

相対性理論 Tips

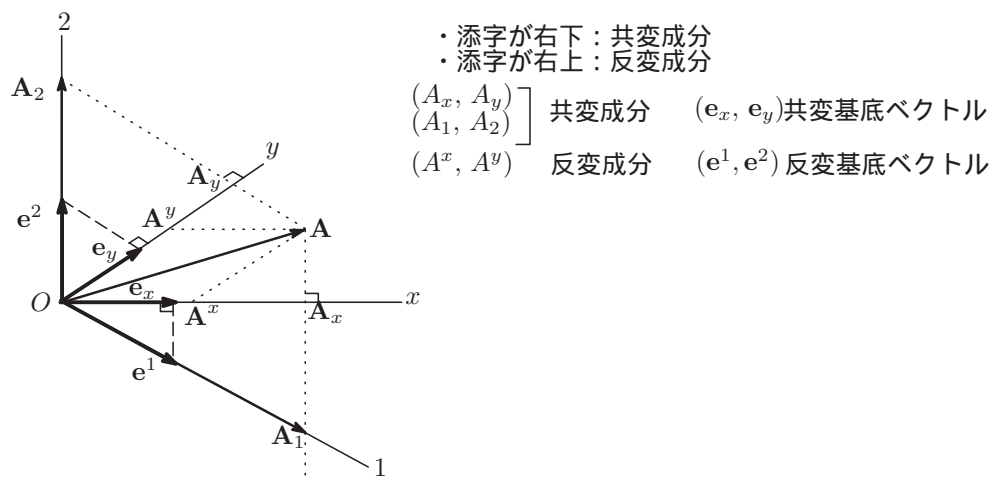
～ 反変ベクトルと共変ベクトル～

KENZOU

2008年5月16日

♣ 春も過ぎてばちばち初夏を迎えようかというある日、履きなれたスニーカーで足元をかため、早朝の太陽を背に浴びて キャサリンが K 氏をたずねてきた。

- キャサリン：K さん、こんにちわ～、キャサリンで～す。ごめんなさい、ひょっとしてたたき起こしたのかしら。
- K 氏：Oh! キャサリン、こんにちわ。僕をたたき起こしたかって、そんなことないよ、もうとっくに起きて朝の散歩を終わったところさ。久しぶりだね、こんなに朝早くどうしたんだ。
- キャサリン：それならよかったわ。いや実はね、いま特殊相対性理論を勉強し始めているのだけど、いわゆる斜交座標というのがでてくるじゃない。今まで慣れ親しんできた x, y 2次元直交座標では、ベクトル成分は x, y の 2つで表せていたものが、斜交座標ではやれ共変成分だ、やれ反変成分だとうるさいこと。たしかに図を描けば成分の取り方は 2通りあることは分かるんだけど、この名前の由来や、要するにイメージがいまいちピンとこないのよ。できればこの辺のお話を聞ければと思って、それとテンソルのお話もついでに聞ければと思ってきたの。
- K 氏：そうなんだ、たしかに共変とか反変の話は最初に躓きやすいよね。 x, y 軸を斜交座標として x 軸に直交する軸を”2”に、 y 軸に直交する軸を”1”としよう。それぞれの軸の単位ベクトル（基底ベクトル）を図のようにとると、 x, y 軸のなす角を狭めれば”1”, ”2”軸のなす角は広がり、逆に x, y 軸のなす角を広げればこんどは逆に”1”, ”2”のなす角が狭まる、つまり、これらの 2つの座標系はいわば相反する動きをするんだね。この辺は、鉛筆をもって確かめるといいよ。ところでここで重要なことを言っておくと、基底ベクトル (e_x, e_y) と (e^1, e^2) の関係なんだ。一部は先ほど言ったけど、この内積を見よう。そうすると、 $e_x \cdot e^2 = 0, e_y \cdot e^1 = 0, e_x \cdot e^1 = 1, e_y \cdot e^2 = 1$ となっていることがわかる。格好よく書けば $e_i \cdot e^j = \delta_i^j$ となる。 δ_i^j というのはクロネッカーの δ といって $i \neq j$ なら 0 で、 $i = j$ なら 1 というやつだね。
- キャサリン：クロネッカーの δ で $i = j$ の場合 1 になる、例えば $e_x \cdot e^1 = 1$ というのをもう少し詳しく説明いただけませんか。
- K 氏：了解。 e_x と e^1 のなす角を θ とすると $e_x \cdot e^1 = |e_x| |e^1| \cos\theta = |e_x|^2 = 1$ ということなんだ。ところで、いま言ったような $e_i \cdot e^j = \delta_i^j$ という関係の基底を双対基底と呼んでいるんだけど、このあたりの詳しいことは、このサイト (<http://www12.plala.or.jp/ksp/vectoranalysis/index.html>) に素晴らしい解説が載っているのだから是非参照しておいて。さあ、それではそろそろはじめようか。
- キャサリン：よろしくをお願いします。



