宇宙と時間について・そのＱ＆Ａ

KENZOU

2004 年 4 月 17 日

本稿は謎好きアリスさんから拙稿「宇宙と時間」を読まれて寄せられたご質問（楽しい物理の小部屋・掲示板参照）への回答です。回答の中身は，いろいろごたごたしたり，数式をいじくったりと結構寄り道をしながら進めていますので，甚だ読みづらいものがあろうかと思います。しかし，まぁそこは適当に割り引きながら読んでいただければ，回答の意図するところをつかんでいただけるのではないかと厚かましくも思ったりしています。例によって，私の知識不足による誤解や誤った記述も多々あろうかと思いますが，もしそれを発見されましたら，遠慮なくどしどしとご指摘ください。また，この回答を読まれて新たな疑問が湧いてきた場合も，掲示板に $|\,\mathrm{Q}\,\rangle$ を飛ばしていただければ何らかの回答を差し上げられると思います。さて，それではそろそろ参りましょうか。

−−

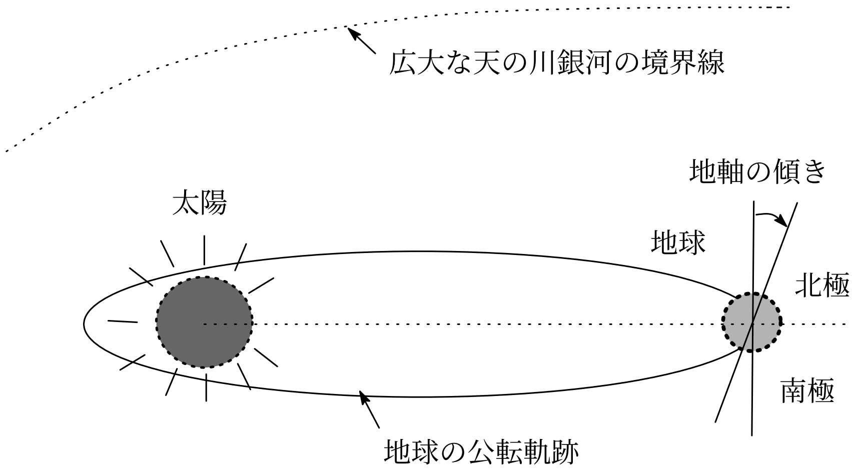
Ｑ１＞地軸は中心から２３．５度傾いているが，いったいどの方向に傾いているのか？ 宇宙はどこから見ても同じなのに，太陽に向かってか？ それとも $\cdots$？
この数式（注:$Robertson-Walker$ の計量）で地軸の傾き方を表わすことができるのか？

Ａ１＞謎好きアリスさんの仰っているとおり季節の変化は地軸に傾きがあるからおきます。これは太陽の日照具合の変化によるわけですね。ところで地軸の傾きは一体何に対する傾きかとなると，太陽と地球を結ぶ直線に垂直でかつ地球の中心を通る直線からの傾きと規定されています。下の絵をご覧になってください。

宇宙空間にたいする地軸の傾きを求めることができるのか？　求められます。それにはまず宇宙空間に適当な座標軸を設定しなければなりません（そうしないとこの問い自体が意味をなさなくなる）。普通はこの座標軸を上で述べたようにとるわけです。ちょっと循環論法のようになり恐縮ですが，傾きというものはあくまで相対的なものなのですね。

$Robertson-Walker$ の計量の式で地軸の傾きが求まるのか？ということに対する答えは遺憾ながらノーとなります[1]。この式はもろもろの銀河から構成される宇宙の構造（空間の歪）を表現している式なのです。それではその式は一体どういうプロセスからでてきたのかという点を少しだけ触れておきましょう。もっとも，少し微分計算を使いますので興味がなければ読み飛ばしていただいて一向に差し支えありません。

