全空間で積分すると

$$
\begin{aligned}
&\ddot{q}_{\boldsymbol{k}} = -c^2 \left\{ \left(\frac{\boldsymbol{p}_k}{\hbar} \right)^2 + \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right\} q_{\boldsymbol{k}} \equiv -\omega^2_{\boldsymbol{k}}\, q_{\boldsymbol{k}} \\
&\text{振動数は} \\
&\omega_{\boldsymbol{k}} = \frac{c}{\hbar} \left(\boldsymbol{p}^2_k + (mc)^2 \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned} \tag{146}
$$

３次元の周期性条件より

$$\phi(x+L,y,z,t)=\phi(x,y+L,z,t)=\phi(x,y,z+L,t)=\phi(x,y,z) \tag{147}$$

また $\phi(\boldsymbol{r},t)$ は

$$\begin{gathered}\phi(\boldsymbol{r},\,t)=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_k\frac{e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega_k t)}a_k+e^{-i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega_k t)}a_k^\dagger}{(2\omega_k)^{\frac{1}{2}}}\\ V=L^3,\quad k_{x,y,z}=2\pi l_{x,y,z}/L\end{gathered} \tag{148}$$

交換関係は一般化されて

$$\begin{gathered}[a_k,\,a_{k'}^\dagger]=\delta_{k,k'}\\ [a_k,\,a_{k'}]=[a_k^\dagger,\,a_{k'}^\dagger]=0\end{gathered} \tag{149}$$

ハミルトニアンは

$$H=\sum_{\boldsymbol{k}}\omega_{\boldsymbol{k}}\left(a_{\boldsymbol{k}}^\dagger a_{\boldsymbol{k}}+\frac{1}{2}\right) \tag{150}$$

で、$\boldsymbol{k}$ についての３次元的和で表される。a_k と $a_k^\dagger$ は互いにエルミート共役な演算子である。$N_k=a_k^\dagger a_k$ を定義[2]すると、N_k の固有値は $0,1,2,\cdots,n,\cdots$ で、対応する固有関数は

$$|0\rangle=|0\rangle\,,\ |1\rangle=\frac{1}{\sqrt{1!}}a_k^\dagger\,|0\rangle\,,\ |2\rangle=\frac{1}{\sqrt{2!}}(a_k^\dagger)^2\,|0\rangle\,,\cdots,\ |n\rangle=\frac{1}{\sqrt{n!}}(a_k^\dagger)^n\,|0\rangle\,,\cdots \tag{151}$$

$a_k, a_k^\dagger$ の行列要素はマトリクスの左上を 0 行 0 列とし、⟨ 行 | a_k | 列 ⟩ という要領で表現すると次のようになる。

$$\begin{aligned}&a_k\,|n\rangle=\sqrt{n}\,|n-1\rangle\,,\quad a_k^\dagger\,|n\rangle=\sqrt{n+1}\,|n+1\rangle\\ &\langle n-1|\,a_k\,|n\rangle=\sqrt{n},\quad \langle n|\,a_k^\dagger\,|n-1\rangle=\sqrt{n}\\ &a_k=\begin{bmatrix}0&\sqrt{1}&0&0&0&\cdots\\0&0&\sqrt{2}&0&0&\cdots\\0&0&0&\sqrt{3}&0&\cdots\\0&0&0&0&\sqrt{4}&\cdots\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\cdots\end{bmatrix},\quad a_k^\dagger=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&\cdots\\1&0&0&0&0&\cdots\\0&\sqrt{2}&0&0&0&\cdots\\0&0&\sqrt{3}&0&0&\cdots\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\cdots\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{152}$$

すべての $\boldsymbol{k}$ に対して

$$a_k\,|0\rangle=0,\quad \langle 0|0\rangle=1 \tag{153}$$

になる真空 $|0\rangle$ を定義すると、状態

$$\begin{aligned}&|n_{k1},n_{k_2},n_{k_3},\cdots\rangle\equiv|n_1,n_2,n_3,\cdots\rangle\\ &\quad=\frac{1}{\sqrt{n_1!n_2!n_3!\cdots}}(a_1{}^\dagger)^{n_1}(a_2{}^\dagger)^{n_2}(a_3{}^\dagger)^{n_3}\cdots|0,0,0,\cdots\rangle\end{aligned} \tag{154}$$

はハミルトニアン H の固有値 E に属する固有状態となる。

$$\begin{gathered}H\,|n_1,n_2,\cdots\rangle=\sum_k\left(a_k{}^\dagger a_k\,\omega_k+\frac{1}{2}\omega_k\right)|n_1,n_2,\cdots\rangle\\ E=\sum_i\omega_i\left(n_i+\frac{1}{2}\right)\quad n_i=0,1,2,\cdots\quad (\text{各 } i \text{ について})\end{gathered} \tag{155}$$

[2] 全粒子数は $N=\sum_k a_k^\dagger a_k$。(151) で張られる空間を Fock 空間という。

(138) によると

$$\omega_k = v\sqrt{(k^2) + (\Omega_0/v)^2} \tag{156}$$

相対論的な関係

$$E = c\sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m_0^2c^2} \tag{157}$$

と比べると、この場の粒子は v が光速度で運動量 $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{k}$ をもち、静止質量 $m_0 = \Omega_0/c^2$ をもっていることになる。

