物理 Tips

～波動方程式とガリレイ変換について～

KENZOU

2008 年 5 月 19 日

♣K 氏が宇治川の川べりで周りの緑に見とれていたとき、向こうからアリスがやってきた。

- アリス：いやぁ～K さん、こんにちわ～、お久しぶりですね。お元気でお過ごしでしたか？
- K 氏：おぉ、アリス、こんにちわ。本当に久しぶりだね。君の方はいつもと変わらず元気そうだね。
- アリス：はい、おかげさまで元気に過ごしています。ところでぼんやり目が宙を浮いていたようだけど、なにか心配事でもおありなお。
- K 氏：オッと、そう見えたかい。心配事なんか何もないだけど、周りの緑に見とれていたんだよ。本当に新緑が綺麗だね。気分がリフレッシュしてくるよ。
- アリス：本当にそうね。私も久しぶりに宇治川の畔を散歩して、マイナスイオンをたっぷり吸い込ませていただいたわ。今日はちょっと時間があるし、折角 K さんにお会いできたことだから、K さんさえよろしければちょっと質問させていただいていいかしら。
- K 氏：ああ、いいよ。僕もこれといった用事はないから。
- アリス：ありがとう。いや実はねいま特殊相対性理論の勉強を始めたんだけど、いわゆるマクスウェル方程式がガリレイ変換で不変でないというところからこの理論が芽生えたわけよね。ところでマクスウェルの電磁波の波動方程式はガリレイ変換で不変でないということをチェックしようとしたけど、ちょっと数学的な取り扱いで躓いてしまって、ほったらかしにしていたの。時々思い出しはするのだけど、どうもやる気が湧いてこないのでこの機会にその辺りのお話を聞ければと思ったの。
- K 氏：う～ん、ちょっと微分に関する数学的なテクニックを知っていれば大したことではないと思うんだけど。それじゃ、はじめようか。この辺のお話は高橋康「初等相対性理論」や一石賢「Aha!相対性理論がわかった」にもわかりやすく書かれているので、図書館などで借りてフォローするといいと思うよ。
- アリス：わかりました。それじゃよろしくお願いします。

■波動方程式とダランベールの解

簡単のために 1 次元空間における空気を考えよう。音波は空気中の密度波として伝わる。例えば、音叉をたたけばチ～ンという音が聞こえるが、これは音叉の振動により周りの空気の密度が疎密に変化し、その疎密波が耳に伝わって音を聞き取ることになる。音波によって生じた空気の密度を ρ で表すと、ρ は位置 x と時間 t の関数 $\rho(x,\,t)$ である。ある瞬間を $t=0$ とおいて、その時点での密度が $f(x)$ で与えられるとしよう。

$$\rho(x,0)=f(x) \tag{1}$$

この密度（絵で描く山）が時間の経過と共に、速度 v で（形を崩さずに）右の方向に移動していくとすると、時間 t の後では

$$\rho(x,t)=f(x-vt) \tag{2}$$

と表せる。同様に、同じ速度で左に進む山を考え、それを $g(x+vt)$ で表すと、一般に左右に同じ速度 v で進む山は

$$\rho(x,t)=f(x-vt)+g(x+vt) \tag{3}$$

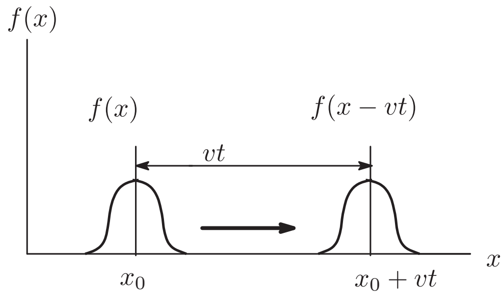


図 1: 波の移動

で表される[1]。ここで、f や g の関数の具体的な形には一切触れていないので、例えば図.2 のようなものでもなんでも勝手なものを想定してよい。(3) は 1 次元波動方程式[2]