共変ベクトルと反変ベクトル

ベクトル \mathbf{A} というのがあって、これを 2 次元の斜交座標系 (x, y) で捉えてみよう。この座標系に固定した単位ベクトル (基底ベクトル) を $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$ とする。この座標系でベクトル \mathbf{A} を計った目盛りを (e^x, e^y) とする。そうするとベクトル \mathbf{A} は「平行四辺形の法則」により

$$\mathbf{A} = A^x \mathbf{e}_x + A^y \mathbf{e}_y \quad (1)$$

と表され、この (A^x, A^y) を反変成分と言う。次に、 y 軸に直交するように 1 軸を、 x 軸に直交するように 2 軸をとり、その座標系に固定した単位ベクトルを $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ とする。ベクトル \mathbf{A} から x 軸、 y 軸にそれぞれ垂線を下ろしたところの目盛りを (A_x, A_y) とし、これを共変成分と呼ぶ。といってもベクトル \mathbf{A} は、冒頭の図から明らかかなように

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{e}_x + A_y \mathbf{e}_y$$

とは表されないことに注意が必要 (このへんの話は後ほど計量行列の項で詳しく見てみます)。ベクトル \mathbf{A} は「平行四辺形の法則」により

$$\mathbf{A} = A_1 \mathbf{e}^1 + A_2 \mathbf{e}^2 \quad (2)$$

ここで、三角形 OA_1A_x と Oe^1A^x 、三角形 OA_2A_y と Oe^2A^y に注目すると、それぞれ相似の関係になっていることがわかる。つまり

$$\mathbf{e}_x : A_x = \mathbf{e}^1 : A_1 \quad (3a)$$

$$\mathbf{e}_y : A_y = \mathbf{e}^2 : A_2 \quad (3b)$$

の関係がある。さて、

- A_x, A_y という目盛りは $x - y$ 座標系において、単位ベクトル $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$ で計った目盛りの値
- A_1, A_2 という目盛りは $1 - 2$ 座標系において、単位ベクトル $\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2$ で計った目盛りの値

であった。座標系 $(1, 2)$ に固定された単位ベクトル $\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2$ は、座標系 (x, y) に固定された単位ベクトル $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$ の座標系 $(1, 2)$ への投影である。つまり、 $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$ が引き伸ばされたものが $\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2$ であるということになる¹。くどいようだが、目盛りのスケールが変わったことに注意してほしい。ということで (3) は、実は

$$A_x = A_1 \quad (4a)$$

$$A_y = A_2 \quad (4b)$$

ということになる。この辺りの事情は図を見るかぎりよく分からないので注意を要する。以上、整理すると、ベクトル \mathbf{A} は次の 2 つの表現で表すことができることになる。

$$\mathbf{A} = A^x \mathbf{e}_x + A^y \mathbf{e}_y \quad (5a)$$

$$= A_1 \mathbf{e}^1 + A_2 \mathbf{e}^2 \quad (5b)$$

(5) は反変成分と共変基底ベクトルという組合せ、(17) は共変成分と反変基底ベクトルの組合せになっている。ベクトルを 2 つの方向に分解する時は、必ずこのように共変と反変のペアになることは重要なポイントなので、覚えておいてほしい。

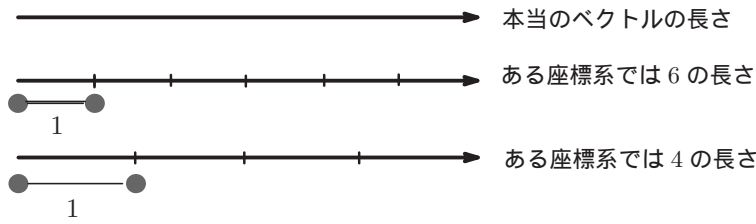
【補足】

冒頭の「物理のかぎしっぽ」から引用させていただいた素晴らしい解説を載せておきます。

『基底ベクトルの長さ (基準) が 2 倍になれば、座標成分 (見え方) は $1/2$ に』『基底ベクトルの長さ (基準) が 4 倍になれば、座標成分 (見え方) は $1/4$ に』と、基底ベクトルの長さとして、その座標における座標成分とは反比例の関係にならなければ、本当のベクトルの長さを不変に保てないことが分かります。『本当のベクトルの長さは座標系によらない』ということ覚えていれば、基底ベクトルの座標変換と成分の座標変換が、ちょうど逆の関係になることが、むしろ当然のように思えてこないでしょうか。