[1] といいきりましたが，無理をすればできないことがないかも知れません（←非常に不確か）。



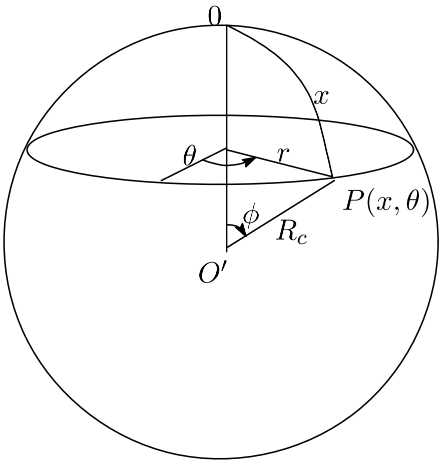
●地軸の傾き:太陽と地球を結ぶ直線に垂直な軸との傾き

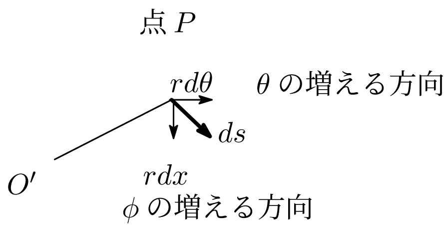
【余談】球の表面は曲率が正の一様等方な 2 次元の面となります。球の半径を R_c としますと，曲率 K は $K = \frac{1}{K^2}$ で定義されます。球の北極点を球面上の原点 0 として，適当な方向からの角度 θ と原点からの測地的距離を x，球の軸から点 $P(x, \theta)$ を見る角を ϕ とします。すると次の関係式がでてきます。

$$x = R_c\phi, \qquad sin\phi = \frac{r}{R_c} \tag{1}$$

これから

$$r = R_c sin\phi = R_c sin\left(\frac{x}{R_c}\right) \tag{2}$$





（2）の r の微小変化を求めると（ x で微分する要領で）

$$dr = Rc\left(\frac{1}{R_c}\right) cos\left(\frac{x}{R_c}\right) dx = cos\left(\frac{x}{R_c}\right) dx \tag{3}$$

（3）と（2）より

$$dr^2 = cos^2\left(\frac{x}{R_c}\right)dx^2 = \left[1 - sin^2\left(\frac{x}{R_c}\right)\right]dx^2 \tag{4}$$

$$= \left[1 - \left(\frac{r}{R_c}\right)^2\right]dx^2 \tag{5}$$

$$\therefore \quad dx^2 = \frac{dr^2}{(1 - Kr^2)} \tag{6}$$

ここで K は先ほどでてきた曲率です。さて，球面上の 2 次元線素を ds とするとピタゴラスの定理により

$$ds^2 = dx^2 + r^2 d\theta^2 \tag{7}$$

$$= \frac{dr^2}{(1 - Kr^2)} + r^2 d\theta \tag{8}$$

ここで時間と空間は同じ仲間（相対論の要請）という時空の概念より，2 点間の時間差 dt を導入して（8）を

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{dr^2}{(1 - Kr^2)} + r^2 d\theta \tag{9}$$

とします。ここで dt^2 にマイナスがついていますが，これを説明すると長くなるのでここではそうなんだと思っておいてください。（9）は前出の $Robertson - Walker$ の式とよく似ていますね。これ以上この話を続けると余談が長くなりすぎるのと微分幾何学という数学の知識が必要となりますのでこれ以上立ち入らないことにしますが，上の議論をもっと一般化してやると $Robertson - Walker$ の式がでてくるという程度に理解しておいてください。