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\rho=0 \tag{4}$$

の解で、ダランベールの解と呼ばれる。以下、波動方程式の解がダランベールの解として表されることを見てみよう。

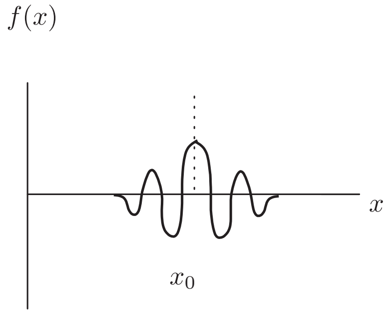


図 2: 波の形の 1 例

(3) で、$\xi=x-vt$、$\eta=x+vt$ と変数変換する。 (3) を x で微分すると

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\rho=\frac{\partial\rho}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\rho}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}=\frac{\partial\rho}{\partial\xi}+\frac{\partial\rho}{\partial\eta}=\left(\frac{\partial}{\partial\xi}+\frac{\partial}{\partial\eta}\right)\rho$$

もう一度 x で微分するわけだが、$\frac{\partial^2}{\partial x^2}=\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2$ というルール（演算子記法）を使えば 2 階微分は楽にできて、次に結果を得る。

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2}=\left(\frac{\partial}{\partial\xi}+\frac{\partial}{\partial\eta}\right)^2\rho=\frac{\partial^2\rho}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\rho}{\partial\eta^2}+2\frac{\partial^2\rho}{\partial\xi\partial\eta} \tag{5}$$

ここで $\partial^2\rho/\partial\xi\partial\eta=\partial^2\rho/\partial\eta\partial\xi$ を使った。
次に t で微分すると

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\rho &= \frac{\partial\rho}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial t}+\frac{\partial\rho}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial t}=-v\frac{\partial\rho}{\partial\xi}+v\frac{\partial\rho}{\partial\eta}=-v\left(\frac{\partial}{\partial\xi}-\frac{\partial}{\partial\eta}\right)\rho \\
\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2} &= \left\{-v\left(\frac{\partial}{\partial\xi}-\frac{\partial}{\partial\eta}\right)\right\}^2\rho=v^2\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}-2\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta}\right)\rho \\
\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2} &= \left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}-2\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta}\right)\rho \qquad (6)
\end{aligned}$$

が得られ、(5)-(6) と波動方程式（4）より

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\rho=4\frac{\partial^2\rho}{\partial\xi\partial\eta}=0 \tag{7}$$

[1]重ね合わせの原理：2 つの波 $f(x,t)$ と $g(x,t)$ が同時に存在するとき、観測される波はそれらの和 $f(x,t)+fg(x,t)$ で表される波である。

[2]3 次元の波動方程式は $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{1}{v^2}\right)\rho(\boldsymbol{x},t)=0$

となる。ここで $\partial\rho/\partial\eta \equiv \rho_\eta$ と書くと、(7) より

$$\frac{\partial \rho_\eta}{\partial \xi} = 0 \tag{8}$$

となり、これから ρ_η は変数 η だけの関数ということがわかる。そこで、この関数を $\phi(\eta)$ とする。

$$\frac{\partial \rho}{\partial \eta} = \phi(\eta) \tag{9}$$

ここで $g(\eta)$ という関数を次のように定義する。

$$g(\eta) = \int \phi(\eta) d\eta \tag{10}$$

(9) と (10) から

$$\frac{\partial}{\partial \eta}\Big(\rho - g(\eta)\Big) = 0$$

となって、$\rho - g(\eta)$ は ξ だけの関数ということになり、これを $f(\xi)$ とすると

$$\begin{aligned} &\rho - g(\eta) = f(\xi) \quad \text{より} \\ &\rho = f(\xi) - g(\eta) = f(x - vt) + g(x + vt) \end{aligned}$$

となって、ダランベールの解がでてくる。

■音波の波動方程式とガリレイ変換

波動方程式のガリレイ変換を調べるに先立ち、ガリレイ変換を少し復習をしておこう。ある静止座標系 $S(x, y, z, t)$ に対して，座標系 $S'(x', y', z', t')$ が等速度 $\boldsymbol{V}$ で運動しているとすると、座標系 S から S' のガリレイ変換は

$$\boldsymbol{x'} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{V}t \tag{11a}$$