¹座標 (x, y) を反変系、 $(1, 2)$ 共変系と考えるとここで言っていることは逆になります。

座標変換とはベクトルを観察する視点を変更することであって、ベクトルそのものの本当の長さをかえることではありません。あくまで、観察者の見方の変化です。



基底ベクトルの座標変換

ここでは基底ベクトルの座標変換を見ていく。基底ベクトル (e_i) を (e'_i) ($i = 1, 2, 3$) に変換してみよう。この変換は行列形式で書くと次のように表される。

$$\begin{pmatrix} e'_1 \\ e'_2 \\ e'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} \quad (6)$$

(a_i^j) は変換行列、 a_i^j を変換係数と呼ばれる。変換後の基底ベクトルは

$$e'_i = a_i^1 e_1 + a_i^2 e_2 + a_i^3 e_3 = \sum_{k=1}^3 a_i^k e_k \equiv a_i^k e_k \quad (7)$$

となる²。この逆変換は (6) の行列 (a_i^j) の逆変換が存在し、それを (b_i^j) とすると、

$$b_i^j = \begin{pmatrix} b_1^1 & b_1^2 & b_1^3 \\ b_2^1 & b_2^2 & b_2^3 \\ b_3^1 & b_3^2 & b_3^3 \end{pmatrix} \quad (8)$$

単位行列を I として $ab = I$ であるから、各成分の間には次の関係式が成り立つ。

$$a_i^k b_k^j = \delta_i^j = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases} \quad (9)$$

ということで、基底ベクトル e_i は、次のように書ける。

$$e_i = b_i^1 e'_1 + b_i^2 e'_2 + b_i^3 e'_3 = \sum_{k'=1}^3 b_i^{k'} e'_{k'} \equiv b_i^{k'} e'_{k'} \quad (10)$$

(10) に (7) に入れると

$$e_i = \sum_{k=1}^3 \sum_{j=1}^3 b_i^k a_k^j e_j \quad (11)$$

これから、変換係数には次の関係が要求される³。

$$\sum_k b_i^k a_k^j = b_i^k a_k^j = \delta_i^j \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases} \quad (12)$$

ベクトル成分の座標変換

次に、ベクトル成分の変換を調べていくことにする。反変基底 (e^i) と共変基底 (e_j) は

$$e^i \cdot e_j = \delta_i^j = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases} \quad (13)$$

²同じサフィックスが上下に一つずつ現われるときには、合計記号を省略するというアインシュタイン規約を用いた。

³例えば $e_1 = b_1^k a_k^1 e_1 + b_1^k a_k^2 e_2 + b_1^k a_k^3 e_3$ より $b_1^1 a_1^1 = 1$ 他の係数は 0 となります。この関係式は先ほどできましたね。

という関係にあった。この関係を使うと、(7)の変換係数は基底の内積を使って

$$a_i^k = \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}^k \quad (14)$$

と求まる。同様にして(10)の変換係数は

$$b_i^k = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}'^k \quad (15)$$

ベクトル \mathbf{A} は(2)より

$$\mathbf{A} = A_1 \mathbf{e}^1 + A_2 \mathbf{e}^2 + A_3 \mathbf{e}^3 = A_k \mathbf{e}^k \quad (16)$$

と表される。この両辺に \mathbf{e}_i をかけると

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{A} &= \mathbf{e}_i \cdot A_j \mathbf{e}^j = A_j \delta_i^j = A_i \\ &= A_k \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^k = a_i^k A_k \end{aligned}$$

これから

$$A_i = a_i^k A_k \quad (17)$$

と求まる。この変換式は基底ベクトルの座標変換(7)と同じ変換式ということに注目しよう。このように、基底ベクトルと同じ変換式に従うベクトル $\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3)$ を共変ベクトルと呼んでいる(“共”に変わるということか)。

今度はベクトル \mathbf{A} を

$$\mathbf{A} = A^1 \mathbf{e}_1 + A^2 \mathbf{e}_2 + A^3 \mathbf{e}_3 = A^k \mathbf{e}_k \quad (18)$$