■ $L \longrightarrow \infty$ の極限

この極限では, 自由度は無限大となる。この結果、有限自由度系の場合と違って零点エネルギーの発散とか、エネルギー収束問題とかいろいろややこしい問題が沢山でてくることになる。

- 非物理的な境界条件 (147) が取り除かれ、ベクトル $\boldsymbol{k}$ は密な集合となり、その成分 k_i は $-\infty$ から ∞ まで変化する変数となる。
- この点を強調するためこの極限での生成消滅演算子を $a(\boldsymbol{k})$, $a^\dagger(\boldsymbol{k})$ とかくこととする。
- さらに $\displaystyle\sum_k$ は次の積分で置き換えられる。

$$\mathbf{S}_k \equiv \frac{1}{V}\sum_k \longrightarrow (2\pi)^{-3}\int d^3k$$

- 無限大の自由度の導入に伴い、無限に多くの ω があり、それには上限がないから、零点エネルギー[3]は発散する。

$$E_0 = \sum_k \frac{1}{2}\omega_k \quad \longrightarrow \quad \infty$$

  ところで、零点エネルギーそのものは観測にかからないし、エネルギースケールの原点をずらす意味しかないので、零点エネルギーを取り除いたエネルギーを新たに定義して、この問題に蓋をする (笑い)。

$$H = \sum_{\boldsymbol{k}} \omega_{\boldsymbol{k}} a_{\boldsymbol{k}}^\dagger a_{\boldsymbol{k}}$$

- しかし、新たに定義したエネルギーは無限の和を含んでいるではないか、果たして収束するのか？という新たな問題が生じる。この疑問に対する処方箋はいろいろある[4]が、ここでは励起された振動子が有限個ならば H は有限の和になるということで満足しておこう。
- 量子論的効果として、場 $\phi(\boldsymbol{r})$ の揺らぎが発散する[5]。

$$\begin{aligned}
\langle 0\,|\phi(\boldsymbol{r})|\,0\rangle &= 0 \\
[\triangle\phi(\boldsymbol{r})]^2 = \left\langle 0\,\middle|\phi^2(\boldsymbol{r})\middle|\,0\right\rangle &= \frac{1}{V}\sum_{k,k'}\langle 0|\left[\frac{1}{2\omega_k}\left(e^{-i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega_k t)}a_k^\dagger + e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega_k t)}a_k\right)\right. \\
&\quad \left.\times\left(e^{i(\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r}-\omega_{k'}t)}a_k + e^{-i(\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r}-\omega_{k'}t)}a_{k'}^\dagger\right)\right]|0\rangle \\
&= \frac{1}{V}\sum_k \frac{1}{2\omega_k} = \frac{1}{V}\sum_k \frac{1}{2(k^2+m^2)^{\frac{1}{2}}}
\end{aligned} \tag{158}$$

[3]真空エネルギーとも呼ばれる。

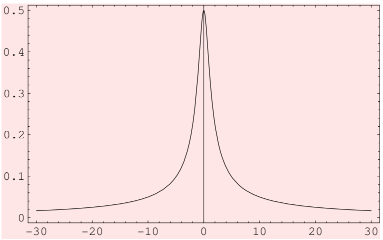
[4]清水明著「新版量子論の基礎」P205, 新版第 3 刷、サイエンス社

[5]L が有限の場合と $L \longrightarrow \infty$ の場合の ω の表式は、(116) より $\omega_s = \Omega^2(2sin\frac{s}{2})^2 + \Omega_0^2 \stackrel{L\to\infty}{\longrightarrow} \Omega^2 s^2 + \Omega_0^2 \equiv k^2 + m^2 \quad (\Omega = 1/a = k/s,\, \Omega_0 = m)$。

この和が発散することは $L \longrightarrow \infty$ の極限をとると分かる。すなわち

$$[\triangle\phi(\boldsymbol{r})]^2 = (2\pi)^{-3}\int_{-\infty}^{+\infty} d\boldsymbol{k}\frac{1}{2(k^2+m^2)^{\frac{1}{2}}} \longrightarrow \infty$$

【註】$L \longrightarrow \infty$ に持っていった場合と有限の場合の場 (位置) の揺らぎのグラフを図.(1)(2) 示す。図.(1) は左右に裾野がずっと広がっているが、図.(2) は 2π の周期関数となっている。s の適当な範囲内で積分すれば有限の値となる。



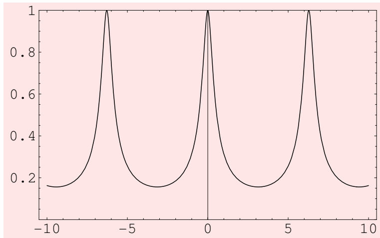


図 1: $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{K^2+1}}$, ($L \rightarrow \infty$ のケース)

図 2: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{10(2sin(s/2)^2+1}}$ (L は有限のケース)

そこで、ある空間領域についての平均を取ることで $\phi(\boldsymbol{r})$ の揺らぎの自乗を有限におさえることにする。有限の容積 b^3 についての平均の場 ϕ_b を

$$\bar{\phi}_b = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^3 \frac{1}{\sqrt{\upsilon}}\int d^3\boldsymbol{r}e^{-r^2/2b^2}\phi(\boldsymbol{r}), \quad \upsilon = b^3 \tag{159}$$