$$t' = t \tag{11b}$$

と表されます。いま，簡単のために 1 次元座標系を考えると

$$x' = x - Vt \tag{12a}$$

$$t' = t \tag{12b}$$

となる。ここで微分演算子の関係を調べておく。適当な関数 $F = F'(x', t')$ を考えてみると (関数のダッシュは微分ではないことに注意)、

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x}F = \frac{\partial F'}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial F'}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial x} = \left(\frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial t'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t'}\right)F' \\ \therefore \quad &\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial t'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial x'} \\ &\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x'^2} \end{aligned} \tag{13a}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}F = \frac{\partial F'}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{\partial F'}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t} = \left(\frac{\partial x'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial t'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t'}\right)F' \\ \therefore \quad &\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial x'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial t'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial t'} - V\frac{\partial}{\partial x'} \\ &\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial}{\partial t'} - V\frac{\partial}{\partial x'}\right)^2 = \frac{\partial^2}{\partial t'^2} - 2V\frac{\partial}{\partial x'}\frac{\partial}{\partial t'} + V^2\frac{\partial^2}{\partial x'^2} \end{aligned} \tag{13b}$$

以上の結果を使うと、1 次元波動方程式のガリレイ変換後の結果は

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2}{\partial x'^2} - \frac{1}{v^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial t'^2} - 2V\frac{\partial}{\partial x'}\frac{\partial}{\partial t'} + V^2\frac{\partial^2}{\partial x'^2}\right) \\ &= \frac{v^2 - V^2}{v^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{2V}{v^2 - V^2}\frac{\partial}{\partial x'}\frac{\partial}{\partial t'} - \frac{1}{v^2 - V^2}\frac{\partial^2}{\partial t'^2}\right) \end{aligned} \tag{14}$$

となり、元の方程式の形が変わってしまう。つまり，波動方程式はガリレイ変換に対して不変ではないということになる。つまり、空気に対して静止している観測者に対して波動方程式

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial}{\partial t}\right)\rho(x,\, t) = 0 \tag{15}$$

が成り立っても，空気に対して一定の速度 V で動いている観測者[3]に対しては，方程式の形は

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{2V}{v^2 - V^2}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{v^2 - V^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\rho(x,t) = 0 \tag{16}$$

となり，ガリレイ変換は不変でなくなるということになる。これは、特定の座標系だけで成り立つことを意味している。

(16) の方程式の解はどう表されるか。(15) の解は

$$\rho(x,t) = f(x - t) + g(x - vt) \tag{17}$$

であったので、x，t をそれぞれ x'，t' で置き換えると

$$\rho(x,t) = \rho(x' + Vt, t') = f(x' - (v - V)t') + g(x' + (v + V)t') \tag{18}$$

となる。これが方程式 (16) の解になる。この解は，音波の伝播速度が正と負の方向で変化する。つまり、空気に対して速度 V で動いている観測者からは，音波は x 軸の正の向きに速度 $v - V$ で進み，逆の方向には速度 $v + V$ で進むということを言っているにすぎない。

■マクスウェルの波動方程式とガリレイ変換

マクスウェル方程式の波動方程式は、次のマクスウェルの方程式より導出される。具体的な導出方法は適当な電磁気学のテキスト[4]を参照されたい。

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0}, \quad \nabla \times \mathbf{E} = \partial \mathbf{B}/\partial t \\ \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0\left(\mathbf{J} + \epsilon_0 \partial \mathbf{E}/\partial t\right), \quad \nabla \times \mathbf{B} = 0 \end{aligned} \tag{19}$$

$\mathbf{E}$，$\mathbf{B}$ はそれぞれ電場と磁場，ρ は電荷，ϵ_0 は真空の誘電率，$\mathbf{J}$ は電流密度を表し，c は光速度を表します。マクスウェルの波動方程式は先ほどの音波の波動方程式の微分演算子部の v を c で置き換えた形となる。

$$\begin{gathered} \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\mathbf{E} = 0, \quad \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\mathbf{B} = 0 \\ \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \end{gathered} \tag{20}$$

ガリレイ変換に対するマクスウェル波動方程式の数学的な取り扱いは既に上でやったのと同じなので、(20) はにガリレイ変換に対して不変ではないことがわかる。簡単のために、１次元の波動方程式に焼きなおして，ガリレイ変換後のその解の形を求めると

$$\phi(x', t') = f(x' - (c - V)t') + g(x' + (c + V)t') \tag{21}$$

となる。光は真空中を伝播するので，音波の場合と異なり媒質が空気というわけにはいかない。そこで、電磁波を伝える媒質をエーテルと呼び、このエーテルに対して静止している系だけで、マックスウェルの方程式が成り立つと考えられる。また、音波の場合のアナロジーから、波源と観測者が媒質（エーテル）と一緒に運動する場合**以外**には，(21) のように光の伝わる速さは方向によって異なると観測されるはずである。ところが、マイケルソン・モーリーの実験により,「真空中での光の速さは観測者の運動や光源の運動状態が変わっても，光の進む方向によらず一定である」という実験結果が得られ、このことから，エーテルという媒質の存在は否定されることになった。