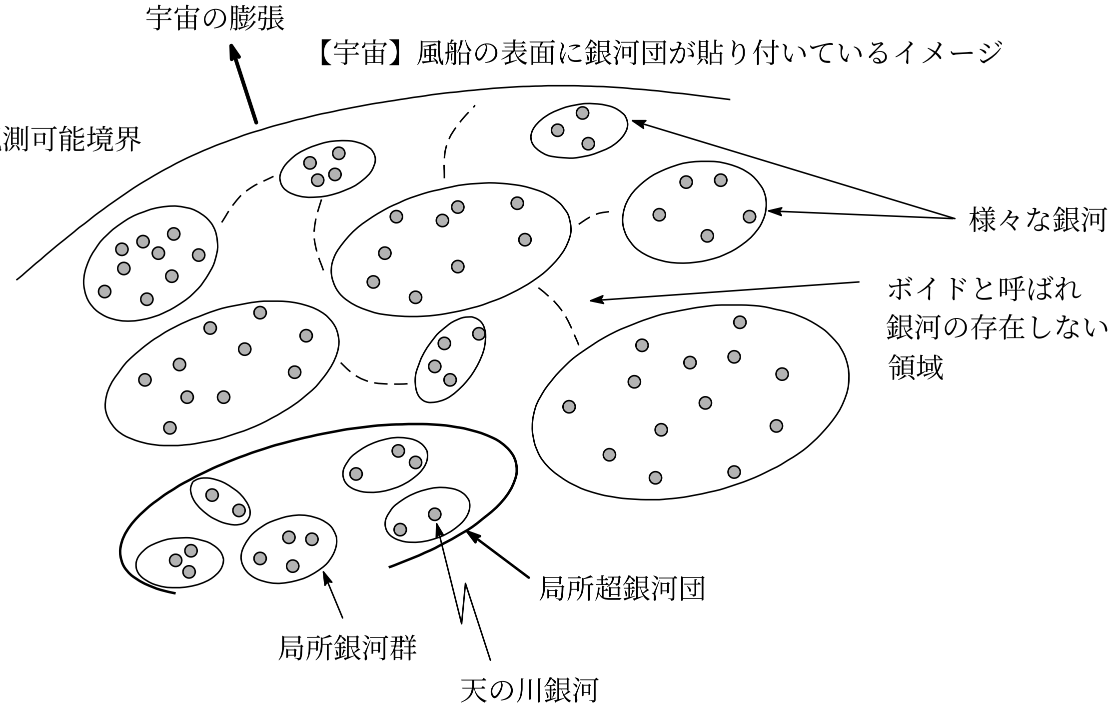
−−−【余談おわり】

Ｑ２＞宇宙が膨張しているのであれば，地球を中心に膨張しているのでない限り，地球に向かって突進してくる銀河があっても不思議ではない？

Ａ２＞このご質問に対する答えは，謎好きアリスさんがご指摘されているように本稿の「コーヒーブレイクその３」に書いておりますが，ここではもう少しビジュアルに迫ってみましょう。

宇宙にはさまざまな規模の銀河が集団を形成しており，宇宙空間に網の目を張るように分布しているといわれます。この網の目に囲まれたところは，銀河がほとんど存在していない空間になっており,「ボイド」と呼ばれ，その直径は数億光年の規模といわれています。この風船に張りついたような銀河団は宇宙の膨張（風船の膨張）につれて互いに遠くはなれているのですね。したがって，地球によその銀河がぶつかるということは起こりえないわけです（←助かった !! ）。

しかし，ＳＦ小説なんかでよく描かれるように，ほかの惑星が地球に向かって大突進ということはあり得ますね。それは天の川銀河の中のほんのミクロな現象で，そういう世界では惑星間の衝突もありえる。しかし，銀河団の膨張というというマクロな世界では銀河同士の衝突は起こらないとうことです。分かりやすい例えがあればいいのですが，少し思いつきませんのでこの辺でご勘弁ください。



※我々の太陽系は天の川銀河のほんの一端に存在している

Ｑ３＞ものごとは常に乱雑な方向に進むという法則（エントロピー増大の法則）がなぜ時間の矢が前進するしかないことの証明になるのか？　10 個の球がＢのように分布する確率がいかに低いものであれ，Ｂの実現が起きたとき，時間が逆方向に流れたと考えることはできないのだろうか？

Ａ３＞いずれも難問ぞろいであったが，これはその中でも特に。。。ということで一番最後に回したわけですが，いよいよその答えを書かなければ。ところで，話の核心に入る前に準備運動として物理学では時間はどのように取り扱っているのかを改めて簡単にレビューしておきましょう。気楽に読み流してください。

【ニュートン力学の時間対称性】

ニュートンの運動方程式は，力を F，質量を m，加速度を $\frac{dx^2}{dt^2}$ とすると，力＝質量×加速度と表わされます。これを式で書くと

$$F = m\frac{dx^2}{dt^2} \tag{10}$$

となります。加速度というのは速度（$\frac{dx}{dt}$）を時間で微分した単位時間当たりの速度の変化ですね。ところで，運動方程式（10）の右辺をじっくりと眺めてください。加速度を表す微分式（時間に関する 2 階微分といいますが）の中に dt^2 というものが入っていますね。これがミソなんです。今，時間 t を $-t$ に置き換えてみましょう（←これを時間反転と呼んでいます）。$d(-t)^2 = dt^2$ となりますから，時間 t を $-t$ で置き換えても運動方程式

（10）は

$$F = m\frac{dx^2}{d(-t)^2} = m\frac{dx^2}{dt^2} \tag{11}$$

となって，なんにも変わりません。このことがニュートンの運動方程式は「時間反転に対して不変である」とか「時間に対して対称である」といわれる所以なのです。つまり，ニュートン力学では過去と未来は対称的に存在し，過去と未来はその区別はつかない，さらに言うと，時間が一方向に流れ ”過去 ”と ”未来 ”を峻別する時間の矢は存在しないということになります。魚魚（ギョギョ）っとされたのではないでしょうか．．．そしたら机にこぼしたコーヒーはもとの茶碗にもどって，何にもあらへんかったことが怒る，もとい，おこるのとちがうかぁ〜（←関西弁になっている）とびっくり仰天するところですが，そんなことはありえませんね。