で定義[6]すれば (図.3 参照[7])

$$\begin{aligned}
\left\langle 0 \left|\bar{\phi}_b^2\right| 0\right\rangle &= \left\langle 0 \left|(2\pi)^{-3}\upsilon^{-2}\int d\boldsymbol{k}d^3\boldsymbol{r}d^3\boldsymbol{r}'\phi(\boldsymbol{r})\phi(\boldsymbol{r}')e^{-\frac{r^2+r'^2}{2b^2}}\right| 0\right\rangle \\
\text{また、}\left\langle 0 \left|\phi(\boldsymbol{r})\phi(\boldsymbol{r}')\right| 0\right\rangle &\propto \left\langle 0 \left| e^{i\boldsymbol{k}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}a(\boldsymbol{k})a^\dagger(\boldsymbol{k})\right| 0\right\rangle = e^{i\boldsymbol{k}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')} \quad \text{であるから} \\
&= (2\pi)^{-6}\upsilon^{-2}\int d\boldsymbol{k}d^3\boldsymbol{r}d^3\boldsymbol{r}'\frac{e^{i\boldsymbol{k}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}}{2\omega}e^{-\frac{r^2+r'^2}{2b^2}} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3}\int d\boldsymbol{k}\frac{1}{2\omega}e^{-k^2b^2} \approx \frac{b^{-3}}{(b^{-2}+m^2)^{\frac{1}{2}}}
\end{aligned} \tag{160}$$

これから分かるように、平均の場を定義した容積 b^3 をしだいに小さくしていけば、場の揺らぎはますます激しくなる (図.4 参照)。言い換えると、$\int \frac{d\boldsymbol{k}}{2\omega}e^{-k^2b^2}$ の積分で b より波長の短い波 ($kb \propto \frac{b}{\lambda}$ は $\lambda < b$ で $e^{-k^2b^2}$ が急速に減衰することにより積分への寄与が殆どなくなる) の効果が効かなくなるので、容積が小さいほど揺らぎへの寄与が大きくなる。

ところで電磁ポテンシャル（スカラーポテンシャルとベクトルポテンシャル）V と $\boldsymbol{A}$ は (142) で $m=0$ とおいた方程式を満たす[8]。従って V の揺らぎは (160) より

$$\triangle V \sim \left(\frac{b^{-3}}{\sqrt{b^{-2}+m^2}}\right)^{\frac{1}{2}} \sim \frac{1}{b} \tag{161}$$

[6] $(2\pi b^2)^{-\frac{3}{2}}exp(-\frac{r^2}{2b^2})$ は 3 次元ガウス分布。つまり平均の重み付けガウス分布をとっている。

[7] ブロードと急峻なカーブの b 値はそれぞれ $b = 10^{-1}$, 10^{-2} で、b が小さくなるに連れてカーブは急峻になる。

[8] $\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)V = 0, \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\boldsymbol{A} = 0$

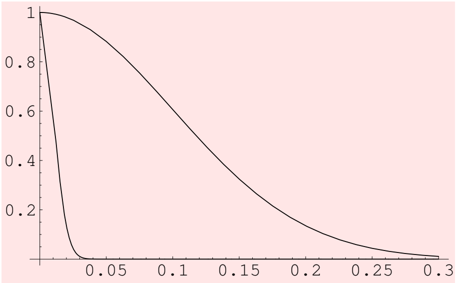


図 3: $e^{-r^2/2b^2}$ のグラフ

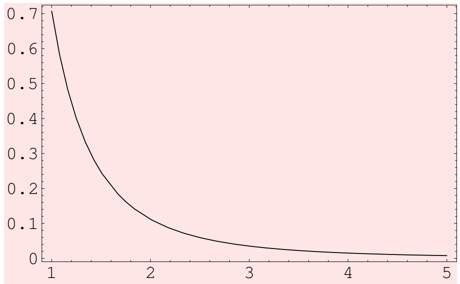


図 4: $\dfrac{b^{-3}}{(b^{-2}+m^2)^{\frac{1}{2}}}$ のグラフ

となる。一方、単位電荷による距離 b の点に作られるポテンシャル $e/4\pi b$ は同程度の容積内での平均場の揺らぎよりもはるかに小さい[9]ということになる。このような状況に中で、水素原子の電子が陽子によってつくられた場に従って運動することが果たして可能か、という疑問がおこる。それに対する答えは、揺らぎの大部分は振動数 $\sim b^{-1}=me^2$ の程度であり、$b\sim 10^{-8}$cm のとき、この振動数は基底状態での電子の振動数の 137 倍である[10]、ということである。場の揺らぎは電子に非常に大きい振動数と小さい振幅の振動をひきおこすにすぎない。一方、クーロン力は比較的長時間にわたって同一方向に働くことによって電子の運動を支配する。場の揺らぎによる電子振動の振幅は電子のコンプトン波長[11] 10^{-11}cm より小さいことが示されている。従って、この効果によるエネルギー準位のずれは、相対論的効果によるものよりも小さい。このように小さい効果であるにもかかわらず、現在 1 万分の 1 の精度で検証されている。