[3]但し $v \neq V$

[4]高橋康「電磁気学再入門」，砂川重信「理論電磁気学」等。

♣ *Q&A* ———

- K 氏：光の波動方程式を不変にする変換はどのようなものが考えられるか，という考察からアインシュタインの特殊相対性理論が生まれたんだよね。
- アリス：そうね。歴史的な経緯はいろんな本で目にするわ。光の場合，マイケルソン・モーリーの実験から，真空中での光の速さは観測者の運動や光源の運動状態が変わっても，光の進む方向によらず一定であるということで、これはガリレイ変換からは導出されない。そうなるとマクスウェル波動方程式の形を変えない変換はどのようなものか，その考察から特殊相対性理論が生まれてきたということね。ということで、そのあたりのお話もついでにしていただくと嬉しいのだけど。
- K 氏：やはりそうきたか。そうくるんじゃないかと予想はしていたが。それじゃ話を続けようか、もっとも、特殊相対性理論の話はまた別の機会に譲るとして、ここではマクスウェルの波動方程式を不変にする変換について調べてみることにするよ。
- アリス：よろしくお願いします。

■マクスウェルの波動方程式を不変にする変換

それでは、マクスウェルの波動方程式を不変にする変換について調べていこう。変換後の変数を

$$(x,\, t) \longrightarrow (u,\, v) \tag{22}$$

として、この変数で同じ形の方程式が成立しなければならない。

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\right) \longrightarrow \left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial w}\right) \tag{23}$$

そこで、次のような線形変換を考える。尚，この逆変換の存在も仮定する。

$$u = A\,x + B\,t \tag{24a}$$

$$w = C\,x + D\,t \tag{24b}$$

行列形式では

$$\begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}$$

これから、$x,\, t$ は次のように求めるられる。

$$\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} D & -B \\ -C & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} \tag{25}$$

$$\text{但し,}\quad \Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}$$

ということで、

$$x = (D\,u - B\,w)/\Delta \tag{26a}$$

$$t = (A\,w - C\,u)/\Delta \tag{26b}$$

以前やったように，微分演算子の関係は、適当な関数 $G = G'(u, w)$ を考えて

$$\frac{\partial}{\partial x}G = \frac{\partial G'}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial G'}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x} = \left(A\frac{\partial}{\partial u} + C\frac{\partial}{\partial w}\right)G'$$
$$\therefore \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \left(A\frac{\partial}{\partial u} + C\frac{\partial}{\partial w}\right)^2 = A^2\frac{\partial^2}{\partial u^2} + C^2\frac{\partial^2}{\partial w^2} + 2AC\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial}{\partial w}$$
$$\frac{\partial}{\partial t}G = \frac{\partial G'}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial G'}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial t} = \left(B\frac{\partial}{\partial u} + D\frac{\partial}{\partial w}\right)G'$$
$$\therefore \quad \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2}\left(B\frac{\partial}{\partial u} + D\frac{\partial}{\partial w}\right)^2 = \frac{1}{c^2}\left(B^2\frac{\partial^2}{\partial u^2} + D^2\frac{\partial^2}{\partial w^2} + 2BD\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial}{\partial w}\right)$$

これから

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t} = \left(A^2 - \frac{B^2}{c^2}\right)\frac{\partial^2}{\partial u^2} - (D^2 - c^2C^2)\frac{1}{c^2} + 2\left(AC - \frac{BD}{c^2}\right)\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial}{\partial w} \tag{27}$$

が得られる。ここで左右両辺の微係数を等しいとおくと、変換係数 A、B、C、D の満たす 3 つの関係式がでてくる。

$$A^2 - B^2/c^2 = 1 \tag{28a}$$
$$D^2 - c^2C^2 = 1 \tag{28b}$$
$$AC - BD/c^2 = 0 \tag{28c}$$

上の関係式を満たす変換係数 A、B、C、D を使えば、変換後の変数（u, v）で波動方程式の形は変わらないことになる。

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial u^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial w^2} \tag{29}$$

