時計の遅れとローレンツ収縮

2004.02.08 by KENZOU

はじめに

これから特殊相対性理論のほんのさわりだけをまとめてみようと思います。それは走っている物体の時計の遅れとローレンツ収縮についてです。最初はびっくりしますが、そのうち徐々に座標と時間を一緒くたに考える考え方に慣れてくると思いますので、しばらくお付きあいください。

特殊相対性理論

特殊相対性理論は次の２つの公理の上にたてられた理論体系です。

- 物理法則はすべての慣性系においてその形が変わらない … **アインシュタインの相対性原理**
- 光の真空中の速度は光源の運動状態によらず、すべて相等しい値をもつ … **光速度不変の原理**

「特殊」という理由は、上の２つの原理が慣性系に限って（互いに加速度をもつ系の間の関係は除かれている）要請されているところからきています。慣性系という制限をつけない理論、つまり互いに加速しているような系の間の関係を問題にする理論を一般相対性理論といって、特に重力の問題などを扱いますが、この話はここではやりません。
さて、上の２つの要請から次のような我々の通常の常識をひっくり返すようなことが導かれます。

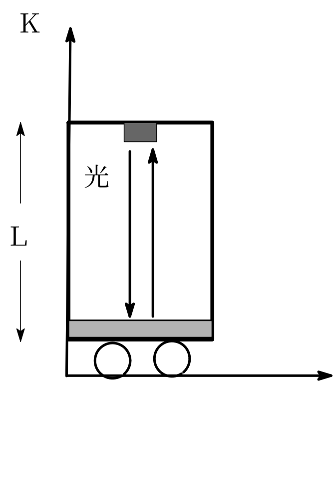
- 等速度で動いている人の時計は静止している人の時計に比べてゆっくり進む … **時計の遅れ**
- 等速度で動いている棒は静止している人からみれば縮んで見える … **ローレンツ収縮**

時計の遅れ

速度 V で走っている電車の上壁から光（信号）が発射され、時間 T 後に対向する壁の鏡に達し、鏡で反射された光がもとに戻ってくるまでの時間を、電車に乗っている人の時計を見た場合と電車の外にいる静止している費との時計を見た場合について時間を比べて見ましょう。
まず電車に乗っている人の時計では、光は光速 c で距離 L の間を往復しますので、かかった時間は

$$\triangle t' = \frac{2L}{c}$$

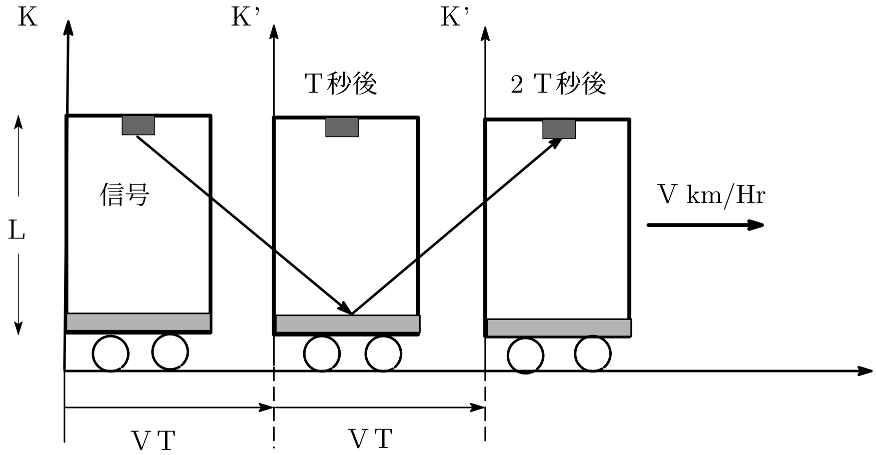
となります。



一方、電車の外にいる人の時計ではどうなるかというと、図より、光が走る距離 cT は、ピタゴラスの定理から

$$(cT)^2 = L^2 + (VT)^2$$

となりますね。往復にかかる時間を$\triangle t$ とすると



$$\begin{aligned} \triangle t &= 2T = \frac{2L}{\sqrt{c^2 - V^2}} \\ &= \frac{\triangle t'}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}} \end{aligned} \tag{1}$$

これから動いている人の時計の刻みは止まっている人から見ると $1/\sqrt{1 - V^2/c^2}$ 倍ゆっくりと時刻を刻んでいることとなります。これを**時間の遅れ**と呼んでいます。ここで電車の速度 V が光速に比べて圧倒的に遅い場合（日常）には、$V/c \longrightarrow 0$ となりますので、$\triangle t = \triangle t'$ となって、時計の遅れなどまったく気にしなくてすみます。

ローレンツ収縮

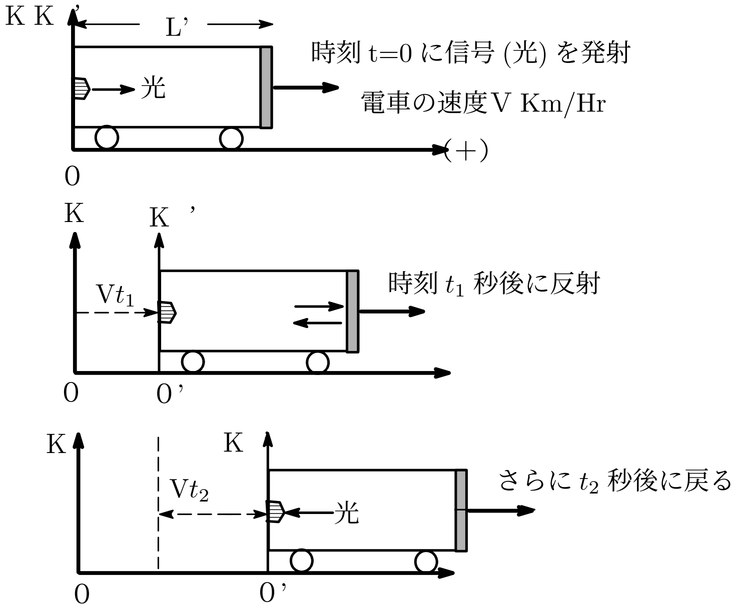
速度 V で走っている電車の壁から光（信号）が発射され、時間 t_1 後に対向する壁の鏡に達し、反射された光はその後 t_2 時間で戻ってきたとします。