■平均場の 2 乗平均の計算

Mathematica で (160) の計算を行う。
まず空間積分。

$$\texttt{In[1]:=}\mathsf{Assuming}\left[b>0,\ \frac{1}{(2\pi\,b)^6}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\,(A(x-x')+B(y-y')+C(z-z')}}{2\omega}\,e^{-\frac{x^2+y^2+z^2+x'^2+y'^2+z'^2}{2b^2}}dx\,dy\,dz\,dx'\,dy'\,dz'\right] \tag{162}$$

$$\texttt{Out[1]:=}\frac{e^{-b^2(A^2+b^2+C^2)}}{16\pi^3\omega}$$

次に波数 $\boldsymbol{k}$ の積分を行う。Bessel 関数がでてきて煩いが、次のような展開で満足しておこう (笑い)。

$$\texttt{In[2]:=}\mathsf{Assuming}\left[b>0\ \&\&\ m>0,\ \frac{1}{16\pi^3}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-b^2k^2}}{\sqrt{k^2+m^2}}dk\right]$$
$$\texttt{Out[2]:=}\frac{e^{\frac{b^2m^2}{2}}\,\mathsf{BesselK}\left[0,\ \frac{b^2m^2}{2}\right]}{16\pi^3} \tag{163}$$

[9] 単位電荷は $e=(4\pi/137)^{\frac{1}{2}}$
[10] 水素原子の基底状態のエネルギー $E_0=-\frac{m\,e^4}{2}$, $E=h\nu$ より $\nu=\frac{m}{4\pi}e^4$ $\quad\frac{b^{-1}}{\nu}=137$ (但し、$\hbar=1$)
[11] コンプトン波長：静止した粒子の波としての大体の大きさを示す。$\hbar/mc$ c:光速

Infinity 付近での 1 次までの級数展開をとると

$$\begin{aligned}
&\texttt{In[3]:=}\mathsf{Series}\left[\mathsf{BesselK}\left[0,\ \frac{\mathsf{b^2m^2}}{2}\right], \{\mathsf{b},\ \infty, 1\}\right] \\
&\texttt{Out[3]:=}\mathsf{e}^{-\frac{1}{2}\mathsf{b^2\,m2}}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\mathsf{m^2}}\mathsf{b}} + \mathsf{O}\left[\frac{1}{\mathsf{b}}\right]^2\right)
\end{aligned} \tag{164}$$

ところで $\mathsf{exp}(-\frac{1}{2}\mathsf{b^2m^2}) = 1 - \mathsf{m^2b^2}/2 + \mathsf{O[b]^4}$ と展開できるから先程の Mathematica の出力は

$$\frac{1}{\mathsf{mb}}\mathsf{e}^{-\frac{1}{2}\mathsf{b^2\,m^2}} = \frac{\mathsf{b}}{\mathsf{m}}\left(\frac{1}{\mathsf{b^2}} - \frac{\mathsf{m^2}}{2}\right) \tag{165}$$

となる。一方

$$\begin{aligned}
&\texttt{In[4]:=}\mathsf{Series}\left[\frac{\mathsf{b^{-3}}}{(\mathsf{b^{-2}+m^2})^{\frac{1}{2}}},\ \{\mathsf{b},\ 0,\ 1\}\right] \\
&\texttt{Out[4]:=}\frac{1}{\mathsf{b^2}} - \frac{\mathsf{m^2}}{2} + \mathsf{O[b]^2}
\end{aligned} \tag{166}$$

これは (165) に相当する。

4.2 ラグランジアンから場の方程式を導くこと

連続変数 $\phi(\boldsymbol{r})$ と $\dot{\phi}(\boldsymbol{r})$ は

$$\begin{aligned}
\phi(\boldsymbol{r}, t) &= \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\boldsymbol{k}}\sqrt{\frac{1}{2\omega_k}}\{a_{\boldsymbol{k}}e^{i(\boldsymbol{kr}-\omega_k t)} + a^\dagger_{\boldsymbol{k}}e^{-i(\boldsymbol{kr}-\omega_k t)}\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\boldsymbol{k}}\sqrt{\frac{1}{2\omega_k}}\{a_{\boldsymbol{k}}e^{-i\omega_k t}f_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r}) + a^\dagger_{\boldsymbol{k}}e^{i\omega_k t}f^*_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r})\} \\
\dot{\phi}(\boldsymbol{r}, t) &= -\frac{i}{\sqrt{V}}\sum_{\boldsymbol{k}}\sqrt{\frac{\omega_k}{2}}\{a_{\boldsymbol{k}}e^{i(\boldsymbol{kr}-\omega_k t)} - a^\dagger_{\boldsymbol{k}}e^{-i(\boldsymbol{kr}-\omega_k t)}\} \\
&= -\frac{i}{\sqrt{V}}\sum_{\boldsymbol{k}}\sqrt{\frac{\omega_k}{2}}\{a_{\boldsymbol{k}}e^{-i\omega_k t}f_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r}) - a^\dagger_{\boldsymbol{k}}e^{i\omega_k t}f^*_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r})\}
\end{aligned} \tag{167}$$