ところで、(28a) は 4 個の未知数 A、B、C、D に対して 3 個の条件しかないので 4 つのうち 1 個は決まらない。ということはパラメータ 1 個を使って表されるはずであるから、任意の実数を χ として

$$A = \cosh\chi$$

とおくと[5]、(28a) より

$$B^2 = (A^2 - 1)c^2 = (\cosh^2\chi - 1)c^2 = c^2\,\sinh^2\chi \longrightarrow B = \pm c\,\sinh\chi$$

ただし、ここでは χ の物理的意味はよくわからない。(28c) より

$$AC - BD/c^2 = C\,\cosh\chi \mp \frac{1}{c^2}D\,c\,\sinh\chi$$

ここで $C = \pm\frac{1}{c}\sinh\chi$、$D = \cosh\chi$ と置くと上式を満たす。ということで

$$\begin{aligned} A &= \cosh\chi \\ B &= -c\,shin\chi \\ C &= -\frac{1}{c}\sinh\chi \\ D &= \cosh\chi \end{aligned} \tag{30}$$

とおけば[6]，これは (28a) を満たす。これで A, B, C, D が求まった。(24) に入れると，求める変換は

$$u = x\,\cosh\,\chi - ct\,\sinh\,\chi \tag{31a}$$
$$w = -\frac{x}{c}\,\sinh\,\chi + t\,\cosh\,\chi \tag{31b}$$

となる。この変換は、のちにポアンカレによってローレンツ変換と呼ばれるようになる。行列で書けば

$$\begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\,\chi & -c\,\sinh\,\chi \\ -\frac{1}{c}\sinh\,\chi & \cosh\,\chi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \tag{32}$$

[5] $\cosh^2\chi - \sinh^2\chi = 1$，ちなみに $\sinh\chi = (e^{\chi} - e^{-\chi})$, $\cosh\chi = (e^{\chi} + e^{-\chi})$

[6] 便宜上、B と C の符号はマイナスにとっておく。

■光の波動方程式を不変にする変換の性質

光の波動方程式を不変にする変換が求まったので、この変換の数学的な性質を以下に少し調べておく。(31) から

$$u^2 - c^2\, w^2 = x^2(\cosh^2\chi - \sinh^2\chi) - c^2t^2(\cosh^2\chi - \sinh^2\chi) = x^2 - c^2t^2 \tag{33}$$

となり、この量は今回の変換に対しての不変量であるということになる。次ぎに，(31) の変換をもう一度おこない，$(u,\, w) \longrightarrow (u',\, w')$ に移ったとしよう。そうすると

$$\begin{pmatrix} u' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\,\psi & -c\,\sinh\,\psi \\ -\frac{1}{c}\sinh\,\psi & \cosh\,\psi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} \tag{34}$$

(34) の右辺の $u,\, w$ に (32) を入れると

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} u' \\ w' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cosh\,\psi & -c\,\sinh\,\psi \\ -\frac{1}{c}\sinh\,\psi & \cosh\,\psi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cosh\,\chi & -c\,\sinh\,\chi \\ -\frac{1}{c}\sinh\,\chi & \cosh\,\chi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cosh\,\psi\,\cosh\,\chi + \sinh\,\psi\,\sinh\,\chi & -c(\cosh\,\psi\,\sinh\,\chi + \sinh\,\psi\,\cosh\,\psi) \\ -\frac{1}{c}(\sinh\,\psi\,\cosh\,\chi + \cosh\,\psi\,\sinh\,\chi) & \sinh\,\psi\,\sinh\,\chi + \cosh\,\psi\,\cosh\,\chi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cosh(\chi+\psi) & -c\,\sinh(\chi+\psi) \\ -\frac{1}{c}(\sinh(\chi+\psi) & \cosh(\chi+\psi) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{35}$$

となって、(32) と同じ形になりる。つまり (32) の形の変換を何度おこなっても、同じ (32) の形の変換が得られるということになる。この性質は通常の 2 次元平面内の回転でも満たされる性質で，数学的には群論 (回転群) という形式にまとまる。

■ 4 次元空間における回転

2 次元平面で回転により、座標 $(x, y) \longrightarrow (x',\, y')$ と変換されるの回転の式は

$$\begin{aligned} x' &= x\,\cos\theta + y\,\sin\theta \\ y' &= -x\,\sin\theta + y\,\cos\theta \end{aligned}$$