とおいて、両辺に \mathbf{e}^i をかけると

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^i \cdot \mathbf{A} &= \mathbf{e}^i \cdot A^j \mathbf{e}_j = A^j \delta_j^i = A^i \\ &= A^k \mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}_k = a_k^i A_k \end{aligned}$$

これから

$$A^i = a_k^i A^k \quad (19)$$

と求まる。(17)の変換係数の添字が上下で反転していることに注目。この変換式に従うベクトルを反変ベクトルと呼んでいる。

計量行列とベクトルの長さ

この項では斜交座標で顔をだす計量行列というものを定義していく。
共変成分は下図からわかるように、ベクトル \mathbf{A} と共変基底ベクトル \mathbf{e}_1 の内積で与えられる。

$$A_i = \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

具体的に計算すると

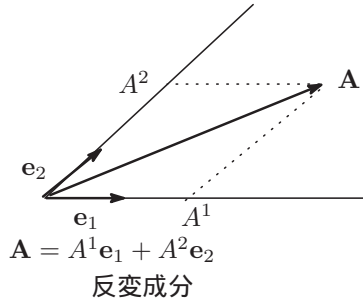
$$A_i = \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_i = (A^1 \mathbf{e}_1 + A^2 \mathbf{e}_2 + A^3 \mathbf{e}_3) \cdot \mathbf{e}_i = A^1 \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_i + A^2 \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_i + A^3 \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_i \quad (20)$$

となる。ここで、 $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_i$ という基底ベクトルの内積がでてきた。普段慣れている直交座標系では $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2$ などは0になるから、 $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_i$ という内積などは特に気にされなかったと思うが、いまは斜交座標なのでこのような量がでてくることになる。つまり、この内積は斜交座標系を特長づける量だということになる。そこで、この量をあらためて

$$g_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (21)$$

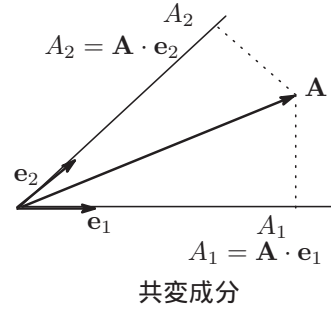
と書き、 g_{ij} は計量行列と呼ばれる。計量行列は、すぐわかるように、

$$g_{ij} = g_{ji}$$



$$A_i = g_{ij} A^j$$

$$A^i = g^{ij} A_j$$



と対称行列であり、その逆行列を $(g_{ij})^{-1} = g^{ij}$ と書くと

$$\sum_{\mu=1}^2 g^{i\mu} g_{\mu j} = g^{i\mu} g_{\mu j} = \delta_j^i = \begin{cases} 0 & (i \neq j) \\ 1 & (i = j) \end{cases} \quad (22)$$

となる。ついでに添字が上についた次の量も定義しておくが、これも計量行列と呼ばれる。

$$g^{ij} = \mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}^j \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (23)$$

(20) は、計量行列を使うと

$$A_i = A^1 g_{1i} + A^2 g_{2i} + A^3 g_{3i} = \sum_{\mu=1}^3 A^\mu g_{\mu i} = g_{\mu i} A^\mu \quad (24)$$

と書ける。(24) の逆の関係式は、両辺に g^{ki} をかけると

$$g^{ki} A_i = g^{ki} g_{i\mu} A^\mu = \delta_\mu^k A^\mu = A^k$$

となって

$$A^k = g^{k\mu} A_\mu \quad (25)$$

と得られる。ここで g^{ij}, g_{ij} は添字を上げ下げする効果があることに留意しよう。次に、ベクトル \mathbf{A} の長さを求めてみよう。ベクトルの長さは内積 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}$ で与えられるので

$$\begin{aligned} |\mathbf{A}|^2 &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = (A^1 \mathbf{e}_1 + A^2 \mathbf{e}_2 + A^3 \mathbf{e}_3)^2 \\ &= (A^1)^2 \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 + 2A^1 A^2 \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 + 2A^2 A^3 \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 + 2A^2 A^3 \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 + (A^2)^2 \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 \\ &= g_{\mu\nu} A^\mu A^\nu \\ &= A_\nu A^\nu \end{aligned} \quad (26)$$