ただし、

$$\omega_k = \sqrt{\boldsymbol{k}^2 + m^2}, \quad V = L_1L_2L_3 \tag{168}$$

(149) の交換関係を使うと

$$\begin{aligned}
&[\phi(\boldsymbol{r}, t),\ \phi(\boldsymbol{r}', t)]_{t=t'} = [\dot{\phi}(\boldsymbol{r}, t),\ \dot{\phi}(\boldsymbol{r}', t')]_{t=t'} = 0 \\
&[\phi(\boldsymbol{r}, t),\ \dot{\phi}(\boldsymbol{r}', t')]_{t=t'} = i\delta^3(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')
\end{aligned} \tag{169}$$

を得る。(169) の関係は次の交換関係とデルタ関数を利用し、次のようにして導出される。

$$[a_{\boldsymbol{k}},\ a^\dagger_{\boldsymbol{k}'}] = \delta_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}'}, \quad [a_{\boldsymbol{k}},\ a_{\boldsymbol{k}'}] = [a^\dagger_{\boldsymbol{k}},\ a^\dagger_{\boldsymbol{k}'}] = 0, \quad \delta^3(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') = \frac{1}{V}\sum_{\boldsymbol{k}}e^{i\boldsymbol{k}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}$$

$$
\begin{aligned}
[\phi(\boldsymbol{r},t),\,\phi(\boldsymbol{r}',t)] &= \frac{1}{V}\sum_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}'}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{\omega_{\boldsymbol{k}}\omega_{\boldsymbol{k}'}}}\Big[\{a_{\boldsymbol{k}}e^{-i\omega_{\boldsymbol{k}}t}f_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r})+a_{\boldsymbol{k}}^{\dagger}e^{i\omega_{\boldsymbol{k}}t}f_{\boldsymbol{k}}^{*}(\boldsymbol{r})\}\{a_{\boldsymbol{k}'}e^{-i\omega_{\boldsymbol{k}'}t}f_{\boldsymbol{k}'}(\boldsymbol{r}')+a_{\boldsymbol{k}'}^{\dagger}e^{i\omega_{\boldsymbol{k}'}t}f_{\boldsymbol{k}'}^{*}(\boldsymbol{r}')\}\\
&\quad -\{a_{\boldsymbol{k}'}e^{-i\omega_{\boldsymbol{k}'}t}f_{\boldsymbol{k}'}(\boldsymbol{r}')-a_{\boldsymbol{k}'}^{\dagger}e^{i\omega_{\boldsymbol{k}'}t}f_{\boldsymbol{k}'}^{*}(\boldsymbol{r}')\}\{a_{\boldsymbol{k}}e^{-i\omega_{\boldsymbol{k}}t}f_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r})+a_{\boldsymbol{k}}^{\dagger}e^{i\omega_{\boldsymbol{k}}t}f_{\boldsymbol{k}}^{*}(\boldsymbol{r})\}\Big]\\
&= \frac{1}{V}\sum_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}'}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{\omega_{\boldsymbol{k}}\omega_{\boldsymbol{k}'}}}\Big\{[a_{\boldsymbol{k}},a_{\boldsymbol{k}'}^{\dagger}]e^{-i(\omega_{\boldsymbol{k}}-\omega_{\boldsymbol{k}'})t}f_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r})f_{\boldsymbol{k}'}^{*}(\boldsymbol{r}')+[a_{\boldsymbol{k}}^{\dagger},a_{\boldsymbol{k}'}]e^{i(\omega_{\boldsymbol{k}}-\omega_{\boldsymbol{k}'})t}f_{\boldsymbol{k}}^{*}(\boldsymbol{r})f_{\boldsymbol{k}'}(\boldsymbol{r}')\Big\}\\
&= \frac{1}{V}\sum_{\boldsymbol{k}}\frac{1}{2\omega_{\boldsymbol{k}}}\left\{f_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r})f_{\boldsymbol{k}'}^{*}(\boldsymbol{r}')-f_{\boldsymbol{k}}^{*}(\boldsymbol{r})f_{\boldsymbol{k}'}(\boldsymbol{r}')\right\}\\
&= 0
\end{aligned}
$$

最後の式の変形は第 2 項目で、$\boldsymbol{k}\to-\boldsymbol{k}$ として $\omega_{-\boldsymbol{k}}=\omega_{\boldsymbol{k}}$ と $f_{\boldsymbol{k}}$ の複素共役関係 $f_{-\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r})=f_{\boldsymbol{k}}^{*}(\boldsymbol{r})$ に注意すると

$$
\left.\begin{array}{rl}
k\to k & f_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r})f_{\boldsymbol{k}'}(\boldsymbol{r}')-f_{\boldsymbol{k}}^{*}(r)f_{\boldsymbol{k}'}(\boldsymbol{r}')\\
k\to -k & f_{-\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r})f_{-\boldsymbol{k}'}(\boldsymbol{r}')-f_{-\boldsymbol{k}}^{*}(r)f_{-\boldsymbol{k}'}(\boldsymbol{r}')=f_{\boldsymbol{k}}^{*}(\boldsymbol{r})f_{\boldsymbol{k}'}(\boldsymbol{r}')-f_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r})f_{\boldsymbol{k}'}^{*}(r)
\end{array}\right\}
$$