で表される。この式と (31) の式は形としてよく似ている。そこで三角関数と沿双曲線関数のあいだに成り立つ関係[7]

$$\begin{aligned} \cosh\chi &= \cos(i\,\chi) \\ \sinh\chi &= -i\,\sinh(i\,\chi) \end{aligned}$$

を使うと、(31) は次のように書ける。

$$u = x\,\cos(i\,\chi) + (i\,c\,t)\,\sin(i\,\chi) \tag{36a}$$

$$(i\,c\,w) = -x\,\sin(i\,\chi) + i\,c\,t\,\cos(i\,\chi) \tag{36b}$$

また、(33) の不変量は

$$\begin{aligned} u^2 + (i\,c\,w)^2 &= x^2(\cos^2(,\chi) + \sin^2(i\,\chi)) + (i\,c\,t)^2(\sin^2(i\,\chi) + \cos^2(i\,\chi)) \\ &= x^2 + (i\,c\,t)^2 \end{aligned} \tag{37}$$

となる。ところで、(36) で、$u \longrightarrow x'$、$i\,\chi \longrightarrow \theta$、$i\,c\,w \longrightarrow y'$ と置きかえると、これは 2 次元平面内の回転の式と同じになる。つまり、マクスウェルの波動方程式や、量 (33) を不変にする変換とは、x **と**$i\,c\,t$ **軸によって張られる空間において、虚数角**$i\,\chi$ **だけの回転である**ということになる。

---

[7] オイラーの公式 $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\,\sin(\theta)$ を使う。$\cos(i\,\theta) \pm i\,\sin(i\,\theta) = e^{\mp\theta}$

■ガリレイ変換と 4 次元回転の関連性

ニュートンの運動方程式はガリレイ変換に対して不変であった。一方、マクスウェルの波動方程式はガリレイ変換に対しては不変ではないが、4 次元空間の虚数角の回転に対しては不変であった。この間に何か関連性はないのか、調べてみよう。
ガリレイ変換 (11) を少し抽象的に書くと

$$x'_\mu = \sum_{\nu=1}^{4} G_{\mu\nu} x_\nu \tag{38}$$

となる。ただし、

$$x_0 = t,\ x_1 = x_1, x_2 = y,\ x_3 = z$$

で、かつ

$$G_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -V_1 & 1 & 0 & 0 \\ -V_2 & 0 & 1 & 0 \\ -V_3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{39}$$

この格好はこれは座標回転と似ても似つかぬ形である。ということで、ガリレイ変換からのアプローチはあきらめて、(31) からのアプローチを試みることとする。χ を小さいとすると

$$\cosh\chi \doteq 1,\ \sinh\chi \doteq 1 \tag{40}$$

となるから、

$$\begin{aligned} u &= x - c\,t\,\chi \\ w &= t - x\,\chi/c \end{aligned} \tag{41}$$

が得られる。そこで $\chi = V/c$ とおくと、(41) は

$$u = x - V\,t \tag{42a}$$
$$w = t - x\,V/c^2 \tag{42b}$$

(42b) は空間に対するガリレイ変換である。また、(42b) の方は、$c \longrightarrow \infty$ とすると

$$w = t \tag{43}$$

となって、これはガリレイ変換の時間変換となる。ということで、マクスウェルの波動方程式を不変にする変換（4 次元の回転）は、ガリレイ変換とは全く別物という訳ではなく、光の速度を $c \longrightarrow \infty$ と見做せるような遅い速度を問題にする限り、u を x' とよび、w を t' と呼ぶと両変換は一致することになる。

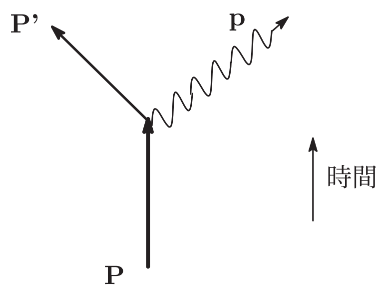
♣ *Q&A* ———

- K 氏：ということだけど。
- アリス：なるほどねぇ〜、、、整理するとこういうことになるのかしら。つまり、「マクスウェルの波動方程式、つまり電磁気学の理論では 4 次元空間における回転と考えられるローレンツ変換に対して不変になっており、ガリレイ変換に対しては不変になっていない。一方、ニュートンの力学はガリレイ変換にたいして不変だが、ローレンツ変換では不変でない。ただし、光速に較べて非常に遅い速度を問題にする場合は、ローレンツ変換とガリレイ変換は一致する。」
- K 氏：そういうことだね。
- アリス：そこで質問なんだけど、ガリレイ変換に対しても、ローレンツ変換にたいしても不変でない系というのはあるのかしら？