昔，ゼンマイ時計で時を刻んでいた（←今も現役か？）振り子の運動を考えて見ましょう。振り子には空気の抵抗とか軸受けの摩擦などは一切ないものとします。するとこの振り子は永久に運動を続けますね。この様子をビデオにとって，そのフィルムを逆回し（時間反転）してご覧になってください。なんにも違和感を感じないと思います。どちらの映像がフィルムを順送りしたものか逆送りしたものか全く区別がつきません（時間対称）。

しかし，空気の抵抗や軸受けの摩擦を考える（←これが現実）と事態は異なります。振り子の運動はもしゼンマイのような動力源がなければやがて停止します。この様子を再びビデオで撮りフィルムを逆回しすれば，止まっていた振り子が突然動き出し，だんだん振れが大きくなる $\cdots$ まさにポルタガイストもどきの映像となります。ふ〜っむ，とここで考え込んでしまいますね，そして春の陽気につられてついウツラウツラと。。。．．．ふと目を覚ますとＫ氏とアリスさんがさかんに対話している情景が目に入ってきました。

- **アリス：**ニュートンの運動方程式は空気抵抗や摩擦のある場合でも成り立ちますね。つまり（10）の左辺，力のところに空気の抵抗力と軸受けの摩擦力を入れればよいわけで，この方程式は時間についての２階の微分方程式ですから，先ほどの議論からして時間対称性はなんら変わらないということですね。すると，静止している振り子がいきなり動きだし，徐々に振幅を大きくしていく振動運動がニュートンの運動方程式の解であるなら，この ”ポルタガイストもどき ”の運動も現実に存在して然るべきではないのかしら？
- **K：**无無（ムム）！？＊ピカっ，バキッ（一瞬怯んで)。。。よ〜く考えヨ〜〜っと，そもそも物理学では時間の流れなど存在しないといったらびっくりするでしょうねぇ。というのは時間の ”流れ ”というものを規定しようとすると，当然そこには ”時間の速度 ”というものが定義されなければならないと思います。しかし，時間を時間で微分するわけにも行かないし，まぁ高等数学ではそういうことをやっている分野があるのかも知れませんが，私はサッパリ知りません。それはともかく，時間の流れとか速さっていうのは人によって異なっていますね。楽しいときは時間が早く過ぎ，そうでないときは時間がそこで停滞しているようになかなか過ぎ去ってくれない，そういうことは日常茶飯事経験していますね。ここにも物理学としての時間の流れを規定できない要因があると思います。無理にそれをやれば人それぞれに固有時間というものを定義しなければならないし，その固有時間が時間の関数となる。。。人や心理に張りついた固有時間を使って運動方程式を立ててみても，運動方程式が複雑怪奇となり，果たして解けるものかどうか甚だ疑わしい（←解けるはずがない）