となることを使った（つまり $\pm\boldsymbol{k}$ に対して対称の形となっている)。

$$
\begin{aligned}
[\phi(\boldsymbol{r},t),\dot{\phi}(\boldsymbol{r}',t)] &= -\frac{i}{V}\sum_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}'}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\omega_{\boldsymbol{k}}'}{\omega_{\boldsymbol{k}}}}\Big[\{a_{\boldsymbol{k}}e^{-i\omega_{\boldsymbol{k}}t}f_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r})+a_{\boldsymbol{k}}^{\dagger}e^{i\omega_{\boldsymbol{k}}t}f_{\boldsymbol{k}}^{*}(\boldsymbol{r})\}\{a_{\boldsymbol{k}'}e^{-i\omega_{\boldsymbol{k}'}t}f_{\boldsymbol{k}'}(\boldsymbol{r}')-a_{\boldsymbol{k}'}^{\dagger}e^{i\omega_{\boldsymbol{k}'}t}f_{\boldsymbol{k}'}^{*}(\boldsymbol{r}')\}\\
&\quad -\{a_{\boldsymbol{k}'}e^{-i\omega_{\boldsymbol{k}'}t}f_{\boldsymbol{k}'}(\boldsymbol{r}')-a_{\boldsymbol{k}'}^{\dagger}e^{i\omega_{\boldsymbol{k}'}t}f_{\boldsymbol{k}'}^{*}(\boldsymbol{r}')\}\{a_{\boldsymbol{k}}e^{-i\omega_{\boldsymbol{k}}t}f_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r})+a_{\boldsymbol{k}}^{\dagger}e^{i\omega_{\boldsymbol{k}}t}f_{\boldsymbol{k}}^{*}(\boldsymbol{r})\}\Big]\\
&= -\frac{i}{V}\sum_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}'}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\omega_{\boldsymbol{k}}'}{\omega_{\boldsymbol{k}}}}\Big\{[a_{\boldsymbol{k}},a_{\boldsymbol{k}'}^{\dagger}]e^{-i(\omega_{\boldsymbol{k}}-\omega_{\boldsymbol{k}'})t}f_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r})f_{\boldsymbol{k}'}^{*}(\boldsymbol{r}')-[a_{\boldsymbol{k}}^{\dagger},a_{\boldsymbol{k}'}]e^{i(\omega_{\boldsymbol{k}}-\omega_{\boldsymbol{k}'})t}f_{\boldsymbol{k}}^{*}(\boldsymbol{r})f_{\boldsymbol{k}'}(\boldsymbol{r}')\Big\}\\
&= -\frac{i}{V}\sum_{\boldsymbol{k}}f_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r})f_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r}')\\
&= -i\delta^3(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')
\end{aligned}
$$

−−−

場の量を $\phi(\boldsymbol{r},t)$ とするとき、停留値を取るべき作用積分は

$$
W=\int_{t_1}^{t_2}L(\phi(\boldsymbol{r},t),\nabla\phi(\boldsymbol{r},t),\phi(\dot{\boldsymbol{r}},t))dt=\int_{t_1}^{t_2}dt\int_V d^3\boldsymbol{r}\mathcal{L}(\phi(\boldsymbol{r},t),\nabla\phi(\boldsymbol{r},t),\,\phi(\dot{\boldsymbol{r}},t)) \tag{170}
$$

である。ここで L はラグランジアン、$\mathcal{L}$ はラグランジアン密度で $\phi(\boldsymbol{r},t)$ と $\nabla\phi(\boldsymbol{r},t)$ と $\dot{\phi}(\boldsymbol{r},t)$ の汎関数である[12]。

$$
L(t)=\int_V d^3\boldsymbol{r}\mathcal{L}(\phi(\boldsymbol{r},t),\nabla\phi(\boldsymbol{r},t),\,\dot{\phi}(\boldsymbol{r},t)) \tag{171}
$$

空間の境界と時間が t_1 と t_2 では 0 となるような任意の変分 $\delta\phi(\boldsymbol{r},t)$ に対して (170) が不変であることを要求すると、オイラーの方程式[13]を得る。

$$
\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}}\right)+\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_i\phi}\right)-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}}\right)+\nabla\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\nabla\phi)}-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}=0 \tag{172}
$$

[12]空間変数で積分しているから L は t の関数となる。

[13]Euler-Lagrange の方程式とも呼ばれる。普通はコレか。

変分についての公式

$$\frac{\delta}{\delta\phi(x)}\int d^3\boldsymbol{r}'F(\phi(x'))=\frac{\partial}{\partial\phi(x)}F(\phi(x)) \tag{173}$$

による次の汎関数微分

$$\frac{\delta L}{\delta\dot{\phi}}=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}}\quad \text{および}\quad \frac{\delta L}{\delta\phi}=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}-\nabla\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\nabla\phi)} \tag{174}$$

を使ってオイラー方程式を古典論の方程式と同じ形に書くことができる。

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\delta L}{\delta\dot{\phi}(\boldsymbol{r},t)}=\frac{\delta L}{\delta\phi(\boldsymbol{r},t)} \tag{175}$$

正準共役運動量 $\pi(\boldsymbol{r},t)$ を

$$\pi(\boldsymbol{r},t)=\frac{\delta L}{\delta\dot{\phi}(\boldsymbol{r},t)} \tag{176}$$