- K 氏：ゴォっふぉ〜ん、、、いや喉になにか詰まったみたい。それがあるんだ。最後にそれを紹介してこの話を終えるとしようか。
- アリス：大変長丁場となってしまったけど、K さんさえよければお願いします。

■おまけ：ニュートン力学系と電磁系の結合の例

ガリレイ変換に対しても、4 次元回転に対しても不変でない例として、ニュートン力学に従う荷電粒子が、4 次元回転に対して不変な光と相互作用する例をがんがえてみる。このような系では、不変性がないため、1 つの座標系で計算した結果と、別の座標系で計算した結果は同じにならないことになる。いま、荷電粒子の質量



を m、運動量を $\mathbf{P} = m\mathbf{v}$ とする。
この粒子のエネルギーは、

$$E = \frac{1}{2} m\,\mathbf{v}^2 = \frac{1}{2m}\mathbf{P}^2 \tag{44}$$

光子のエネルギーを ϵ、運動量を $\mathbf{p}$ とすると

$$\epsilon = h\nu = (h/\lambda)c = c|\mathbf{p}| \tag{45}$$

ここで、運動量 $\mathbf{P}$ で飛んでいる荷電粒子が 1 個の光子を発射して、運動量 $\mathbf{P}'$ に変わることができるかどうかを、エネルギー保存則と運動量保存則を使って調べてみよう。
初期状態は、1 個の荷電粒子だけであるから、系の全エネルギーは E で、運動量は $\mathbf{P}$ である。一方、終状態は、１個の荷電粒子と１個の光子となるから、系の全エネルギーを E' とすると

$$E' = \frac{1}{2m}\mathbf{P}'^2 + \epsilon \tag{46}$$

また、全運動量は

$$\mathbf{P}' + \mathbf{p} \tag{47}$$

となる。ここでエネルギー保存則と運動量保存則を適用すると

$$E = E' + \epsilon \tag{48}$$
$$\mathbf{P} = \mathbf{P}' + \mathbf{p} \tag{49}$$

となる。もし、この過程が実現可能なものであるならば、(49) と（49）は両立しているはずである。もし、両立していなければ、この過程は起こらないことになる。そこで、荷電粒子に乗った座標系（荷電粒子の静止系）と実験室座標系の双方で見てみることにする。

A. 静止座標系

この場合は、荷電粒子は静止して見えるので、

$$\mathbf{P} = 0 \tag{50}$$

また、

$$E = \frac{1}{2m}\mathbf{P}^2 \tag{51}$$

であるから、エネルギー保存則は

$$0 = E' + \epsilon \tag{52}$$

となって、右辺は両方とも正の量だからこの式は明らかにおかしいことになる。つまり、「静止している荷電粒子が１個の光子を発射することはありえない」という結論になる。ここで注意すべきは、この結論は、別の座標系では通用しないという点。というのは、光のほうは相対論的関係を使ったが、ガリレイ変換に対して不変ではなかったので、別の座標系に移れば、同じ結論が得られるというわけにはいかない。

B. 実験室座標系

次に、荷電粒子を静止系にもっていかずに計算してみよう。系の全エネルギーは $E = E' + \epsilon$ であるから、**エネルギー保存則**より

$$\begin{aligned} & E = E' + \epsilon \longrightarrow \frac{1}{2m}\mathbf{P}^2 = \frac{1}{2m}\mathbf{P}'^2 + c|\mathbf{p}| \\ \therefore \quad & \mathbf{P}^2 = \mathbf{P}'^2 + 2mc|\mathbf{p}| \end{aligned} \tag{53}$$