電車の外の静止している人から見た電車の長さを L' とし、信号の速度を cKm/h とします。観測者は電車の外にいる人として、信号が発射され、電車の一方の鏡に達するまでの時間を t_1 、反射された信号が元に戻ってくるまでの時間を t_2 とすると、

$$(V + c)t_1 = L' + Vt_1 \longrightarrow t_1 = \frac{L'}{c}$$
$$(c - V)t_2 = L' - Vt_2 \longrightarrow t_2 = \frac{L'}{c}$$

となります。ここまでは Newton 力学の世界です。特殊相対性理論では、どんな慣性系においても光の速度は一定の c という値を取りますから、上の式で

$$V + c = c \tag{2}$$
$$c - V = c \tag{3}$$



とならなければなりません。これを上式に代入すると

$$ct_1 = L' + Vt_1 \longrightarrow t_1 = \frac{L'}{c-V} \tag{4}$$

$$ct_2 = L' - Vt_2 \longrightarrow t_2 = \frac{L'}{c+V} \tag{5}$$

一方、電車の中にいる人から見た光の往復に要する時間を$\triangle t'$とすると

$$\triangle t' = \frac{2L}{c} \tag{6}$$

ですね。電車の外の静止している人から見た光の往復に要する時間を$\triangle t$とすると

$$\begin{aligned} \triangle t &= t_1 + t_2 = \frac{L'}{c-V} + \frac{L'}{c+V} \\ &= \frac{2cL'}{c^2 - V^2} = \frac{L'}{L} \cdot \frac{\triangle t'}{1 - \dfrac{V^2}{c^2}} \end{aligned} \tag{7}$$

走っている時計は「時計の遅れ」の項で見たように

$$\triangle t' = \triangle t \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \tag{8}$$

となりますから、電車の外から見た走っている電車の長さ L' は

$$L' = L\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \tag{9}$$

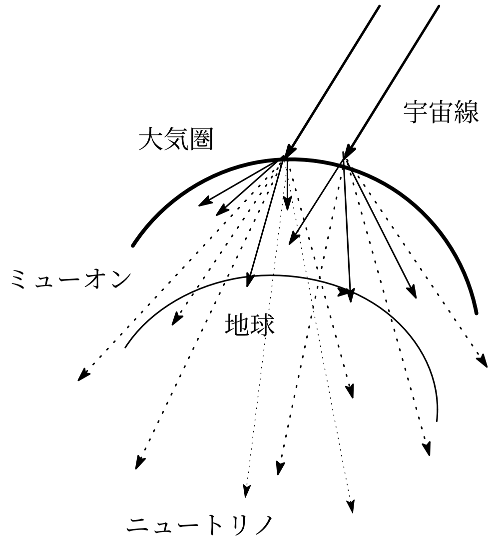
となります。つまり、動いている電車の長さは静止状態の長さから動いている方向に $\sqrt{1 - V^2/c^2}$ だけ縮んで見えることになりますね。これを**ローレンツ収縮**とよんでいます。ここで電車の速度 V が光速に比べて圧倒的に遅い場合（日常）には、$V/c \longrightarrow 0$ となりますので、$L' = L$ となって、長さが縮むことなどまったく気にしなくてすみます。
まぁ、特殊相対性理論の理屈はあらまし分かった。ところで例えば運動している時計の時刻はゆっくり進むなど、何か実験事実でもあるのか？と当然なりますよね。そこで、最後に宇宙線の話をおまけとしてつけておきます。宇宙線といってもびっくりしないでください。読んでいただければ分かる内容ですから。

ミューオンの寿命

地球には太陽から放射された宇宙線が降りそそいでいますが、この宇宙線が大気圏に突入するとミューオンという素粒子がつくられ、その一部は地表まで降ってきます（ニュートリノも同時に作られ、これが地球内部を貫通するというようなことはノーベル賞を受賞された小柴さんで有名ですね)。このミューオンは静止している場合、$\tau = 2 \times 10^{-6}$ 秒、つまり百万分の２秒程度の時間で崩壊しますから、かりに光速（３０万 Km/Hr）で走ったとしても 600 メートル程度しか走れないはず、ということになり、地表まで届くのはとても無理なはず､､､となりますが、現実には地表で観測されている。どういうこと ??? となる訳ですが、ここで走っているモノの時計は遅れるという**時計の遅れ**を思い出してください。先ほどのミューオンの寿命はミューオンと一緒に走っている慣性系での寿命であり、地表の我々が観測する寿命は $1/\sqrt{1-V^2/c^2}$ 倍長くなりますね。

$$t = \frac{\tau}{\sqrt{1-V^2/c^2}}$$

光速の 99.99%で走る場合には、寿命が 100 倍のびることになり、10,000 メートルの大気圏を突き抜けて地表まで到達するということになるのです。



以上で特殊相対性理論についての小稿をおわります。ご理解いただけましたでしょうか。お疲れさまでした。[1]

[1] この文章は $LATEX2\epsilon$ の練習もかねて書きました。誤り等を発見されれば是非一報ください。