で定義し、次の正準交換関係（同時刻）を要請する[14]。

$$\begin{aligned}&[\phi(\boldsymbol{r},t),\,\pi(\boldsymbol{r}',t)]=i\delta^3(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\\&[\phi(\boldsymbol{r},t),\,\phi(\boldsymbol{r}',t)]=[\pi(\boldsymbol{r},t),\pi(\boldsymbol{r}',t)]=0\end{aligned} \tag{177}$$

ハミルトニアンとハミルトニアン密度は

$$\begin{aligned}&H=\int_V d^3\boldsymbol{r}\pi(\boldsymbol{r},t)\dot{\phi}(\boldsymbol{r},t)-L=\int_V d^3\boldsymbol{r}\mathcal{H}\left(\pi(\boldsymbol{r},t),\phi(\boldsymbol{r},t),\partial_i\phi(\boldsymbol{r},t)\right)\\&\mathcal{H}(\pi(\boldsymbol{r},t),\phi(\boldsymbol{r},t),\partial_i\phi(\boldsymbol{r},t))=\pi(\boldsymbol{r},t)\dot{\phi}(\boldsymbol{r},t)-\mathcal{L}(\phi(\boldsymbol{r},t),\nabla\phi(\boldsymbol{r},t),\,\dot{\phi}(\boldsymbol{r},t))\end{aligned} \tag{178}$$

となる。(141) の場の方程式とハミルトニアンはスカラー場のラグランジアン[15]

$$L=\frac{1}{2}\int_V d^3\boldsymbol{r}[\dot{\phi}^2-(\nabla\phi)^2-m^2\phi^2] \tag{179}$$

から導かれる。また、$\phi(\boldsymbol{r},t)$ と$\pi(\boldsymbol{r},t)$ のハイゼンベルグ運動方程式は

$$\begin{aligned}&\dot{\phi}(\boldsymbol{r},t)=-i[\phi(\boldsymbol{r},t),\,H]=\pi(\boldsymbol{r},t)\\&\dot{\pi}(\boldsymbol{r},t)=-i[\pi(\boldsymbol{r},t),\,H]=\nabla^2\phi(\boldsymbol{r},t)-m^2\phi(\boldsymbol{r},t)\end{aligned} \tag{180}$$

となる。

4.3　シュレーディンガー場

シュレーディンガー場

$$i\dot{\phi}(\boldsymbol{r},t)+\frac{1}{2m}\nabla^2\phi(\boldsymbol{r},t)=0 \tag{181}$$

を与えるラグランジアン密度は

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{r},t)=i\phi^\dagger(\boldsymbol{r},t)\dot{\phi}(\boldsymbol{r},t)-\frac{1}{2m}\nabla\phi^\dagger(\boldsymbol{r},t)\nabla\phi(\boldsymbol{r},t) \tag{182}$$

ととればよい。$\mathcal{L}$ を $\phi^\dagger(\boldsymbol{r},t)$ で変分すると

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}^\dagger}=0,\quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\nabla\phi^\dagger}=-\frac{1}{2m^2}\nabla\phi(\boldsymbol{r},t),\quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^\dagger}=i\dot{\phi}(\boldsymbol{r},t) \tag{183}$$

[14]量子力学での同時刻の正準交換関係は $[p_i,\,q_j]=-i\delta_{ij}$

[15]ラグランジアン密度 $\mathcal{L}=\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi-\frac{1}{2}m^2\phi^2=\frac{1}{2}\left(\dot{\phi}^2-(\nabla\phi)^2-m^2\phi^2\right)$

であるからオイラーの方程式は (172) より

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}^\dagger}\right)+\nabla\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla \phi^\dagger}\right)-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^\dagger}=\left(-\frac{1}{2m}\nabla^2-i\frac{\partial}{\partial t}\right)\phi(\boldsymbol{r},t)=0\\
&\therefore\quad i\dot{\phi}=-\frac{1}{2m}\nabla^2\phi\\
&\text{同様に } \mathcal{L} \text{ を} \phi \text{で変分して}\\
&i\dot{\phi}^\dagger=\frac{1}{2m}\nabla^2\phi^\dagger\\
&\text{共役な運動量は}\\
&\pi=\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\dot{\phi}}=i\phi^\dagger,\quad \pi^\dagger=-\phi
\end{aligned}
\tag{184}
$$

ハミルトニアンは

$$
\begin{aligned}
H&=\int_V d^3\boldsymbol{r}\mathcal{H}\left(\pi(\boldsymbol{r},t),\phi(\boldsymbol{r},t),\partial_i\phi(\boldsymbol{r},t)\right)\\
&=\int_V d^3\boldsymbol{r}\left(\pi(\boldsymbol{r},t)\dot{\phi}(\boldsymbol{r},t)-\mathcal{L}(\phi(\boldsymbol{r},t),\nabla\phi(\boldsymbol{r},t),\,\dot{\phi}(\boldsymbol{r},t)\right)\\
&=\frac{1}{2m}\int_V d^3\boldsymbol{r}\nabla\phi^\dagger\cdot\nabla\phi
\end{aligned}
\tag{185}
$$