となる。この式は (26) は相対論でよくお目にかかるものである。

この項の最後に、計量行列が座標変換でどのような変換を受けるのかを見ておくことにする。

$$\begin{aligned} g'_{ij} &= \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}'_j = (A_i^\mu \mathbf{e}_\mu) \cdot (A'_j \mathbf{e}_\nu) = A_i^\mu A'_j \mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\nu \\ &= A_i^\mu A'_j \nu g_{\mu\nu} \\ &= g_{\mu\nu} A_i^\mu A'_j \end{aligned} \quad (27)$$

2 階テンソル

いよいよテンソルの話に入ってきました。テンソルには 2 階テンソルを始め、3 階、4 階、... と高階テンソルと呼ばれるものや、混合テンソル等々、いろんな種類があることは聞かれたことがあると思います。ここではもっともシンプルな 2 階テンソルを見ていくことにします。

2階テンソル⁴とは任意のベクトルを別のベクトルへ変換する線形作用素である。具体的に言えば、ある線形変換を T として任意の数を α 、任意のベクトルを \mathbf{a}_1 、 \mathbf{a}_2 とすると

$$T(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) = T(\mathbf{a}_1) + T(\mathbf{a}_2) \quad (28a)$$

$$T(\alpha\mathbf{a}) = \alpha T(\mathbf{a}) \quad (28b)$$

が成り立つ⁵。2階テンソルに添字が2つあり、上上、上下、下下の組合せがあるが、添字の上下に応じて混合テンソル (T_i^j)、共変テンソル (T_{ij})、反変テンソル (T^{ij}) と呼んでいる。例えば、共変ベクトルを共変ベクトルに変換する関係式 (17) や反変ベクトルを反変ベクトルに変換する関係式 (19) の変換係数は混合テンソルの例で、(24)(25) の計量行列 (計量テンソル) は、それぞれ反変テンソル、共変テンソルと呼ばれる。

$$\left. \begin{array}{l} \text{共変ベクトル} \rightarrow \text{共変ベクトル} : A_i = a_i^k A_k \\ \text{反変ベクトル} \rightarrow \text{反変ベクトル} : A^i = a_k^i A^k \end{array} \right\} a_i^j : \text{混合テンソル}$$

$$\begin{array}{l} \text{共変ベクトル} \rightarrow \text{反変ベクトル} : A_i = g_{ij} A^j \\ \text{反変ベクトル} \rightarrow \text{共変ベクトル} : A^i = g^{ij} A_j \end{array} \quad \begin{array}{l} g_{ij} : \text{共変テンソル} \\ g^{ij} : \text{反変テンソル} \end{array}$$

テンソルの座標変換

それでは、基底ベクトル \mathbf{e}_i はテンソル T によってどのように変換されるか見ていこう。テンソル T で変換されたベクトルは基底ベクトル \mathbf{e}_i の一次結合で表されるので、

$$\left. \begin{array}{l} T(\mathbf{e}_1) = T_1^1 \mathbf{e}_1 + T_1^2 \mathbf{e}_2 + T_1^3 \mathbf{e}_3 \\ T(\mathbf{e}_2) = T_2^1 \mathbf{e}_1 + T_2^2 \mathbf{e}_2 + T_2^3 \mathbf{e}_3 \\ T(\mathbf{e}_3) = T_3^1 \mathbf{e}_1 + T_3^2 \mathbf{e}_2 + T_3^3 \mathbf{e}_3 \end{array} \right\} \rightarrow T(\mathbf{e}_i) = T_i^\mu \mathbf{e}_\mu \quad (i = 1, 2, 3) \quad (29)$$

と表せる。ここで、 T_i^j はテンソル T の混合成分と呼ばれる。次に、計量行列 $g_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j$ であることを思い出し、(29) の両辺に \mathbf{e}_i をかけ、その量を T_{ij} と書くと

$$\begin{aligned} T_{ij} &= \mathbf{e}_i \cdot T(\mathbf{e}_j) = \mathbf{e}_i \cdot (T_i^\mu \mathbf{e}_\mu) = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_\mu T_j^\mu \\ &= g_{i\mu} T_j^\mu \end{aligned} \quad (30)$$

となる。この T_{ij} はテンソル T の共変成分と呼ばれる。テンソル成分の座標変換は、(29) と (7) を使って

$$\begin{aligned} T(\mathbf{e}'_i) &= T_i^{\mu'} \mathbf{e}_{\mu'} = T_i^{\mu'} (a_\mu^{\nu'} \mathbf{e}_\mu) \\ &= a_\mu^{\nu'} T_i^{\mu'} \mathbf{e}_\nu \end{aligned}$$