次に、**運動量保存則** $\mathbf{P} = \mathbf{P}' + \mathbf{p}$ を使って上式より $\mathbf{P}'$ を消去すると

$$\mathbf{p}^2 + 2mc|\mathbf{p}| - 2\mathbf{P}\cdot\mathbf{p} = 0$$

が得られる。$\mathbf{P}$ と $\mathbf{p}$ の間の角を θ とすると、$|\mathbf{p}| = p \neq 0$ とするとき

$$p^2 + 2mcp - 2Pp\cos\theta = 0 \longrightarrow p + 2mc - 2P\cos\theta = 0 \longrightarrow \cos\theta = \frac{1}{2P}(p + 2mc) \tag{54}$$

となる。ただし、$|\mathbf{P}| = P$ とおいた。
そこで、もし P が十分大きくて

$$2P > p + 2mc \tag{55}$$

を満たすなら、(54) の右辺は 0 と 1 の間にくるから、エネルギーと運動量保存則を同時に満たす角 θ は存在し得ることになる。(55) の右辺の p は、0 から ∞ まで変わり得るが、右辺の第 2 項は定数であるから、兎に角、結論として $P > mc$ ならば、つまり、荷電粒子が光速より早い速度で走っていれば、その荷電粒子は１個の光子を発射し得ることが可能となる[8]。

上の議論は、荷電粒子をニュートン力学で記述した。そこで荷電粒子も相対論的に扱う、つまり全系を相対論的に取り扱ってみよう[9](以下 $c = 1$ とおく)。エネルギーは

$$E = \sqrt{\mathbf{P}^2 + m^2} \tag{56}$$

で与えられるから、

$$\begin{aligned} E = E' + \epsilon &\longrightarrow \sqrt{P^2 + m^2} = \sqrt{P'^2 + m^2} + p \\ \mathbf{P} = \mathbf{P}' + \mathbf{p} &\longrightarrow P'^2 = P^2 + p^2 - 2P\,p\,\cos\theta \end{aligned}$$

$p \neq 0$ とすると

$$\begin{aligned} & \sqrt{P^2 + m^2} = \sqrt{P^2 - 2Pp\cos\theta + p^2 + m^2} + p \\ & P^2 + m^2 = P^2 - 2Pp\cos\theta + p^2 + m^2 + 2p\sqrt{P^2 - 2Pp\cos\theta + p^2 + m^2} + p^2 \\ & (P\cos\theta - p)^2 = P^2 - 2Pp\cos\theta + p^2 + m^2 \\ \therefore \quad & P^2(\cos^2\theta - 1) = m^2 \end{aligned}$$

となる。ところで，$|\cos\theta| \leq 1$ なので左辺は負となるが右辺は正であるため，この等式は成り立たない。つまり、今度は、「相対論的荷電粒子は１個の光子を発射し得ない」という結論になる。ところで、ゴタゴタ計算したが、このケースの場合は荷電粒子と光子の全系が相対論的に不変としたから、荷電粒子の静止座標系で計算すれば十分であった。

---

[8]チェレンコフ放射：荷電粒子が物質中を運動する時、荷電粒子の速度がその物質中の光速度よりも速い場合に光がでる。この現象をチェレンコフ放射という。

[9]2013.3.20 Yanagi さんより計算ミスの指摘があり，修正しました。Thank's Yanagi さん。

♣ $Q\&A$ ———

- K 氏：以上、あぁ〜つかれた。
- アリス：本当にお疲れ様でした。いろいろな知識が得られてとても勉強になったし、とくに最後のおまけは面白かったわ。ニュートン力学系と電磁系の結合を扱う場合は、やはり相対論的に統一した記述をしないときちんとした結論が得られないのね。それはわかるけど、実験室系での記述で荷電粒子はニュートン力学を使って、チェレンコフ放射のことに言及したじゃない。しかし、全部相対論的に取り扱うと荷電粒子は光子を放射しないという結論になったわね。このあたりがわかりにくいわね。
- K 氏：う〜ん、そうだね、、、荷電粒子が光速 c より早く走ることは相対論的に許されないよね。しかし、光速 c というのは真空中の光の速度であって、媒質中を走る場合は光速 c より遅くなるんだね。上の計算はこの辺を全く考慮に入れず、すべて光速 c で押し通したということなんだ。まぁ、あとはご自分でよく考えて。
- アリス：わかりました、そうするわ。今日は本当にありがとう。これで気分もスッキリしたことだし、別の機会にお礼するとして、これから約束があるので失礼します。
- K 氏：それじゃねぇ〜、気をつけていってらっしゃ〜い。

（了)