$\phi(\boldsymbol{r},t)$ を空間変数についてフーリエ変換すると[16]

$$
\phi(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_k e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}a_{\boldsymbol{k}}(t) \tag{186}
$$

(184) に代入して

$$
\begin{aligned}
\dot{a}_{\boldsymbol{k}}(t)&=-i\frac{1}{2m}\boldsymbol{k}^2a_{\boldsymbol{k}}\\
\dot{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}}(t)&=i\frac{1}{2m}\boldsymbol{k}^2a_{\boldsymbol{k}}\\
\therefore\quad a_{\boldsymbol{k}}(t)&=e^{-i\frac{1}{2m}\boldsymbol{k}^2t}a_k\\
a^\dagger_{\boldsymbol{k}}(t)&=e^{i\frac{1}{2m}\boldsymbol{k}^2t}a^\dagger_k
\end{aligned}
\tag{187}
$$

次の変数を導入すると

$$
\begin{aligned}
q_{\boldsymbol{k}}&=\sqrt{\frac{1}{2\omega_k}}\{a_{\boldsymbol{k}}(t)+a^\dagger_{\boldsymbol{k}}(t)\}\\
p_{\boldsymbol{k}}&=-i\sqrt{\frac{\omega_k}{2}}\{a_{\boldsymbol{k}}(t)-a^\dagger_{\boldsymbol{k}}(t)\}
\end{aligned}
\tag{188}
$$

(187) より

$$
\begin{aligned}
\dot{q}_{\boldsymbol{k}}(t)&=p_{\boldsymbol{k}}(t)\\
\dot{p}_{\boldsymbol{k}}(t)&=-\omega_k^2q_{\boldsymbol{k}}(t)
\end{aligned}
\tag{189}
$$

これは調和振動子の運動方程式である。つまり、シュレーディンガー方程式を満たす場の空間変数に対するフーリエ成分を (188) の $q_{\boldsymbol{k}}$ と $p_{\boldsymbol{k}}$ で書くと、それらは (189) の調和振動子の運動方程式を満たす。

[16] フーリエ逆変換は $a_{\boldsymbol{k}}=\frac{1}{V}\int_V d^3\boldsymbol{r}\,exp(-i\boldsymbol{k}\cdot t)\phi(\boldsymbol{r},\,t)$

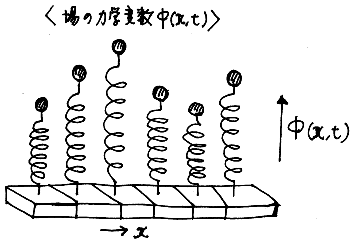
調和振動子のハミルトニアンは $H=\frac{1}{2}(p^2+\omega^2q^2)$ と書けるからシュレーディンガー場のハミルトニアンは

$$
\begin{aligned}
H &= \frac{1}{2}\sum_{\boldsymbol{k}}\left\{p_{\boldsymbol{k}}(t)\,p_{\boldsymbol{k}}(t)+\omega_k^2\,q_{\boldsymbol{k}}(t)\,q_{\boldsymbol{k}}(t)\right\} \\
&= \sum_{\boldsymbol{k}}\omega_k\{a_{\boldsymbol{k}}^{\dagger}(t)\,a_{\boldsymbol{k}}(t)\}+\frac{1}{2}\sum_{\boldsymbol{k}}\omega_k
\end{aligned}
\tag{190}
$$

************　以上で第 4 章を終了します。お疲れ様でした。***************

■おまけ

量子力学と違って場の変数 $\phi(\boldsymbol{r},t)$ のイメージは最初はなかなかつかみにくいものです。イメージとして次のスケッチが参考になると思います。



場を量子化するというのは、場の力学変数の間に交換関係（あるいは反交換関係）を設定し、１つの代数的演算を規定することといえます。この代数演算を規定する場合、Dirac によれば古典解析力学におけるポアソン括弧の理論が手引きになるということでした。しかし、量子場の理論はいつでも古典場の理論から導き出されるとは限りません。例えば反交換関係はポアソン括弧の性質を持っていません。ということで、量子場の理論の指導原理はいまだによく分からんというのが現状ということらしい。このあたりの事情は高橋康著「古典場から量子場への道」（講談社サイエンティフィック）に詳しくのっていますから一読されるといいでしょう。

■「場の揺らぎ」の補足

場を点の関数と考えると、場には無限に短い波長の波が含まれることになる。いま、例えば x のある関数 $f(x)$ を考え、それをフーリエ積分で表すと

$$
f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dk\varphi(k)e^{ikx}
$$

積分は波数 k について $-\infty$ から $+\infty$ まで含んでいる。ところがこれを x の周りの幅 a の間で平均すると

$$
\frac{1}{a}\int_{x-a/2}^{x+a/2}dyf(y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dk\varphi(k)\frac{1}{a}\int_{x-a/2}^{x+a/2}dye^{iky}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dk\varphi(k)e^{ikx}\,\frac{sin(ka/2)}{ka/2}
$$

大きな k にたいして最後の因子だけ収束がよくなっている。つまり平均することによって短い波長の寄与が酸くなるなっている。[高橋康「古典場から量子場への道」講談社サイエンティフィク]

■ **N 次元ガウス分布の式**

$$\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_N) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{N}{2}}} e^{-\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{2\sigma^2}}$$