となる。一方、左辺は

$$\begin{aligned} T(\mathbf{e}'_i) &= T(a_i^\mu \mathbf{e}_\mu) = a_i^\mu T(\mathbf{e}_\mu) \\ &= a_i^\mu T_\mu^{\nu'} \mathbf{e}_{\nu'} \end{aligned}$$

これより

$$a_i^\mu T_\mu^{\nu'} = a_\mu^{\nu'} T_i^{\mu'} \quad (31)$$

が得られる。(31) の両辺に (a_i^j) の逆行列 (A_ν^ξ) をかけると

$$A_\nu^\xi a_i^\mu T_\mu^{\nu'} = A_\nu^\xi a_\mu^{\nu'} T_i^{\mu'} = \delta_\mu^{\xi'} T_i^{\mu'}$$

となつて、左辺右辺を入れ替えれば

$$T_i^{\xi'} = A_\nu^\xi a_i^\mu T_\mu^{\nu'} \quad (32)$$

⁴一般に n 個の任意のベクトル x_1, x_2, \dots, x_n に対して実数値 $T(x_1, x_2, \dots, x_n)$ を対応させる関数 T があって、それぞれのベクトル変数について線形性 $T(x_1, \dots, x_r + x_r', \dots, x_n) = T(x_1, \dots, x_n) + T(x_1, \dots, x_r', \dots, x_n)$, $T(x_1, \dots, \alpha x_r, \dots, x_n) = \alpha T(x_1, \dots, x_r, \dots, x_n)$ が成り立つとき、関数 T を n 階のテンソルといい、 n をそのテンソルの階数と呼んでいます。

⁵(28) は線形作用素の定義。

が得られる。これがテンソル T の混合成分 T_i^j の座標変換式である。

次に (34) の共変成分の座標変換を調べよう。上と同様にして

$$\begin{aligned} T'_{ij} &= \mathbf{e}_i' \cdot T(\mathbf{e}_j') = a_i^\mu \mathbf{e}_\mu \cdot T(a_j^\nu \mathbf{e}_\nu) = a_i^\mu a_j^{\nu\mu} \mathbf{e}_\mu \cdot T(\mathbf{e}_\nu) \\ &= a_i^\mu a_j^\nu T_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (33)$$

が得られる。これが、テンソル T の共変成分 T_{ij} の変換式となる。さて、混合、共変とやってきたから、残る反変の変換式は？ということになるが、これは (33) の添字を上下に上げ下げしてやればいいだけの話となる。つまり

$$T'^{ij} = a_\mu^i a_\nu^j T^{\mu\nu} \quad (34)$$

これがテンソル T の反変成分 T^{ij} の変換式となる。

♣ Q&A ———

- K氏：以上だけど、わかってくれた？ まだまだ言い足りないことが沢山あると思うけど、それはまた別の機会としよう。ちょっと疲れたからね。。
- キャサリン：ありがとうございます、お疲れさまでした。なんとなくわかったような気になってきたわ。しかしまっ、世の中真っ正直に見ていたら気付かなかったものが、斜めに見るとその重なりが解けて実態が見えてくるといった感じね。粒子に反粒子というようになにかペアになっている構造が世の中の実態の構造なのかしら。双対というのは、話は飛ぶけどディラックのブラケットなんかを勉強する時には、その辺の知識があれば理解も深まりそうね。教えて頂いたサイトで勉強するわ。
- K氏：うん、がんばってね。斜交座標はまだ座標軸がまっすぐたっただよね。世の中いろいろあって、座標が曲がっている曲線座標系というのもあるだろう。地球儀をよく例に取り上げられると思うけど。この辺りの話になると一般相対論の世界に入っていく、僕にはまだワカラン世界だ。キャサリンに負けないように僕も勉強していこうと思うよ。ところで、物性論によくでてくる逆格子というのがあるだろ。双対基底の話と引っ掛けてこのあたりもちょっと調べておくといいと思うよ。
- キャサリン：逆格子ベクトルね。そういえば、話は共通しているみたい。調べてみるわ。まっ、そういうことで、今日のお話をもう一度復習してみるわ。わからないことがでてきたらまたよろしくお願ひします。今日は本当にありがとうございます。そろそろお昼ね。お礼にお昼をご馳走したいとこなんだけど、これから彼と昼食の約束をしているので、悪いけどこれで失礼します。
- K氏：それはお楽しみなことだね。僕の方は気にしなくていいから、行ってらっしゃい。それじゃね～。

(了)