ということになります。
・アリス：そういわれてみればそうね，なんとなく納得。つまり，ニュートンの運動方程式が過去の時間にまで遡って解けるということとと，現実の運動が過去に時間を遡ったような運動をするということは別なんだ，ということになるのかしら？
・K：（ホッとため息をついて力強く）そうなんです。この辺をうまく切り抜けないと，何がなにやらわけが分からなくなります。
・アリス：だけど，なにか釈然としないなぁ。。。
・K：土器（ドキッ）っ！どういう点でしょうか？
・アリス：はい，ではどうして現実の世界では過去から未来への運動しか起こらないのでしょうか。
・K：（Ｋ氏いきおいこんで）まさにそれがエントロピー増大の法則という有名なヤツなんです。
・アリス：あの〜，なんの答えにもなっていないんですけど。
・K：（ガクッと音がする）おっしゃる通りです。それでは少し講釈をしてみましょう。物理学の法則の中でももっとも経験的な法則として知られるのが熱力学第２法則といわれるものです。これは「熱は高いほうから低いほうへと流れる。その逆は存在しない」という経験事実を定式化したものです。熱力学第２法則は熱の流れのように一方向，いいかえると非可逆な現象，さらにいうと時間的に非対称な現象を記述する法則です。え〜っと，ここまでいいですか？
・アリス：はい，よくわかります，どうぞ先を続けてください。
・K：（コホン！と咳払いをひとつして）え〜っと，それでですね，つまり，熱力学第２法則は，したがって，一方向に流れる現象，これを非可逆現象と呼びましたが，たとえば空間にふわふわとくゆらいでいるタバコの煙とかコーヒーにたらしたミルクの流れなど，いろいろありますが，そういう現象を記述しているのですね。これらの現象はくどいようですが，時間に対して非対称性ですね。この非対称な時間を「熱力学的時間の矢」と呼んでいるのです。ちなみにこのネーミングを与えたのは高名な英国の物理学者エディントンだったと記憶していますが（←記憶は確かでない）。
・アリス：ふ〜ん，なにか分かったような分からないような，煙に巻かれたような感じですが。もう少しピンとくるような説明ができないものでしょうか？
・K：はっ，はい，突然ですがここでエントロピー[2]というものを登場させることにします。タバコの煙とかコーヒーのミルクとか，そういう非可逆現象は系を乱雑な方向に向かわせますね。ここで乱雑といった意味は，いろいろな状態が取れるとうことを意味します。生徒が朝礼で運動場に整列したときは，その系のエントロピーは小さく，一方，朝礼が終わり生徒たちが思い思いに運動場を遊びまくっている系の状態はエントロピーが大きい，というイメージで捉えてください。そして自然の変化はすべてエントロピーが大きくなる方向に向かう，これが熱力学第２法則の要点[3]です。ただし，ここで注意しておかなければならない条件を一つ言っておかなければなりません。それは今考えている系は外部からエネルギーのやり取りがない孤立系だということです。PTA が校庭の端に顔をだし，お菓子を見せびらかすと子供たちはとたんにその周りに凝集してエントロピーが大→小という変

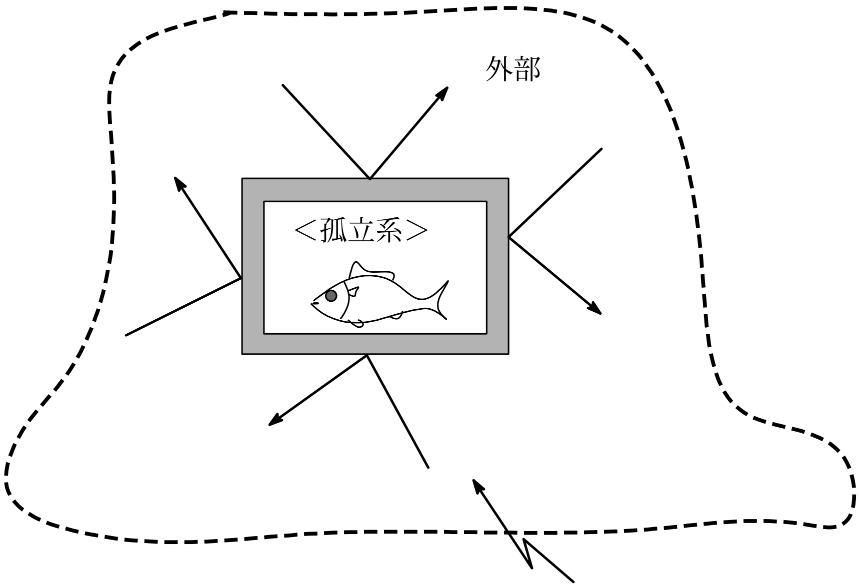
[2]エントロピーという概念は 19 世紀クラウジウスという物理学者が導入した熱力学的量のことです。
[3]熱力学第１法則：系の状態を断熱操作で変化させるとき，外界から系になされる仕事の量は途中の道筋に依らない。熱力学第３法則：絶対零度（約-273 ℃）ではすべての系のエントロピーはゼロである。

化を示しますが，外部からＰＴＡがちょっかいをだしたから孤立系ではなくなります。したがってエントロピー増大の法則は成立しないことになります。
・アリス：ふ〜ん。なにか新しい言葉がどんどんでてきて少し疲れました。孤立系というのはぼんやり分かったような気になりましたが，，，ふわ〜，あら失礼ついあくびがでました。春うららという季節ですね。
・K：本当にそうですね。春眠暁を覚えずといいますが，まさに,,,ふわ〜，オット私にもうつりましたかな。どれ少し休憩をとりましょうか，そのあとでいよいよ問題の核心に迫ることにしましょう, それでは〜. という声でハッと目が醒めました。どうも長い夢を見ていたようです。

さて，頭もすっきりしたことですし，中断したお話の続きをはじめましょう。

【孤立系】

孤立系：外部からのエネルギーのやり取りがない



外部と見なされる領域も宇宙空間から見れば
孤立系を形成していると考えられる。

孤立系というのはある閉じた系のことで，閉じた系というのは系の外とのエネルギーのやり取りがない系のことと思ってください。卑近な例でいうと発砲スチロールで密閉した密閉空間などはまさに孤立系と考えられます。外部から熱の供給が遮断されているので，冷凍材料はいつまでも冷凍のまま保存できます（←完全孤立系というのは物理の一つのモデルで現実には実現が難しいが，近似的には考えられる）。絵をみればこの辺の事情が分かると思います。熱力学第２法則はしたがって「孤立系のエントロピーは増大する」と言い換えることができます。逆にいえば開放系（孤立系の反対：校庭のＰＴＡとのやり取りなど）ではエントロピー増大の法則は成立しない。
しかし，ここで考えを広く大きく持つと，この開放系を含むトータルの系が孤立系であれは，エントロピー増大の法則は成立するということになります。冷蔵庫やクーラーなどは

熱を低いほうから高い方へと流して冷房していますが，これは一見エントロピー増大の法則に反するように見えます。しかし，外部から手を加えているからそのようなことを行うことができるので，したがって庫内は孤立系ではないのです。しかし，その外部も含めたトータルの系では，孤立系とみなすことができます。そのトータルの系では熱はやはり高いところから低いところに流れているのです。先ほどの銀河集団の絵を思い出してください。銀河の中のミクロな系では開放系であっても銀河の周りはボイドで囲まれており，その境界ではエネルギーのやり取りはないと考えられます。つまり銀河自体は孤立系をなしていると考えることができます。

さて，19 世紀末，統計力学の創始者であるオーストリアの物理学者ボルツマンは，次のようにいいました。「エントロピーは確実に増大するのではなく，統計的に増大するのである」と。エントロピー増大の可能性はエントロピー減少の可能性よりも圧倒的に高い，ということです。先ほど生徒の朝礼のところで運動場を遊びまくる生徒のことを述べましたが，遊びまくり方はさまざまなパターンが考えられます。このパターンを ”場合の数 ”（実現の確率）と考えて，その実現確率を W としますと（←あまり厳密な表現ではないが），エントロピーは次式で書けるということをボルツマンは見いだしました。

$$S = klogW$$

これが有名なボルツマンのエントロピー公式[4]です。ちなみに k はボルツマン定数と呼ばれています。ボルツマンの公式によれば，「低エントロピーの状態とは場合の数の少ない特殊な状態」といえますし，一方「高エントロピーの状態は場合の数の多い，あふれた状態」ということができます。したがって初期に系（ここでは宇宙を考えている）が特殊な低エントロピー状態にあれば, その後はありふれた状態に移る可能性が非常に高いということをいってもそれは極めて自然なことですね。この一方向性が熱力学的時間の矢の正体といっていいでしょう。
ところでここで次の疑問が湧いてきます。系が初期に特殊な低エントロピー状態にあったということをどうして証明できるのか？　この答えに厳密に答えるのは難しいので，宇宙が誕生した瞬間（ビッグバン）はそのような状態にあったということで納得しておきましょう。さて，もうすでにお気づきかも知れませんが，エントロピー増大の速さやその加速度という議論は一切触れていないですね。熱力学第 2 法則はあくまでエントロピー増大の方向を示しているだけなのです。

大分議論がごてごてしてきました。また思わず欠伸がでそうなのでそろそろこの辺でお開きにしたいと思いますが，いかがでしたでしょうか。枝葉の話は適当に切り捨て，機会を見ては考えるという線でいいと思います。ややこしいい話に気をとられて道筋を間違われないことが大切かと。。。
さて，最後になりましたが，次の大いに気になるご質問の答えをだして，この小稿をとじることとします。ここまでお付きあいくださいまして大変お疲れさまでした。また，お会いできる日を楽しみに，それではさようなら。

[4]ウィーンの中央墓地にある Boltzman の墓標にはこのエントロピーの公式が刻まれている。

＞10 個の球がＢのように分布する確率がいかに低いものであれ，Ｂの実現が起きたとき，時間が逆方向に流れたと考えることはできないのだろうか？

理論的にいえば，それはあり得ます。ただ，われわれが観測できるのはあくまでいろいろな ”場合の数 ”の 統計的平均値（期待値ともいいます）でしかありませんから，そのような現象は平均操作の中に隠れてしまって検出できないということだと思います。

$LudwigBoltzmann$ (1844 − 1906) の墓標

]